SS 2021
M. Röckner

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 9
Abgabe: Freitag, 18.06.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei $a < b$, $k \geqslant 1$ und $C^k([a,b]) := \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} | f$ k-mal stetig differenzierbar$\}$ mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|\colon x \in [a,b]\}$. Beweisen Sie, dass der Ableitungsoperator $\frac{d}{dx}\colon C^{k+1}([a,b]) \to C^k([a,b])$, $f \mapsto \frac{df}{dx}$ ein linearer nicht-stetiger Operator ist. *(4 Punkte)*

Aufgabe 2.
Betrachte den Raum $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Wir definieren die Operatoren $A_n\colon C([0,1]) \to C([0,1])$ durch

$$(A_n x)(t) = t^n(1-t)x(t).$$

Konvergiert $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Operatornorm? *(4 Punkte)*

Aufgabe 3.
Betrachte den Raum $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Sei $f \in C([0,1])$. Definiere den Operator $A_f\colon C([0,1]) \to C([0,1])$ durch

$$(T_f x)(s) := f(s) \cdot x(s) \qquad s \in [0,1].$$

Beweisen Sie, dass T_f ein beschränkter Operator ist und berechnen Sie die Operatornorm von T_f. *(4 Punkte)*

Aufgabe 4.
Seien X, Y normierte Räume. Sei $T\colon X \to Y$ ein linearer beschränkter Operator. Beweisen Sie, dass folgende Definitionen der Operatornorm äquivalent sind.

- $\|T\| = \inf\{c \geqslant 0\colon |Tx| \leqslant c|x| \ \forall x \in X\}$
- $\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|Tx|}{|x|}$
- $\|T\| = \sup_{|x|\leqslant 1} |Tx|$
- $\|T\| = \sup_{|x|=1} |Tx|$

(4 Punkte)

Hinweis: Einige der Implikationen finden Sie im Vorlesungsskript.