WS 2020/21
M. Röckner

Übungen zur Maß- und Integrationstheorie

Blatt 1
Abgabe: Freitag, 06.11.2020
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.

a) Zeige: Ein System von Teilmengen $\mathcal{A}$ einer Grundmenge Ω ist genau dann eine Algebra, wenn $\Omega \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$, falls $A \in \mathcal{A}$, und $A \cup B \in \mathcal{A}$, falls $A, B \in \mathcal{A}$. *(2 Punkte)*

b) Seien $\mathcal{A}_i$ σ-Algebren auf Ω_i, $i = 1, 2$ und $T\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung. Zeige, dass $\{T^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{A}_2\}$ und $\{B \subseteq \Omega_2 \mid T^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$ σ-Algebren auf Ω_1 bzw. Ω_2 sind. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2.

Sei $\mathcal{E}$ ein System von Teilmengen einer Grundmenge Ω. Zeige, dass es einen kleinsten Sigmaring σ-$\mathcal{R}(\mathcal{E})$ auf Ω gibt der $\mathcal{E}$ enthält. *(3 Punkte)*

Aufgabe 3.

Sei Ω eine unendliche Menge.

a) *Sei Ω abzählbar und sei durch*

$$\mathcal{A}_1 := \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}$$

eine Algebra auf Ω definiert. Zeige, dass die durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich} \\ +\infty & \text{falls } A^c \text{ endlich} \end{cases}$$

definerte Funktion $\mu\colon \mathcal{A}_1 \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein additives, aber kein σ-additives Maß ist. *(2 Punkte)*

b) *Sei Ω überabzählbar und sei durch $\mathcal{A}_2 := \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ eine Algebra auf Ω definiert. Zeige, dass die durch*

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{falls } A^c \text{ abzählbar} \end{cases}$$

definierte Funktion $\mu\colon \mathcal{A}_2 \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein Maß ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4.

Sei $\mathcal{R}$ ein Ring und μ ein additives Maß auf $\mathcal{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeige für $A, B, A_1, ..., A_N$ aus $\mathcal{R}$:

a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,

b) $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ *falls* $A \subseteq B$,

c) $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ *falls* $A \subseteq B$ *und* $\mu(A) < \infty$,

d) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^N \mu(A_n)$,

e) *Ist $(A_n)_{n \geqslant 1}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{R}$ mit $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{R}$, so gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(Je 1 Punkt)