WiSe 2021/22
Prof. Dr. Michael Röckner und Dr. Andre Schenke

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 3
Abgabe: Freitag, 05.11.2021, 12:00 Uhr
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

(Aufgaben(teile), die mit einem "" gekennzeichnet sind, sind Zusatzaufgaben.)*

Aufgabe 9. (vgl. Bemerkung 1.3.2 (iii))
Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ für $i = 1, 2, 3$ messbare Räume und $T_i \colon \Omega_i \to \Omega_{i+1}$ für $i = 1, 2$ messbare Abbildungen. Zeigen Sie, dass $T_2 \circ T_1$ dann $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_3$-messbar ist. (2 Punkte)

Aufgabe 10. (Permutationen)
Sei $n \in \mathbb{N}$, $\Omega := \{\omega \colon \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\} \mid \omega \text{ bijektiv}\}$ und sei $P \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ die Gleichverteilung auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Sei eine Zufallsvariable $X \colon \Omega \to \{1, 2, \dots, n\}$ gegeben durch

$$\omega \mapsto X(\omega) := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{\omega(i)\}}(i) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Berechnen Sie (a) den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und (b) die Varianz $\mathrm{var}(X)$. (6 Punkte)

Aufgabe 11. (zur Wiederholung der Integral-Konstruktion)
Beweisen Sie folgenden Satz (schrittweise wie bei der Konstruktion des Integrals):

Satz 1. Sei X eine Zufallsvariable[1] auf $(S, \mathcal{S})$ mit $\mu(A) := P[X \in A]$, d.h. X ist eine messbare Abbildung $X \colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (S, \mathcal{S})$. Falls $f \colon (S, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine messbare Funktion ist mit $f \geqslant 0$ oder $\mathbb{E}[|f(X)|] < \infty$, dann gilt

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_S f(y)\mu(dy).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 12. (Faktorisierungslemma)
Sei Ω eine Menge und sei $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ ein messbarer Raum. Zudem seien $T \colon \Omega \to \tilde{\Omega}$ und $f \colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ **beliebige** Abbildungen. Zeigen Sie, dass f genau dann $\sigma(T)/\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar ist, wenn es eine Abbildung $\varphi \colon \tilde{\Omega} \to \bar{\mathbb{R}}$ gibt, die $\tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar ist mit $f = \varphi \circ T$. (4 Punkte)

[1] Hierbei soll der allgemeine Fall auf einem messbaren Raum $(S, \mathcal{S})$ betrachtet werden. Der Fall $S = \mathbb{R}$ kann als Beispiel angesehen werden.