WS 2020/21
M. Röckner

Übungen zur Maß- und Integrationstheorie

Blatt Weihnachtsbonus
Abgabe: Freitag, 01.01.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei $\mathcal{R}$ ein σ-Ring über die Menge X und sei

$$\mathcal{A} := \mathcal{R} \cup \{A^c \mid A \in \mathcal{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist die $\mathcal{R}$ umfasst. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2.
*Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über die Menge X. Beweisen Sie, dass $\mathcal{A}$ entweder endlich oder überabzählbar ist. (Mit anderen Worten: σ-Algebren sind **nie** abzählbar unendlich!).*
Hinweis:
Angenommen $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar. Für alle $x \in X$ betrachten Sie $B_x := \bigcap_{x \in A_i} A_i$. Beweisen Sie, dass $B_x \cap B_y \neq \emptyset \Rightarrow B_x = B_y$. Beweisen Sie, dass die Menge $\{B_x \mid x \in X\}$ keine endliche Mengen sein kann. Folgern Sie hieraus, dass $\mathcal{A}$ überabzählbar viele Elemente enthalten müsste, indem Sie ausnutzen, dass $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar ist. *(3 Punkte)*

Aufgabe 3.
Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Massraum und $\mu, \nu \colon \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ zwei Maße. Seien μ^* und ν^* die dazu assozierten äußeren Maße und $(\mu + \nu)^*$ das assozierte äußere Maß von $\mu + \nu$. Beweisen Sie, dass

$$(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*.$$

(2 Punkte)

Beweisen Sie zusätzlich, dass

$$\mathcal{A}_{\mu^*} \cap \mathcal{A}_{\nu^*} \subseteq \mathcal{A}_{(\mu+\nu)^*}$$

gilt. ($\mathcal{A}_{\mu^*}$ ist in Definition 3.1 für beliebige äußere Maß definiert. Siehe auch Erweiterungssatz von Caratheodory) *(2 Punkte)*

Aufgabe 4.
Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monton wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass f Borel-messbar ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 5.
Wir modellieren einen zufälligen Würfelwurf wie folgt: Sei $\Omega := \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mu(A) := \frac{|A|}{6}$. Beispiel:

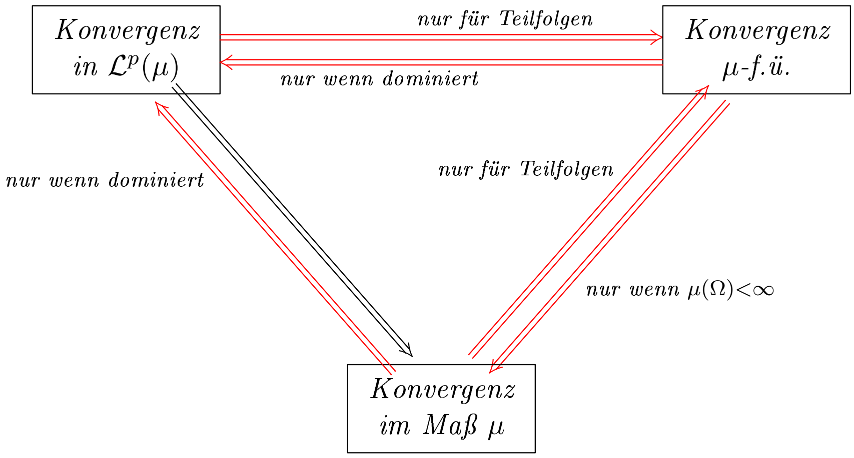
$$\mu(\{1,3,5\}) = \frac{|\{1,3,5\}|}{6} = \frac{1}{2}.$$

Den zweifachen Würfelwurf modellieren wir durch

$$\Omega' := \Omega \times \Omega,$$
$$\mathcal{A}' := \mathcal{A} \otimes \mathcal{A},$$
$$\mu' := \mu \otimes \mu.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit nach 2 Würfelwurfen die Augensumme 7 zu erhalten. Also $\mu'(\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega' \mid \omega_1 + \omega_2 = 7\})$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 6.
Betrachten Sie das "Konvergenzdiagramm" aus Seite 78 im Skript.



Jeder rote Implikationspfeil gilt **nur** *unter Zusatzbedingungen. Konstruieren Sie zu jedem roten Pfeil ein Gegenbeispiel. (z.B. für den obersten Pfeil eine Folge die in $\mathcal{L}^p$ konvergiert, aber* **nicht** *μ-f.ü. konvergiert.)* *(10 Punkte)*

Aufgabe 7.
Sei $a_{n,m} \in \mathbb{R}$ eine Doppelfolge mit $a_{n,m} \geqslant 0$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m} < \infty \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

(a) *Zeigen Sie, dass*

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \liminf_{n\in\mathbb{N}} a_{n,m} \leqslant \liminf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m}.$$

(b) *Falls $a_{n,m} \leqslant a_{n+1,m}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt, beweisen Sie dass*

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} a_{n,m} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m}.$$

(c) *Falls eine konvergente Folge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ existiert mit $a_{n,m} \leqslant b_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und eine konvergente Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} a_{n,m} = a_m$, beweisen Sie, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m\in\mathbb{N}} |a_{n,m} - a_m| = 0.$$

Hinweis:
Nutzen Sie aus, dass

$$\mu := \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n$$

ein Maß auf dem Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ist, wobei $\varepsilon_n(A) := 1_{\{n\}}(A)$ das Dirac-Maß ist. *(6 Punkte)*

Aufgabe 8.
Sei die Funktion $F\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dann ist F differenzierbar und wir setzen $f := F'$. Beweisen Sie, dass f weder Riemann- noch Lebesgueintegrierbar ist.
Bemerkungen:
Man könnte in diesem Fall $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a)$ setzen. Es gibt Integralbegriffe die sowohl Riemann als auch Lebesgueintegral verallgemeinern. *(4 Punkte)*