

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 9

Abgabe: Freitag, 17.12.2021, 12:00 Uhr
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

(Aufgaben(teile), die mit einem “*” gekennzeichnet sind, sind Zusatzaufgaben.)

Aufgabe 33. (Bemerkung 2.5.6) (4 Punkte)
Beweisen Sie die Rückrichtung “ \Leftarrow ” der Bemerkung: Eine Kollektion X_1, \dots, X_n von Zufallsvariablen ist genau dann unabhängig, wenn gilt

$$\hat{P}_{(X_1, \dots, X_n)}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{j=1}^n \hat{P}_{X_j}(u_j). \quad (*)$$

Aufgabe 34. (ZGS für Beispiel 2.1.5) (4 Punkte)
Bestimmen Sie mit detaillierten Begründungen einen ungefähren Wert für die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 3600 Würfeln mit einem fairen (neuen) Würfel mindestens 630-mal die



würfelt. Entsprechende Tabellen für die Verteilungsfunktionen lassen sich im Internet finden.

Aufgabe 35. (Satz 2.6.8) (1 + 1,5 + 1,5 Punkte)
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit

$$P[X_k = k^\lambda] = P[X_k = -k^\lambda] = \frac{1}{2}.$$

Definiere

$$s_n := \left(\sum_{k=1}^n \text{var}(X_k) \right)^{1/2}.$$

Zeigen Sie, dass

- (a) Im Fall $\lambda < -\frac{1}{2}$: $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist.
- (b) Im Fall $\lambda \geq 0$ gilt, dass

$$s_n^2 \geq \int_0^n x^{2\lambda} dx \quad \text{und} \quad (X_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ hat die ZGE.}$$

- (c) Im Fall $\lambda \in [-\frac{1}{2}, 0]$ gilt, dass

$$s_n^2 \geq \int_1^{n+1} x^{2\lambda} dx \quad \text{und} \quad (X_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ hat die ZGE.}$$

Aufgabe 36. (Eigenschaften der Faltung)

(1+2+1 Punkte)

Seien $f \in C_0(\mathbb{R})$ und $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für die Faltung $f \star g$ die folgenden Eigenschaften gelten:

- (a) $f \star g$ hat einen kompakten Träger,
- (b) $f \star g$ ist differenzierbar mit $(f \star g)' = f \star (g')$,
- (c) $f \star g \in C_0^\infty$.

Aufgabe* 37. (Zusammenhang mit der klassischen Fouriertransformation)

(1+2 Punkte)

Die "klassische" Fouriertransformation für Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$ ist definiert durch

$$\hat{f}(u) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot u} f(x) dx.$$

Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mit $\mu \ll \lambda^n$ mit Dichte $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) Wie hängt die Fouriertransformation des Maßes μ mit der Fouriertransformation von f zusammen?

(b) Seien $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariablen mit absolutstetigen Verteilungen mit Dichten $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass dann für die Verteilung der Summe $X + Y$ gilt:

$$\hat{P}_{(X+Y)} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$