WS 2020/21
M. Röckner

Übungen zur Maß- und Integrationstheorie

Blatt 6
Abgabe: Freitag, 11.12.2020
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und sei* $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *eine Folge von* $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$*-messbaren Funktionen. Sei* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$f(\omega) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega), & \text{falls } (f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent ist} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass f *ebenfalls* $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$*-messbar ist.* *(2 Punkte)*

Aufgabe 2.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und sei* $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *eine Folge von* $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$*-messbaren Funktionen wobei* f_0 *Lebesgue-integriebar ist und* $f_n(\omega) \geqslant f_{n+1}(\omega)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $\omega \in \Omega$ *gilt. Beweisen Sie, dass*

$$\int \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

gilt. *(2 Punkte)*

Aufgabe 3.
Sei $m\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \bar{\mathbb{R}}$ *das eindimensionale Lebesguemaß auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*. Konstruieren Sie eine Folge* $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *von* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*-messbaren, Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}m = 1.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 4.
Sei $m\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \bar{\mathbb{R}}$ *das eindimensionale Lebesguemaß auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*. Konstruieren Sie eine Funktion* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *die Riemann-integrierbar auf* $]-\infty, +\infty[$ *aber **nicht** Lebesgue-integrierbar auf* $]-\infty, +\infty[$ *ist.*

(2 Punkte)