Übungen zur Maß- und Integrationstheorie

Blatt 7
Abgabe: Freitag, 18.12.2020
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei $a < b$ und $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass f konkav ist genau dann wenn für alle $x_1, ..., x_\ell \in]a,b[$ und $\lambda_1, ..., \lambda_\ell \in]0,1[$ mit $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(x_i)$$

gilt. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für messbare Funktionen f definieren wir

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \geqslant 0 \mid |f| \leqslant c \ \mu\text{-f.ü.}\}$$

und

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } \mathcal{A}\text{ -messbar}, \ \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Beweisen Sie, dass für alle $f, g \in \mathcal{L}^\infty$

$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

gilt. *(2 Punkte)*

Aufgabe 3 ("Gegenbeispiel" zu Lebesgues Theorem der dominierten Konvergenz)**.**
Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ und $p \geqslant 1$. Konstruieren Sie eine Folge von messbaren Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n \in \mathcal{L}^p$, so dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ f.ü. existiert und eine messbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \in \mathcal{L}^p$ existiert so dass

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{f.ü.}$$

***aber** es gilt ebenfalls*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p \neq 0.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 4 ("Gegenbeispiel" zu Bemerkung 9.13.(ii))**.**
Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ und $p \geqslant 1$. Konstruieren Sie eine Folge von Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n \in \mathcal{L}^p$ und eine weitere Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \in \mathcal{L}^p$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$$

gilt, aber so dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad \mu\text{-f.ü.}$$

***nicht** gilt.* *(3 Punkte)*