WiSe 2021/22
Prof. Dr. Michael Röckner und Dr. Andre Schenke

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 6
Abgabe: Freitag, 26.11.2021, 12:00 Uhr
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

(Aufgaben(teile), die mit einem "" gekennzeichnet sind, sind Zusatzaufgaben.)*

Aufgabe 21. (Korollar 1.10.7, Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii)) (4 Punkte)
Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeitsmaße μ_n, μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere vag gegen μ. Zeigen Sie, dass dann auch $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen μ konvergiert.

Zeigen Sie dafür zunächst, dass für $f \in C_b(\mathbb{R})$, $f \geqslant 0$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \int f d\mu_n \geqslant \int f d\mu.$$

Aufgabe 22. (2+2 Punkte)
Seien X, X_n, U_n für $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$. Die Verteilung von X_n konvergiere schwach gegen die Verteilung von X für $n \to \infty$. Zudem konvergiere die Verteilung von U_n für $n \to \infty$ schwach gegen die Dirac-Verteilung δ_u für ein $u \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

(a) U_n konvergiert stochastisch gegen u für $n \to \infty$.

(b) Für $n \to \infty$ konvergiert die Verteilung der Summe $U_n + X_n$ schwach gegen die Verteilung von $u + X$.

Aufgabe 23. (2+2 Punkte)
Sei S_n für $n = 0, 1, 2, \ldots, 2N$ der "random walk" aus Aufgabe 19, wobei nun $2N$ statt N Schritte betrachtet werden. Es lassen sich die erste Rückkehrzeit nach 0 durch

$$T_0(\omega) := \min\{n > 0 \mid S_n(\omega) = 0\}$$

und der Zeitpunkt des letzten Besuches in 0 durch

$$L(\omega) := \max\{0 \leqslant n \leqslant 2N \mid S_n(\omega) = 0\}$$

definieren. Es darf verwendet werden, dass

$$P[L = 2n] = P[S_{2n} = 0] \cdot P[S_{2N-2n} = 0] = 2^{-2N} \binom{2n}{n} \binom{2(N-n)}{N-n}$$

gilt. Zeigen Sie:

(a) Für alle $0 < a < b < 1$ gilt[1]

$$P\left[\frac{L}{2N} \in]a,b]\right] \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} 1_{]a,b]}(x) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

(b) Folgern Sie aus (a), dass die Verteilung von $\frac{L}{2N}$ für $N \to \infty$ schwach gegen die Verteilung mit folgender Dichte konvergiert:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 24. (vgl. Satz 1.11.11) (2+2 Punkte)

Sei S ein metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{S}$. Nach Beispiel 1.11.13 wissen wir, dass diese mit $\sigma(C_b(S))$ übereinstimmt. Betrachten wir das Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(S, \mathcal{S})$ und $1 \leqslant p < \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass es für jede beschränkte Borel-messbare Funktion f auf S eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $C_b(S)$ gibt mit

$$\|g_n - f\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

wobei $\|h\|_p := \left(\int_S |h|^p d\mu\right)^{1/p}$.

(b) Zeigen Sie zudem, dass die gleiche Aussage sogar für $f \in \mathcal{L}^p$ gilt[2]. Was bedeutet dies?

[1] Hinweis: Nutzen Sie hierfür die **Stirling'sche Formel** (für einen Beweis dieser siehe z.B. Amann, Escher: Analysis II, 2. Auflage, Theorem 9.10, S. 112):

$$m! = C_m \cdot \sqrt{2\pi m} \cdot m^m \cdot e^{-m}, \quad \text{mit } \lim_{m\to\infty} C_m = 1.$$

[2] Sie dürfen die folgende Aussage (manchmal "**innere Regularität**" genannt) über Wahrscheinlichkeitsmaße auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{S}$ eines metrischen Raumes S nutzen: Für jedes $A \in \mathcal{S}$ gilt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset A,\ C \text{ abgeschlossen}\}.$$