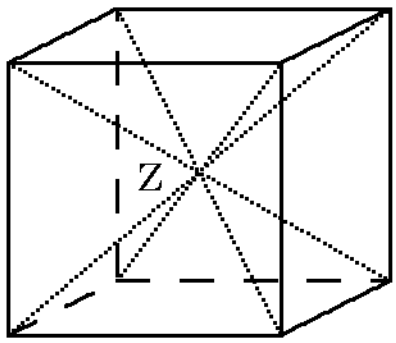
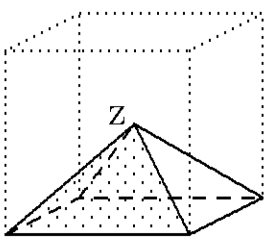
Barbara und Claus Michael Ringel/Bielefeld

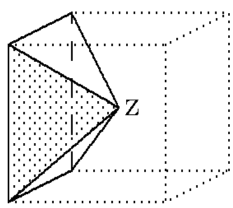
Das Innenleben eines Würfels

Jeder kennt ihn, den Würfel: man denkt zuerst an seine 6 Seitenflächen, aber auch an die 8 Ecken und 12 Kanten. Was aber ist das ›Innenleben‹ eines Würfels? Als erstes natürlich: sein *Zentrum* Z, ganz im Inneren ist es versteckt, von außen nicht zu sehen und doch irgendwie präsent – zu allen Ecken hat es den gleichen Abstand. Dann: die *Raum-Diagonalen*, sie gehen von einer Ecke zur räumlich gegenüberliegenden. Durch die Raum-Diagonalen werden jeweils zwei räumlich gegenüberliegende Ecken verbunden, es gibt also genau vier solche Raum-Diagonalen. Und wo schneiden sich je zwei dieser Raum-Diagonalen? Im Zentrum Z des Würfels. Wenn man ein Kantenmodell eines Würfels zur Verfügung hat (man kann sich ein solches recht einfach aus Strohhalmen und Pfeifenputzern basteln, natürlich kann man auch Klickies verwenden!), so sollte man vier Fäden spannen, um die Raum-Diagonalen vor Augen zu haben.

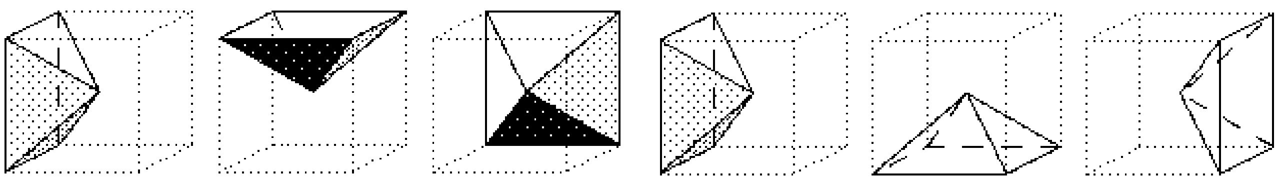


Verbinden wir also Z mit den vier Ecken einer Seitenfläche F, so erhalten wir vier gleich lange Strecken, die jeweils halbe Raum-Diagonalen sind. Diese Strecken, zusammen mit den Würfelkanten am Rand von F bilden offensichtlich eine quadratische Pyramide. Hat unser Würfel die Kantenlänge a, so erhalten wir eine Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat mit Kantenlänge a ist, und deren Höhe $\frac{a}{2}$ ist. Die Spitze jeder dieser Pyramiden ist das Zentrum Z unseres Würfels, wir nennen diese Pyramiden deshalb *Zentrums-Pyramiden*. Am Ende des Artikels findet sich ein Bastelbogen, um eine solche Pyramide aus Papier zu bauen (die Dreiecke sind natürlich gleichschenklige Dreiecke; hat die Grundseite die Länge a, so haben die beiden anderen Seiten die Länge $\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}$, denn jede Raum-Diagonale des Würfels hat die Länge $a\cdot\sqrt{3}$).

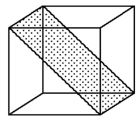




An diesen Zentrums-Pyramiden sind wir interessiert: Zu jeder Seitenfläche unseres Würfels gibt es so eine Zentrums-Pyramide, insgesamt also 6 Stück: unser Würfel ist in



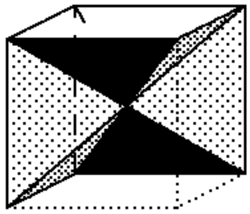
6 kongruente Pyramiden zerlegt. Wir können diese Pyramiden auch erhalten, indem wir eine Säge nehmen und den Würfel jeweils senkrecht zu einer Flächen-Diagonalen durchsägen. Mit vier derartigen Schnitten erhält man eine dieser Pyramiden (sogar zwei gegenüberliegende).

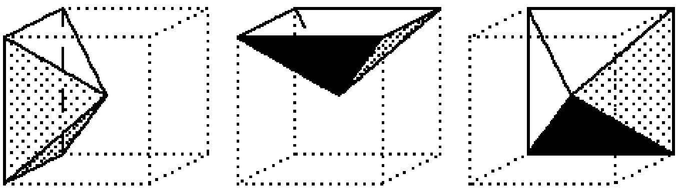


Paare und Tripel von Zentrums-Pyramiden

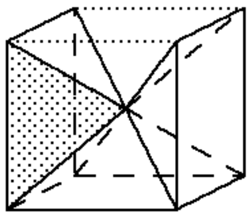
Betrachten wir Paare solcher Zentrums-Pyramiden, so stellt man fest, dass es zwei ganz verschiedene relative Lagen gibt: entweder liegen sie sich im Würfel gegenüber (und berühren sich also nur mit der Spitze), oder aber sie sind benachbart, liegen also nebeneinander, haben demnach eine Dreiecksfläche gemeinsam. Diese beiden Möglichkeiten gibt es, nichts weiter. Und wenn wir an Tripeln von Zentrums-Pyramiden interessiert sind? Auch hier gibt es genau zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten:

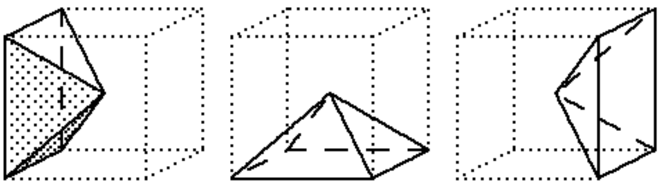
- entweder gilt: je zwei dieser Zentrums-Pyramiden sind benachbart, dann gruppieren sich die drei Pyramiden um eine Raum-Diagonale, sie haben also eine halbe Raum-Diagonale (und demnach eine Würfel-Ecke) gemeinsam. Wir nennen dies ein Tripel vom *Eckentyp*.





- oder aber: zwei dieser Zentrums-Pyramiden liegen einander gegenüber, die dritte liegt dazwischen; die sich gegenüberliegenden Pyramiden bilden eine Art Klammer, wir nennen daher ein solches Tripel eines vom *Klammer-Typ*.

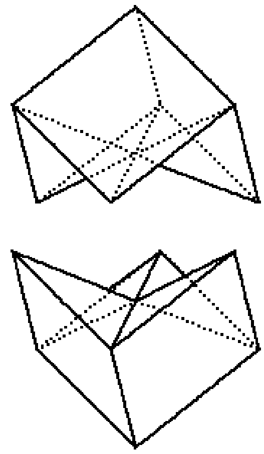




Dass es jeweils nur zwei Arten von Paaren wie von Tripeln von Zentrums-Pyramiden gibt, kann man auch anders begründen: Die Zentrums-Pyramiden entsprechen ja gerade den Würfelflächen (um eine Zentrums-Pyramide zu erhalten, verbindet man das Zentrum des Würfels mit einer solchen Fläche). Betrachten wir aber Paare von Würfelflächen, so sind diese entweder benachbart oder sie liegen sich gegenüber. Und schauen wir uns Tripel von Würfelflächen an, so gibt es genau zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten: entweder die drei Flächen haben eine gemeinsame Ecke (›Eckentyp‹), oder aber sie bilden eine Art ›Klammer‹.

Anmerken sollten wir noch folgendes: Haben wir ein Tripel von Zentrums-Pyramiden ausgewählt, so bilden die restlichen drei Zentrums-Pyramiden ein entsprechendes Tripel: Beginnen wir mit einem Tripel vom Eckentyp, so bilden die restlichen Pyramiden ebenfalls ein Tripel vom Eckentyp (die beiden Ecken liegen auf einer Raum-

Diagonalen); beginnen wir mit einem Tripel vom Klammertyp, so bilden die restlichen Pyramiden ebenfalls ein Tripel vom Klammertyp (wir haben zwei Klammern, die ineinander greifen).



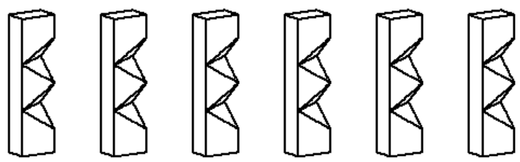
Wir erhalten auf diese Weise ganz überraschende Würfelhalbierungen, also Zerlegungen des Würfels in Hälften, die eine recht komplizierte, aber durchaus reizvolle Form haben. Diese *Halbwürfel* sehen ganz anders aus, als die üblichen Würfelhalbierungen, die man durch gerade Schnitte erhält. Rechts sieht man zwei Halbwürfel vom Eckentyp, wie sie sich zu einem Würfel ergänzen. Wir werden sehen, dass diese Würfelhalbierungen zur Erklärung einer Reihe von Holz-Puzzles herangezogen werden können.

Mit unserem Bastelbogen kann man neben einzelnen Zentrums-Pyramiden Halbwürfel vom Ecken- wie vom Klammertyp basteln. Dabei sollte man die Vorlage geeignet vergrößert auf Karton kopieren. Übrigens wird das Zusammenkleben einfacher, wenn man die letzten Laschen außen (und nicht innen) anklebt.

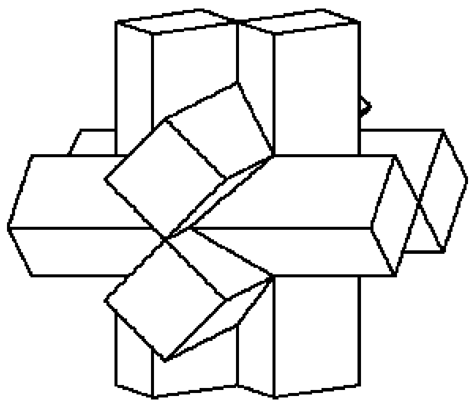
Wie kann man im Unterricht solche Netze entwerfen? Man kann zum Beispiel damit beginnen, drei Zentrumspyramiden aneinander zu kleben. Zumindest mit größeren Kindern kann man dann einen aus den drei Einzelpyramiden geklebten Halbwürfel an einigen Kanten vorsichtig auftrennen, um ein brauchbares Netz zu erhalten. Hier schließen sich Fragen an: Welche Flächen werden für ein Netz benötigt? Wie kann ein Netz aus diesen Flächen zusammengesetzt werden? Daraus kann sich die Frage nach der Verschiedenheit von Netzen ergeben. Und man kann der Frage nachgehen, welche der vielen Falze Berg-Falze, welche Tal-Falze sein müssen.

Der Diagonalknoten

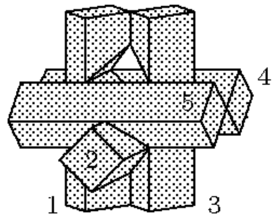
Wir betrachten nun ein Holz-Puzzle, das viele verschiedene Namen trägt: ›Bündel‹, oder ›Stern-Puzzle‹, oder eben ›Diagonalknoten‹. Gegeben sind hierfür sechs identisch eingekerbte Holzstäbe:



die folgendermaßen zusammenzusetzen sind:

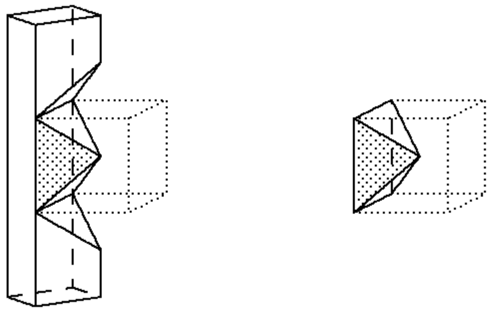


Versucht man ohne Vorüberlegungen, diese sechs Stäbe zusammenzubauen, so scheitert dies immer beim letzten Stab. Es ist ganz einfach, fünf der Stäbe in die gewünschte Lage zu bringen – dann aber geht nichts mehr!



Ein Auswechseln der Stäbe bringt nichts, denn alle sechs Stäbe haben die gleiche Form.

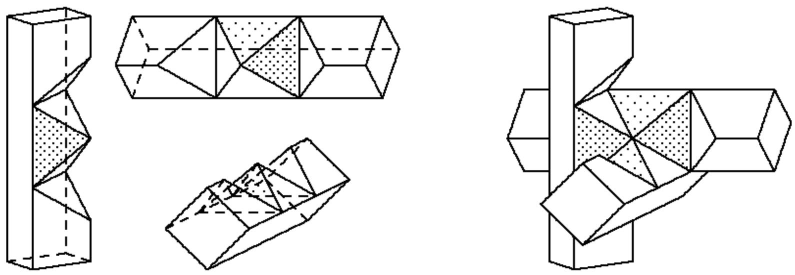
Schauen wir uns die Einkerbungen genau an, so fällt auf, dass man es in der Mitte mit einer Zentrumspyramide eines Würfels zu tun hat:



Der Trick beim Zusammenbau besteht nun darin,

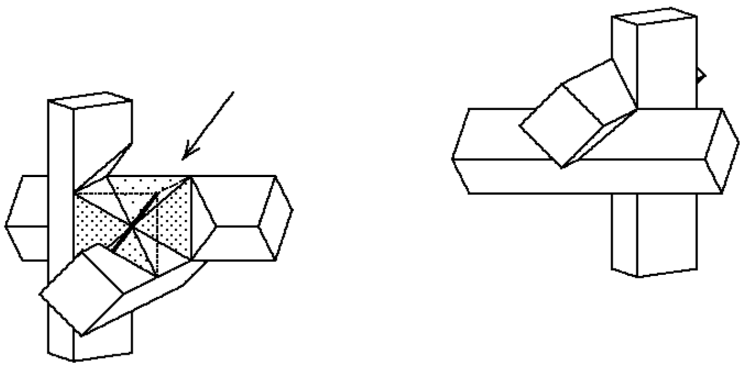
- dass man mit jeweils drei Stäben einen halben Diagonalknoten baut, und zwar so, dass sich die drei Zentrumspyramiden zu einem Halbwürfel (vom Eckentyp) ergänzen,
- und dass man anschließend diese beiden Hälften ineinander schiebt.

Hier der Zusammenbau eines halben Diagonalknotens: links die Stäbe, rechts das Ergebnis.



Man sieht deutlich den Halbwürfel vom Eckentyp.

Ein zweiter halber Knoten ist entsprechend, aber spiegelbildlich zum ersten zu bauen! Beim Bau der beiden halben Knoten erzeugt man in der Mitte Würfelhälften, und diese werden nun entlang der zugehörigen Würfeldiagonale (Pfeilrichtung) ineinander geschoben:



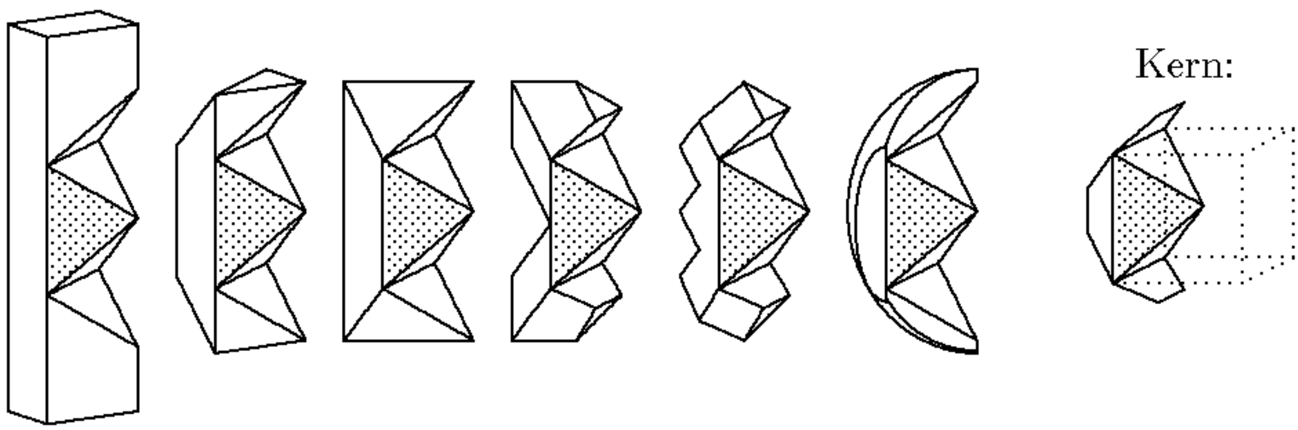
Warum eigentlich braucht man hier das Spiegelbild des ersten halben Knotens, und nicht etwa zwei identische halbe Knoten? Das ist gar nicht ganz einfach zu begründen! Aber beim effektiven Versuch, den Knoten zusammenzubauen, überzeugt man sich leicht, dass zwei identische halbe Knoten *nicht* ineinander geschoben werden können, zwei zueinander spiegelbildliche dagegen schon! Gab es das gleiche Problem beim Halbwürfelkern? Nein, zwei Halbwürfel vom Eckentyp ergänzen sich immer zu einem Würfel, man braucht nicht auf Spiegelsymmetrie zu achten. Der Grund für das unterschiedliche Verhalten ist sofort einsichtig: Jeder Halbwürfel vom Eckentyp ist zu sich selbst spiegelbildlich, dagegen ist der oben gebaute halbe Diagonalknoten *nicht* zu sich selbst spiegelbildlich.

Fassen wir zusammen: *Das Wesentliche am Diagonalknoten sind die Zentrums-Pyramiden, die sich zu einem ganzen Würfel zusammenfügen*.

Variationen

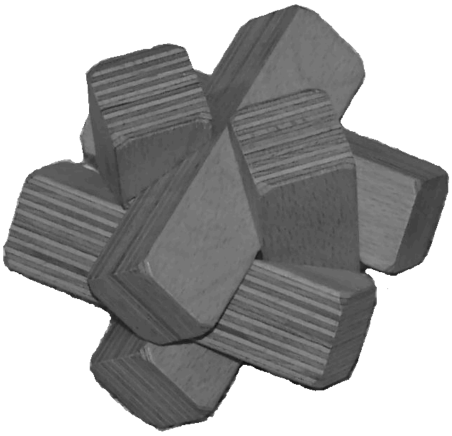
Wie wir gesehen haben, sind es die Zentrums-Pyramiden, die beim Zusammenbauen eines Diagonalknoten relevant sind, die weitere Form der Einzelstäbe dagegen ist unwichtig und kann daher abgewandelt werden. Allerdings sollte man sich klar machen, dass die beiden Kerben, durch die man solch eine Zentrums-Pyramide erzeugt, eine weitere Funktion haben: die der Zentrums-Pyramide abgewandten Kerb-Flächen dienen dazu, den Diagonalknoten zusammenzuhalten. Der ganze Kerb-Bereich muss intakt bleiben, ansonsten ist dem Einfallsreichtum in der Gestaltung der Stäbe kaum eine Grenze gesetzt – eine Vielzahl von solchen Variationen ist im Handel erhältlich!

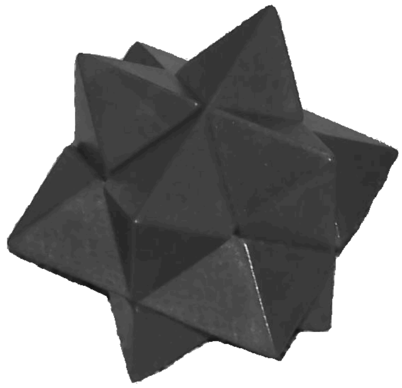
Hier stellen wir einige Abwandlungen vor; ganz rechts betonen wir noch einmal den wesentlichen Kern. Derartige Abwandlungen liefern natürlich völlig verschiedene äußere Formen, von komplexen Polyedern bis hin zu einer Kugel!

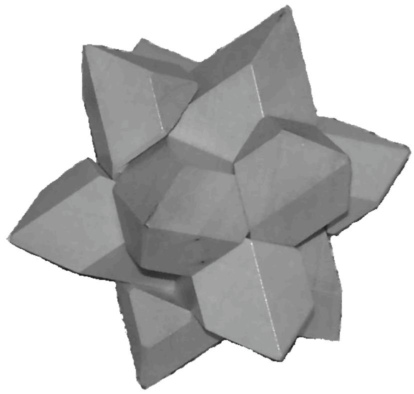


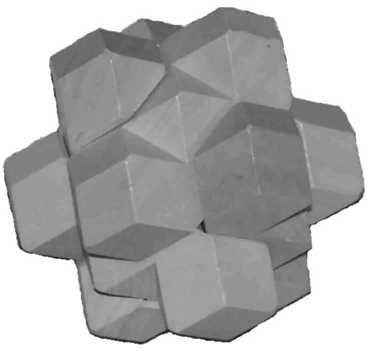
Wir haben hier Puzzles vor Augen, die *äußerlich völlig verschieden* aussehen, *aber nach ein und demselben Prinzip konstruiert* sind: Die Mitte jedes Bauteils besteht aus einer Mittelpunkts-Pyramide eines Würfels, alle sechs Bauteile zusammen liefern als Kern des Puzzles einen vollständigen Würfel (und zusammengesetzt werden jeweils drei derartige Zentrums-Pyramiden zu einem Halbwürfel vom Eckentyp).

Frage für die Leser: Wie sieht in jedem der unten abgebildeten Fälle die Form der Einzelstäbe aus? (Man findet sie fast alle in der weiter oben vorgestellten Abwandlungsreihe).

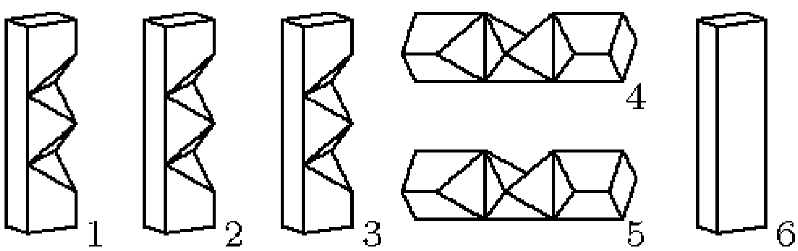




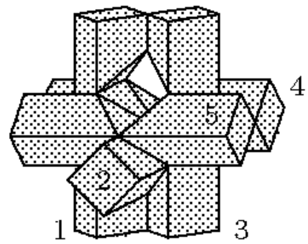




Andererseits gibt es auch Beispiele ganz ähnlicher Puzzles, deren *Äußeres* sich in nichts vom Diagonalknoten unterscheidet, während die *innere Struktur* (und gerade darauf kommt es ja eigentlich an) *verschieden* ist: so gibt es Puzzles zu kaufen, die aus den folgenden sechs Stäben bestehen:



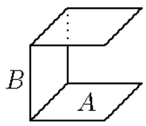
Wie unsere bisher verwendeten Stäbe sind die ersten drei Stäbe zweimal eingekerbt. Die beiden waagrechten Stäbe besitzen neben diesen beiden Einkerbungen eine weitere, und zwar in der Mitte und um 90° versetzt. Der letzte Stab dagegen hat gar keine Einkerbung, man nennt ihn den *Schlüssel*, er wird zuletzt verwendet. Hier gibt es beim Zusammenbau keinerlei Probleme: man beginnt mit den Stäben 1, 2, 3, fügt 4 und 5 hinzu und erhält dann gerade die Öffnung, die man braucht, um als letztes den Schlüssel einzufügen.



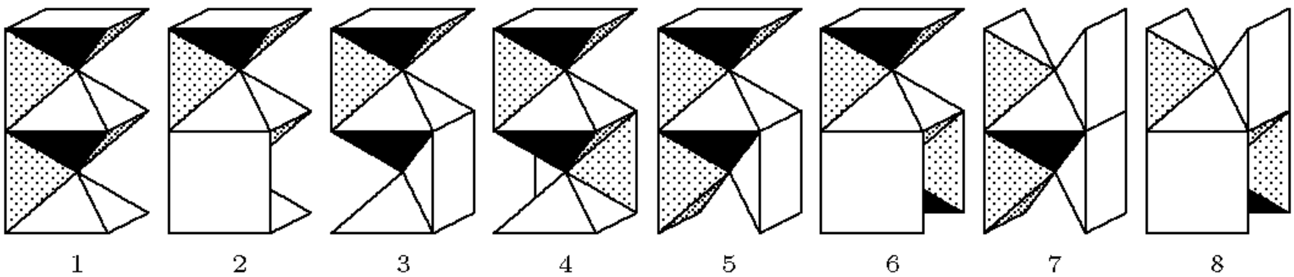
Coffin's Acht-Teile-Puzzle

Wir wenden uns nun den Halbwürfeln vom Klammertyp zu: sie bilden die Grundlage eines ganz anders gearteten Holzpuzzles, des Acht-Teile-Puzzles von Stewart Coffin. Auch hier werden Halbwürfel zu Würfeln zusammengefügt und zwar zu insgesamt 8 Würfeln, die selbst dann wieder einen Würfel bilden können. Insgesamt brauchen wir also 16 Halbwürfel vom Klammertyp.

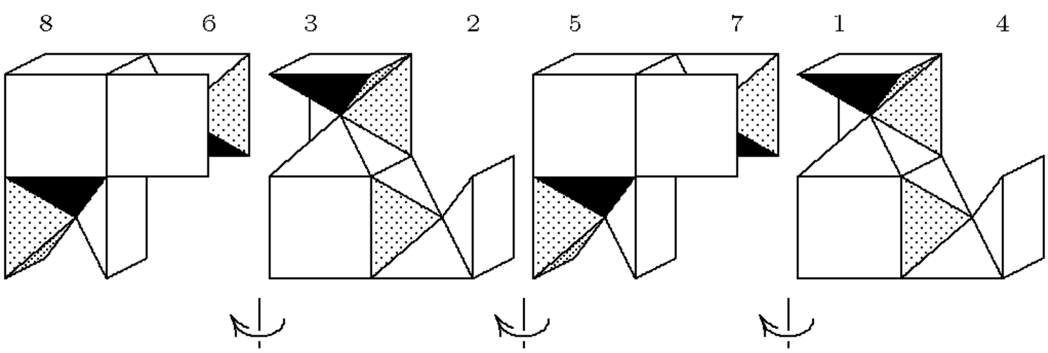
Zwei Würfelhalbierungen vom Klammertyp können auf genau 8 verschiedene Weisen entlang von Würfelflächen miteinander verklebt werden (dies sollten auch jüngere Kinder herausfinden können!):



Beim Klammertyp gibt es nämlich zwei wesentlich verschiedene Arten von Würfelflächen, nennen wir sie A und B: Mit A bezeichnen wir eine der beiden einander gegenüberliegenden Flächen, mit B die dritte Fläche. Verkleben wir zwei A-Flächen, so gibt es offensichtlich vier Möglichkeiten. Verkleben wir dagegen eine A-Fläche mit einer B-Fläche oder zwei B-Flächen miteinander, so gibt es jeweils nur zwei Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also acht Möglichkeiten von solchen ›*Doppelklammern*‹:

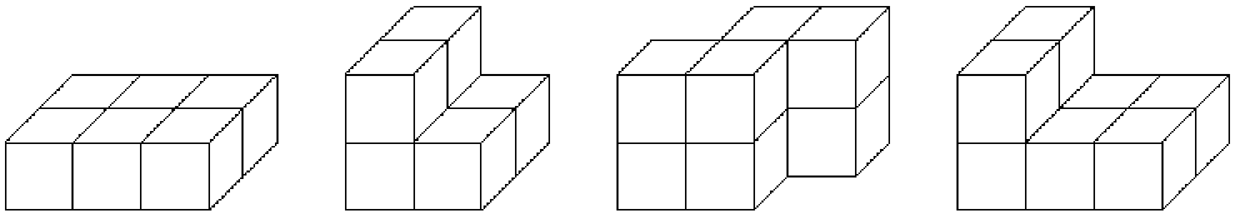


Hat man diese acht Doppelklammern gebaut, so besteht die erste Aufgabe darin, sie zu einem 2x2x2-Würfel zusammenzusetzen. Jede Lösung, die wir erhalten, liefert eine Art Verkettungen von acht Einzelwürfeln: wir geben hier eine Lösung an, die sich in vier Paarungen von Doppelklammern zerlegen lässt (diese vier Paarungen sind aber auch zu anderen Lösungen kombinierbar, insbesondere gibt es also nicht nur eine Lösung). Hier sind diese Paarungen, wobei beim weiteren Zusammenbau an den angegebenen Stellen immer eine Drehung um 90° vorzunehmen ist. Man beachte, dass jeweils zwei Paarungen identische Gesamtform haben.



In seinem Buch *The puzzling world of polyhedral dissections,* in dem er neben vielen anderen Holzpuzzles auch das Acht-Teile-Puzzle vorstellt, betont Coffin, dass sich gerade dieses Puzzle hervorragend für den Mathematik-Unterricht eigne: *Here is one of the best examples in this book of a geometrical recreation which lends itself to use in the classroom.* Und er führt gleich mehrere Aufgabenstellungen an, die Sie auch selbst einmal versuchen sollten zu bearbeiten:

1. Zeige, dass mindestens jeweils vier dieser Doppelklammern benötigt werden, um einen ›geschlossenen‹ Körper zu erhalten (›geschlossen‹ soll heißen, dass alle Außenflächen Quadrate sind); Coffin nennt dies eine geschlossene *Schlaufe (closed loop).*
2. Ein 2x2x1-Quader ist die einzige Möglichkeit einer geschlossenen Vierer-Schlaufe.
3. Können aus den acht Doppelklammern zwei getrennte 2x2x1-Quader gebaut werden? Begründe, warum dies nicht möglich ist.
4. Es gibt keinen 4x2x1-Quader, den man als geschlossenen Körper erhalten kann. Warum nicht?
5. Welche anderen Formen sind unmöglich?
6. Alle Lösungen, die geschlossene Körper liefern, bestehen aus einer geraden Anzahl von Doppelklammern.
7. Finde alle geschlossenen Körper, die aus sechs Doppelklammern (aus allen acht Doppelklammern) gebaut werden können. Einige sind hier abgebildet:



Die Vielfalt dieser Aufgabenstellungen zeigt Möglichkeiten auf, wie hier durch experimentelle Vorgehensweisen der Weg für systematische Betrachtungen bis hin zum Begründen und Beweisen geebnet werden kann. (Bei Coffin heißen übrigens die meisten dieser Aufforderungen wirklich »*Prove!*«)

Und natürlich fördert der Einsatz solcher Puzzles im Schulunterricht in hohem Maße das räumliche Vorstellungsvermögen!

Literatur

Coffin, S. T. (1991): *The puzzling world of polyhedral dissections.* Oxford: Oxford University Press
van Delft, P./ Botermans, J. (1977): *Denkspiele der Welt*. München: Heimeran
Thiele, R. (1984): *Das große Spielvergnügen*. München: Hugendubel
Thiele, R./Haase, K. (1991): *Teufelsspiele*. Leipzig: Urania, 3.Auflage

Bastelbögen