WiSe 2021/22
Prof. Dr. Michael Röckner und Dr. Andre Schenke

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 2
Abgabe: Freitag, 29.10.2021, 12:00 Uhr
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

(Aufgaben(teile), die mit einem "" gekennzeichnet sind, sind Zusatzaufgaben.)*

Aufgabe 6. (Formel von Sylvester)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I eine endliche Menge und $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$ eine Familie von Mengen aus $\mathcal{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{J\subset I, J\neq\emptyset} (-1)^{|J|-1} \cdot P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right).$$

(4 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass im Spezialfall $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ auch die folgende Formel gilt:

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right).$$

(2 Punkte)

Aufgabe 7. (Diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße, vgl. Satz 1.2.1 (ii))
Sei $\Omega \neq \emptyset$ abzählbar und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie:
Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist von der Struktur $p(\omega) := P(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$; mit anderen Worten: es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion $p\colon \Omega \to [0,1]$ mit

$$P(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) \quad \forall\ A \subset \Omega.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 8. (Urbild-σ-Algebra) Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ messbare Räume mit $\Omega, \tilde{\Omega} \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass

(a) für eine $\tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{A}$-messbare Abbildung $T\colon \tilde{\Omega} \to \Omega$ das Mengensystem

$$\sigma(T) := \{T^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra über $\tilde{\Omega}$ ist und (4 Punkte)

(b) diese σ-Algebra $\sigma(T)$ die kleinste σ-Algebra ist bzgl. der T eine $\tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{A}$-messbare Abbildung ist. (2 Punkte)