Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 5
Abgabe: Freitag, 19.11.2021, 12:00 Uhr
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

(Aufgaben(teile), die mit einem "" gekennzeichnet sind, sind Zusatzaufgaben.)*

Aufgabe 17. (vgl. Bemerkung 1.8.9 (ii)) (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und I eine Indexmenge. Betrachten Sie $(X_i)_{i\in I}$ und $(Y_i)_{i\in I}$ zwei gleichmäßig integrierbare Familien von Zufallsvariablen. Zudem seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Linearkombination $(\alpha X_i + \beta Y_i)_{i\in I}$ gleichmäßig integrierbar ist.

Aufgabe 18. (vgl. Bemerkung 1.9.5) (4 Punkte)
Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende und beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass F höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat.

Aufgabe 19. (Random Walk) (2+2 Punkte)
Sei $\Omega = \{\omega = (x_1, \ldots, x_N) \mid x_i \in \{-1, 1\}\}$, P die Gleichverteilung auf Ω und $X_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Projektion $X_i(\omega) := x_i$ für $\omega = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega$. Die Summe

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad \text{für } n = 0, \ldots, N$$

kann als zufällige Bewegung eines Teilchens auf $\mathbb{Z}$ mit Start in 0 interpretiert werden, d.h. als ein sogenannter "random walk". Für $a \in \mathbb{Z}$ mit $a > 0$ sei T_a der Zeitpunkt des ersten Besuchs des Teilchens in a, d.h.

$$T_a := \min\{n > 0 \mid S_n = a\},$$

wobei für $\{n > 0 \mid S_n = a\} = \emptyset$ gerade $T_a = \infty$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $c > 0$ gilt:

$$P[S_n = a - c, T_a \leqslant n] = P[S_n = a + c].$$

(b) Für die Verteilung von T_a gelten:

(i) $P[T_a \leqslant n] = P[S_n \notin [-a, a-1]]$,

(ii) $P[T_a = n] = P[S_n = a] - P[S_n = a, T_a \leqslant n-1] = \frac{1}{2}\left(P[S_{n-1} = a-1] - P[S_{n-1} = a+1]\right)$.

Aufgabe 20. (vgl. Satz 1.9.9) (2+2 Punkte)
Sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative messbare Funktion und X, Y Zufallsvariablen mit Verteilungen μ, ν. X sei absolutstetig mit Dichte f und Y sei diskret verteilt mit $\nu(S) = 1$ für eine abzählbare Menge $S \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$,

(b) $\mathbb{E}[h(Y)] = \sum_{y\in S} h(y)\nu(\{y\})$.