Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 13
Abgabe: Freitag, 28.01.2022, 12:00 Uhr
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

(Aufgaben(teile), die mit einem "" gekennzeichnet sind, sind Zusatzaufgaben.)*

Aufgabe 52. (Nachtrag zur schwachen Konvergenz) (2 + 2 Punkte)
Sei S ein separabler, metrischer Raum mit Metrik d und Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(S)$.

(a) Sei $S_0 \subset S$ eine abzählbare, dichte Teilmenge und setzen Sie[1]

$$\mathcal{U}_0 := \{B_q(s_0) \mid q \in \mathbb{Q}_+, s_0 \in S_0\}$$
$$\mathcal{U} := \left\{ \bigcup_{n=1}^{m} V_n \mid m \in \mathbb{N}, V_n \in \mathcal{U}_0, 1 \leqslant m \leqslant n \right\}.$$

Zeigen Sie: für jede offene Teilmenge $U \subset S$ existiert eine isotone Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ mit $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

(b) Zeigen Sie mit (a), dass Wahrscheinlichkeitsmaße μ_n auf S genau dann **schwach** gegen μ konvergieren, wenn

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \geqslant \mu(U) \quad \forall U \in \mathcal{U}. \tag{*}$$

Aufgabe 53. (4 Punkte)
Sei S ein separabler, metrischer Raum mit Metrik d und Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(S)$. Zeigen Sie mit Aufgabe 52 (b):

Es gibt Funktionen $g_1, g_2, \ldots \in C_b(S)$, so dass Wahrscheinlichkeitsmaße μ_n genau dann schwach gegen μ konvergieren wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int g_k \, d\mu_n = \int g_k \, d\mu \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{*}$$

Hinweis: Konstruieren Sie für jedes $U \in \mathcal{U}$ eine Folge von nichtnegativen stetigen Funktionen $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$, die monoton gegen 1_U konvergiert.

Aufgabe 54. (Alternativer Beweis von Satz 2.3.8) (4 Punkte)
Sei S ein separabler, metrischer Raum mit Metrik d. Betrachten Sie $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte (i.i.d.) Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in S und Verteilung μ. Für $\omega \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\xi_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i(\omega)} \in \mathcal{M}_1(S).$$

Beweisen Sie den Satz 2.3.8 mit Hilfe von Aufgabe 53.

[1] Hierbei bezeichnet $B_q(s_0)$ eine Kugel um s_0 mit Radius q.

Aufgabe 55. (Bedingte Wahrscheinlichkeiten) (4 Punkte)

(a) Wir betrachten das folgende Zufallsexperiment: Gegeben seien n Urnen, von denen jede Urne s schwarze und w weiße Kugeln enthält. Nun werde aus der ersten Urne zufällig eine Kugel gezogen und in die zweite Kugel gelegt. Danach werde wiederum aus der zweiten Urne zufällig eine Kugel gezogen und in die dritte Urne gelegt und so weiter, bis schließlich zufällig eine Kugel aus der vorletzten in die letzte Urne gelegt wird. Nun ziehe eine Kugel aus der letzten Urne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel weiß ist.

(b) Eine **Gleichgewichtsverteilung** zu einem Kern K ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit der Eigenschaft, dass

$$\mu K = \mu,$$

wobei

$$\mu K(A_2) := \int K(x_1, A_2) d\mu(x_1).$$

Zeigen Sie, dass $N\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\right)$ eine Gleichgewichtsverteilung zum Kern K von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist, wobei dieser definiert ist durch

$$K(x, \cdot) := N(\alpha x, \sigma^2), \quad |\alpha| < 1.$$