

# ÜBER DIE PFAFFSCHE DETERMINANTE

Bachelorarbeit

vorgelegt von  
Kristin Hohendorf

Fakultät für Mathematik  
Universität Bielefeld

Oktober 2007

## INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	1
1. Definition der Pfaffschen Determinante	3
2. weitere Definitionen von $\text{Pf}(A)$	10
3. Eigenschaften von $\text{Pf}(A)$	13
Literatur	18

EINLEITUNG

Die vorliegende Bachelorarbeit befasst sich mit einer Definition der Pfaffschen Determinante.

Die Determinante einer schiefsymmetrischen Matrix ist immer das Quadrat eines Polynoms der Matrixeinträge. Dieses Polynom ist gerade die Pfaffsche Determinante dieser Matrix.

Üblicherweise wird sie über diese Eigenschaft oder durch die Angabe eines expliziten Polynoms definiert (vgl. Kapitel 2 dieser Arbeit).

In dieser Arbeit wird für jeden Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  eine Abbildung

$$\phi: \Lambda^2 V \rightarrow (\Lambda^{2\bullet} V)^*$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= 1 + \omega \\ \phi(\omega + \omega') &= \phi(\omega) \cdot \phi(\omega') \end{aligned}$$

( $\omega, \omega' \in \Lambda^2 V$ ) definiert.

Dafür wird zunächst eine  $\mathbf{Z}$ -lineare alternierende Abbildung

$$\psi: V \times V \rightarrow \Lambda^2 V$$

definiert, aus der man mit Hilfe des Homomorphiesatzes und der universellen Eigenschaften von Tensorprodukt und äußerer Algebra die Abbildung  $\phi$  erhält.

Für Elemente  $\omega \in \Lambda^2 V$  wird die  $i$ -te dividierte Potenz von  $\omega$

$$\phi_i(\omega) \in \Lambda^{2i} V$$

über

$$\phi(\omega) =: \phi_0(\omega) + \phi_1(\omega) + \dots + \phi_n(\omega)$$

definiert.

Für  $\dim V = 2n$  erhält man aus der  $n$ -ten dividierten Potenz  $\phi_n$  die Pfaffsche Determinante einer schiefsymmetrischen Matrix  $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{2n}(K)$  durch

$$\text{Pf}(A) \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_{2n} = \phi_n(\omega)$$

wobei  $\omega = \sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ .

Die weiteren Kapitel dieser Arbeit befassen sich mit den gängigen Definitionen der Pfaffschen Determinante sowie ihren Eigenschaften.

Dabei wird unter anderem bewiesen, dass die über die Abbildung  $\phi$  definierte Pfaffsche Determinante mit

$$\text{Pf}(A) = \sum_{\sigma \in \Theta} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} \dots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

wobei

$$\Theta := \{ \sigma \in S_{2n} \mid \sigma(2i-1) < \sigma(2i), \sigma(2i-1) < \sigma(2i+1) \} \subset S_{2n}$$

übereinstimmt.

Außerdem wird gezeigt, dass im Fall  $\text{char } K = 0$  gilt:

$$\text{Pf}(A) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n} = \frac{\omega^n}{n!}$$

Nicht bewiesen wird dagegen die bereits erwähnte Beziehung

$$\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$$

wie sie in Artin [2, Kapitel 3.5] oder Knus [3, Kapitel 10] nachzulesen ist.

## 1. DEFINITION DER PFAFFSCHEN DETERMINANTE

Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum.  
Wir benutzen die äußere Algebra

$$\Lambda^\bullet V = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k V$$

und die gerade äußere Algebra

$$\Lambda^{2\bullet} V = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k} V.$$

**Bemerkung.** Man kann leicht nachrechnen, dass  $\Lambda^{2\bullet} V$  ein kommutativer Ring ist.

Im Folgenden betrachten wir die Untergruppe

$$A := 1 + (\Lambda^2 V \oplus \Lambda^4 V \oplus \dots) \subset (\Lambda^{2\bullet} V)^*$$

der multiplikativen Gruppe  $(\Lambda^{2\bullet} V)^*$ .

Elemente aus  $A$  sind von der Form

$$a = 1 + \omega_2 + \omega_4 + \dots$$

mit  $\omega_i \in \Lambda^i V$ .

**Bemerkung.** Da  $A$  eine abelsche Untergruppe von  $(\Lambda^{2\bullet} V)^*$  ist, folgt, dass  $A$  eine multiplikative abelsche Gruppe ist.

**Satz 1.1.** *Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung  $\phi: \Lambda^2 V \rightarrow A$ , für die gilt:*

$$(1) \quad \phi(v \wedge v') = 1 + v \wedge v'$$

$$(2) \quad \phi(\omega + \omega') = \phi(\omega) \cdot \phi(\omega')$$

mit  $v, v' \in V$  und  $\omega, \omega' \in \Lambda^2 V$ .

Zunächst einige Lemmas:

**Lemma 1.2.** *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \psi: V \times V &\rightarrow A \\ (v, w) &\mapsto 1 + v \wedge w \end{aligned}$$

*ist  $\mathbf{Z}$ -bilinear und alternierend.*

*Beweis.* Es gilt:

$$(i) \quad \psi(v, v) = 1 + v \wedge v = 1$$

Aus

$$\begin{aligned} (ii) \quad \psi(v, w) \cdot \psi(w, v) &= (1 + v \wedge w) \cdot (1 + w \wedge v) \\ &= 1 + v \wedge w + w \wedge v \\ &= 1 + v \wedge w - v \wedge w \\ &= 1 \end{aligned}$$

folgt:

$$\psi(w, v) = \psi(v, w)^{-1}$$

Damit ist gezeigt, dass die Abbildung alternierend ist.

Nun ist noch die Linearität zu zeigen:

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \psi(v + v', w) &= 1 + (v + v') \wedge w \\ &= 1 + v \wedge w + v' \wedge w \\ &= 1 + v \wedge w + v' \wedge w + v \wedge w \wedge v' \wedge w \\ &= (1 + v \wedge w) \cdot (1 + v' \wedge w) \\ &= \psi(v, w) \cdot \psi(v', w) \end{aligned}$$

Für  $v' = v$  ergibt sich per Induktion, dass für  $\lambda \in \mathbf{Z}$  gilt:

$$\psi(\lambda v, w) = \psi(v, w)^\lambda$$

Für  $v' = -v$  erhält man

$$\psi(-v, w) = \psi(v, w)^{-1}$$

Daraus folgt:

$$\psi(v - v', w) = \psi(v, w) \cdot \psi(v', w)^{-1}$$

Analog zeigt man die Linearität in der zweiten Komponente und damit, dass die Abbildung bilinear ist.  $\square$

**Lemma 1.3.** *Für  $K$ -Vektorräume  $V, W$  gilt*

$$V \otimes_K W = (V \otimes_{\mathbf{Z}} W) / U$$

mit

$$U = \langle \lambda v \otimes_{\mathbf{Z}} w - v \otimes_{\mathbf{Z}} \lambda w; \lambda \in K, v \in V, w \in W \rangle \subset V \otimes_{\mathbf{Z}} W$$

*Beweis.* Die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes von zwei  $R$ -Moduln  $A$  und  $B$  über  $R$

$$\begin{aligned} t: A \times B &\rightarrow A \otimes_R B \\ (a, b) &\mapsto a \otimes_R b \end{aligned}$$

besagt, dass es zu jedem  $R$ -Modul  $C$  und jeder  $R$ -bilinearen Abbildung  $f: A \times B \rightarrow C$  genau einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $\bar{f}$  mit  $f = \bar{f} \circ t$  gibt.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{t} & A \otimes_R B \\ f \downarrow & \swarrow \exists! \bar{f} & \\ C & & \end{array}$$

Nach dieser universellen Eigenschaft gibt es zu  $V \otimes_K W$ , aufgefasst als  $\mathbf{Z}$ -Modul, und

$$\begin{aligned} f: V \times W &\rightarrow V \otimes_K W \\ (v, w) &\mapsto v \otimes_K w \end{aligned}$$

eine eindeutig bestimmte  $\mathbf{Z}$ -lineare Abbildung  $\bar{f}$  mit  $f = \bar{f} \circ t$ .

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{t} & V \otimes_{\mathbf{Z}} W \\ f \downarrow & \swarrow \exists! \bar{f} & \\ V \otimes_K W & & \end{array}$$

Wegen  $\bar{f}(U) = 0$  gibt es nach dem Homomorphiesatz eine  $\mathbf{Z}$ -lineare Abbildung

$$\bar{\bar{f}}: (V \otimes_{\mathbf{Z}} W)/U \rightarrow V \otimes_K W$$

mit  $\bar{f} = \bar{\bar{f}} \circ p$ .

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_{\mathbf{Z}} W & \xrightarrow{p} & (V \otimes_{\mathbf{Z}} W)/U \\ \bar{f} \downarrow & \swarrow \exists! \bar{\bar{f}} & \\ V \otimes_K W & & \end{array}$$

$V \otimes_{\mathbf{Z}} W$  ist  $K$ -Vektorraum auf zwei Weisen, nämlich vermöge der  $K$ -Vektorraumstruktur auf  $V$

$$(\lambda, v \otimes_{\mathbf{Z}} w) \mapsto \lambda v \otimes_{\mathbf{Z}} w =: \lambda \cdot (v \otimes_{\mathbf{Z}} w)$$

und vermöge der  $K$ -Vektorraumstruktur auf  $W$

$$(\lambda, v \otimes_{\mathbf{Z}} w) \mapsto v \otimes_{\mathbf{Z}} \lambda w =: (v \otimes_{\mathbf{Z}} w) \cdot \lambda$$

Die Untergruppe  $U \subset V \otimes_{\mathbf{Z}} W$  ist  $K$ -Untervektorraum bezüglich beider Vektorraumstrukturen, denn es gilt:

$$\mu \cdot (\lambda v \otimes_{\mathbf{Z}} w - v \otimes_{\mathbf{Z}} \lambda w) = \lambda(\mu v) \otimes_{\mathbf{Z}} w - (\mu v) \otimes_{\mathbf{Z}} \lambda w \in U$$

$$(\lambda v \otimes_{\mathbf{Z}} w - v \otimes_{\mathbf{Z}} \lambda w) \cdot \mu = \lambda v \otimes_{\mathbf{Z}} (\mu w) - v \otimes_{\mathbf{Z}} \lambda(\mu w) \in U$$

Also erbt  $(V \otimes_{\mathbf{Z}} W)/U$  beide Vektorraumstrukturen:

$$\lambda \cdot (v \otimes_{\mathbf{Z}} w + U) = \lambda v \otimes w + U$$

$$(v \otimes_{\mathbf{Z}} w + U) \cdot \lambda = v \otimes \lambda w + U$$

Nach Definition von  $U$  stimmen diese beiden überein.

Also ist

$$\begin{aligned} g: V \times W &\rightarrow (V \otimes_{\mathbf{Z}} W)/U \\ (v, w) &\mapsto v \otimes_{\mathbf{Z}} w + U \end{aligned}$$

eine  $K$ -bilineare Abbildung zwischen zwei  $K$ -Vektorräumen.

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes gibt es dann eine eindeutig bestimmte  $K$ -lineare Abbildung

$$\bar{g}: V \otimes_K W \rightarrow (V \otimes_{\mathbf{Z}} W)/U$$

mit  $g = \bar{g} \circ t$ .

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{t} & V \otimes_K W \\ g \downarrow & \swarrow \exists! \bar{g} & \\ (V \otimes_{\mathbf{Z}} W)/U & & \end{array}$$

Offensichtlich sind die Homomorphismen

$$\bar{f}: (V \otimes_{\mathbf{Z}} W)/U \rightarrow V \otimes_K W$$

und

$$\bar{g}: V \otimes_K W \rightarrow (V \otimes_{\mathbf{Z}} W)/U$$

invers.

Also gilt:

$$V \otimes_K W = (V \otimes_{\mathbf{Z}} W)/U$$

□

**Lemma 1.4.** *Es gilt*

$$\Lambda_K^2 V = \Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V/U'$$

mit

$$U' = \langle \lambda v \wedge w - v \wedge \lambda w, \lambda v \wedge v; \lambda \in K; v, w \in V \rangle \subset \Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V$$

*Beweis.* Nach Lemma 1.3 (mit  $V = W$ ) ist die Abbildung

$$\bar{f}: V \otimes_{\mathbf{Z}} V \rightarrow V \otimes_K V$$

$\mathbf{Z}$ -linear und die Abbildung

$$\bar{g}: V \otimes_K V \rightarrow (V \otimes_{\mathbf{Z}} V)/U$$

ein Isomorphismus.

Es sei

$$U'' := U + \langle \lambda v \otimes_{\mathbf{Z}} v; \lambda \in K, v \in V \rangle$$

Wegen  $\bar{f}(\langle v \otimes_K v \rangle) = 0$  ist die Projektion

$$\bar{g}: V \otimes_K V \rightarrow (V \otimes_{\mathbf{Z}} V)/U''$$

alternierend.

Nach der universellen Eigenschaft der äußeren Algebra gibt es zu  $\bar{g}$  eine eindeutig bestimmte  $K$ -lineare Abbildung

$$\tilde{g}: \Lambda_K^2 V \rightarrow (V \otimes_{\mathbf{Z}} V)/U''$$

mit  $\bar{g} = \tilde{g} \circ \iota$ .

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_K V & \xrightarrow{\iota_K} & \Lambda_K^2 V \\ \bar{g} \downarrow & \swarrow \exists! \tilde{g} & \\ (V \otimes_{\mathbf{Z}} V)/U'' & & \end{array}$$

Wegen  $\Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V = V \otimes_{\mathbf{Z}} V / \langle v \otimes_{\mathbf{Z}} v; v \in V \rangle$  gilt:

$$(V \otimes_{\mathbf{Z}} V)/U'' = \Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V/U'$$

Also haben wir eine  $K$ -lineare Abbildung  $\tilde{g}: \Lambda_K^2 V \rightarrow \Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V/U'$

In die andere Richtung betrachten wir die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} h: \Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V &\rightarrow \Lambda_K^2 V \\ v \wedge_{\mathbf{Z}} w &\mapsto v \wedge_K w \end{aligned}$$

Wegen  $h(U') = 0$ , gibt es nach dem Homomorphiesatz eine  $\mathbf{Z}$ -lineare Abbildung

$$\bar{h}: \Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V/U' \rightarrow \Lambda_K^2 V$$

mit  $h = \bar{h} \circ p$ .

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V & \xrightarrow{p} & (\Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V)/U' \\ h \downarrow & \swarrow \exists \bar{h} & \\ \Lambda_K^2 V & & \end{array}$$

Offensichtlich sind

$$\tilde{g}: \Lambda_K^2 V \rightarrow \Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V/U'$$

und

$$\bar{h}: \Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V/U' \rightarrow \Lambda_K^2 V$$

invers.

Also gilt:

$$\Lambda_K^2 V = \Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V/U'$$

□

*Beweis des Satzes.* Das zweifache äußere Produkt  $\Lambda^2$  von abelschen Gruppen hat folgende universelle Eigenschaft:

Es sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Für jede abelsche Gruppe  $G$  und jede alternierende  $R$ -bilineare Abbildung  $k: M \times M \rightarrow G$  gibt es genau einen Homomorphismus

$$\bar{k}: \Lambda_R^2 M \rightarrow G$$

mit  $k = \bar{k} \circ \iota$ , wobei  $\iota: M \times M \rightarrow \Lambda_R^2 M$  die kanonische Abbildung mit  $\iota(m, n) = m \wedge n$  ist.

Als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{\iota} & \Lambda_R^2 M \\ k \downarrow & \swarrow \exists! \bar{k} & \\ G & & \end{array}$$

In Lemma 1.2 wurde gezeigt, dass die Abbildung  $\psi: V \times V \rightarrow A$  alternierend und  $\mathbf{Z}$ -linear ist. Also gibt es nach dieser universellen Eigenschaft zu  $\psi$  und  $A$  einen eindeutig bestimmten Homomorphismus

$$\phi_{\mathbf{Z}}: \Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V \rightarrow A$$

mit  $\psi = \phi_{\mathbf{Z}} \circ \iota$ .

Als Diagramm dargestellt:

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{\iota} & \Lambda_{\mathbf{Z}}^2 V \\ \phi \downarrow & \swarrow \exists! \phi_{\mathbf{Z}} & \\ A & & \end{array}$$

Nach dem Homomorphiesatz gibt es zu

$$\phi_{\mathbf{z}}: \Lambda_{\mathbf{z}}^2 V \rightarrow A$$

und

$$U' = \langle \lambda v \wedge w - v \wedge \lambda w, \lambda v \wedge v; \lambda \in K; v, w \in V \rangle \subset \ker \phi_{\mathbf{z}}$$

eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\phi: \Lambda_{\mathbf{z}}^2 V / U' \rightarrow A$$

mit  $\phi_{\mathbf{z}} = \phi \circ p$ . Dabei ist  $p: \Lambda_{\mathbf{z}}^2 V \rightarrow \Lambda_{\mathbf{z}}^2 V / U'$  die kanonische Abbildung mit  $p(v \wedge w) = v \wedge w \bmod U'$ .

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\mathbf{z}}^2 V & \xrightarrow{p} & \Lambda_{\mathbf{z}}^2 V / U' \\ \phi_{\mathbf{z}} \downarrow & \swarrow \exists! \phi & \\ A & & \end{array}$$

Nach Lemma 1.4 gilt

$$\Lambda_K^2 V = \Lambda_{\mathbf{z}}^2 V / U'$$

Also haben wir eine Abbildung

$$\phi: \Lambda_K^2 V \rightarrow A$$

Diese erhaltene Abbildung  $\phi$  ist linear, d.h. für  $\omega, \omega' \in \Lambda_K^2 V$  gilt

$$(1) \quad \phi(\omega + \omega') = \phi(\omega) + \phi(\omega')$$

Außerdem gilt  $\psi = \phi \circ p \circ \iota$ , d.h.

$$(2) \quad \phi(v \wedge w) = 1 + v \wedge w$$

Betrachte hierzu das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V \times V & & \\ \downarrow \iota & \searrow \psi & \\ \Lambda_{\mathbf{z}}^2 V & \xrightarrow{\phi_{\mathbf{z}}} & A \\ \downarrow p & \nearrow \phi & \\ \Lambda_K^2 V & & \end{array}$$

Damit ist  $\phi$  die gesuchte Abbildung. □

**Definition 1.** Ein Element  $\omega \in \Lambda^2 V$  heißt *primitiv*, falls  $\omega = v \wedge w$  für geeignete  $v, w \in V$  gilt.

**Bemerkung.** Jedes  $\omega \in \Lambda^2 V$  ist von der Form  $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m$  mit primitiven  $\omega_i$ .

**Definition 2.** Für  $\omega \in \Lambda^2 V$  definieren wir die *i-te dividierte Potenz* von  $\omega$

$$\phi_i(\omega) \in \Lambda^{2i} V$$

über

$$\phi(\omega) =: \phi_0(\omega) + \phi_1(\omega) + \cdots + \phi_n(\omega)$$

**Lemma 1.5.** Für alle  $i \in \mathbf{N}$  gilt für die Abbildung

$$\phi_i: \Lambda^2 V \rightarrow \Lambda^{2i} V$$

die Regel:

$$\phi_i(\lambda\omega) = \lambda^i \phi_i(\omega)$$

mit  $\lambda \in K$  und  $\omega \in \Lambda^2 V$ .

*Beweis.* Es sei  $\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i$  mit primitiven  $\omega_i$ .

Dann gilt:

$$\sum_{i=0}^n \phi_i(\omega) = \phi(\omega) = \phi\left(\sum_{i=1}^m \omega_i\right) = \prod_{i=1}^m \phi(\omega_i) = \prod_{i=1}^m (1 + \omega_i)$$

Also ist  $\phi_k(\omega)$  ist die elementarsymmetrische Funktion

$$\phi_k(\omega) = \sigma_k(\omega_1, \dots, \omega_m) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k}$$

Da  $\sigma_k$  homogen vom Grad  $k$  ist, ist auch  $\phi_k$  homogen vom Grad  $k$ .

Das heißt:

$$\phi_k(\lambda\omega) = \lambda^k \phi_k(\omega)$$

□

**Definition 3.**  $K$  sei ein Körper mit  $\text{char } K \neq 2$  und  $V = \langle e_1, \dots, e_{2n} \rangle$  der  $2n$ -dimensionale  $K$ -Vektorraum mit Basis  $e_1, \dots, e_{2n}$ .

Für eine schiefsymmetrische Matrix  $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{2n}(K)$  definieren wir die

*Pfaffsche Determinante von A*

$\text{Pf}(A) \in K$  folgendermaßen:

$$\text{Pf}(A)e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n} := \phi_n\left(\sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j\right)$$

**Bemerkung.** Diese Definition gilt auch für  $\text{char } K = 2$ .

In diesem Fall betrachtet man Matrizen der Form  $A = B - B^t$ . Siehe hierzu auch Knus et. al. [4, Seite 19].

2. WEITERE DEFINITIONEN VON  $\text{Pf}(A)$ 

In der Literatur gibt es verschiedene Beschreibungen der Pfaffschen Determinante. Hier werden drei davon dargelegt und zum Teil die Übereinstimmung mit der im vorherigen Kapitel über die Abbildung  $\phi$  definierten Pfaffschen Determinante gezeigt.

Zur ersten Definition:

**Satz 2.1.** *Für eine schiefsymmetrische Matrix  $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{2n}(K)$  gilt:*

$$\text{Pf}(A) = \sum_{\sigma \in \Theta} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

wobei

$$\Theta := \{ \sigma \in S_{2n} \mid \sigma(2i-1) < \sigma(2i), \sigma(2i-1) < \sigma(2i+1) \} \subset S_{2n}$$

*Beweis.*

$$\phi\left(\sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j\right) = \prod_{i < j} (1 + a_{ij} e_i \wedge e_j) = \prod_{i=1}^{2n-1} \prod_{j=i+1}^{2n} (1 + a_{ij} e_i \wedge e_j)$$

Die  $\Lambda^{2n}V$ -Komponente  $\phi_n\left(\sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j\right)$  hiervon ist die Summe der Permutationen  $(e_{i_1} \wedge e_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (e_{i_n} \wedge e_{j_n})$  mit jeweiligem Skalar  $a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n}$ , für die gilt:

- (i)  $|\{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n\}| = 2n$
- (ii)  $i_k < j_k$
- (iii)  $i_k < i_{k+1}$

Dabei gilt (i) wegen  $e_k \wedge e_k = 0$  und (ii) nach Voraussetzung. Zwar ist  $\Lambda^{2n}V$  kommutativ, um aber keinen Faktor  $(a_{ij} e_i \wedge e_j)$  doppelt zu betrachten, muss die Reihenfolge der Multiplikation beachtet werden und (iii) gelten.

Also:

$$\begin{aligned} \phi_n\left(\sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j\right) &= \sum_{\substack{|\{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n\}|=2n \\ i_k < j_k, i_k < i_{k+1}}} (a_{i_1 j_1} e_{i_1} \wedge e_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (a_{i_n j_n} e_{i_n} \wedge e_{j_n}) \\ &= \sum_{\substack{|\{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n\}|=2n \\ i_k < j_k, i_k < i_{k+1}}} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n} (e_{i_1} \wedge e_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (e_{i_n} \wedge e_{j_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \Theta} a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)} e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(2n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \Theta} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)} e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n} \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\text{Pf}(A) = \sum_{\sigma \in \Theta} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

□

**Bemerkung.** Es ist leicht zu sehen, dass diese Beschreibung der Pfaffschen Determinante mit der von Bourbaki [1, Kapitel 5.2, Gleichung (5)]

$$P((X_{hk})) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \epsilon(S) \left( \prod_{(h,k) \in S} X_{hk} \right)$$

übereinstimmt.

Eine weitere Definition ist die folgende:

**Satz 2.2.** *Im Fall  $\text{char } K = 0$  gilt für eine schiefsymmetrische Matrix  $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{2n}(K)$  und  $\omega = \sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ :*

$$\text{Pf}(A) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n} = \frac{\omega^n}{n!}$$

**Lemma 2.3.** *Ist  $\text{char } K = 0$ , dann gilt für  $\omega \in \Lambda_K^2 V$ :*

$$\phi(\omega) = \sum_{k \geq 0} \frac{\omega^k}{k!}$$

*Beweis.* Die rechte Seite der Gleichung entspricht der Exponentialreihe

$$\exp(\omega) = \sum_{k \geq 0} \frac{\omega^k}{k!}$$

Für  $\omega, \omega' \in \Lambda_K^2 V$  gilt:

$$\exp(\omega + \omega') = \exp(\omega) \cdot \exp(\omega')$$

denn:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \frac{(s+t)^k}{k!} &= \sum_{k \geq 0} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{s^l \cdot t^{k-l}}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l! \cdot (k-l)!} \cdot \frac{s^l \cdot t^{k-l}}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{l=0}^k \frac{s^l}{l!} \cdot \frac{t^{k-l}}{(k-l)!} \\ &= \sum_{l \geq 0} \frac{s^l}{l!} \cdot \sum_{h \geq 0} \frac{t^h}{h!} \end{aligned}$$

*Bemerkung:* Hier wurde lediglich die Multiplikativität der Exponentialfunktion in ihrer Reihendarstellung gezeigt.

Wegen der Multiplikatitivität reicht es aus, die Behauptung für primitive Elemente  $\omega = v \wedge v'$  zu zeigen:

Wegen  $\omega^2 = 0$  gilt:

$$\phi(\omega) = 1 + \omega = 0! + \frac{\omega}{1!} = \sum_{k \geq 0} \frac{\omega^k}{k!}$$

□

*Beweis des Satzes.* Aus Lemma 2.3 und der Definition von  $\phi_k$  folgt:

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\omega^k}{k!} = \phi(\omega) = \sum_{k \geq 0} \phi_k(\omega)$$

Also gilt:

$$\phi_n(\omega) = \frac{\omega^n}{n!}$$

beziehungsweise

$$\text{Pf}(A) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n} = \frac{\omega^n}{n!}$$

□

**Bemerkung.** Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung

$$\Lambda^m u = m! P((\alpha_{hk})) \cdot e$$

von Bourbaki [1, Kapitel 5.2, Gleichung (6)] überein.

Drittens:

**Satz 2.4.** *Für eine schiefsymmetrische Matrix  $A \in M_{2n}(K)$  gilt:*

$$\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$$

**Bemerkung.** Mit dieser Eigenschaft kann die Pfaffsche Determinante auch direkt definiert werden, siehe Artin [2, Kapitel 3.5, Satz 3.27], Knus [3, Kapitel 10] oder Knus et. al. [4, Seite 19].

*Beweis.* Dieser Satz wird hier nicht bewiesen.

Er kann aber in Bourbaki [1, Kapitel 5.2, Satz 2] nachgelesen werden.

□

3. EIGENSCHAFTEN VON  $\text{Pf}(A)$

Ähnlich wie die Determinante hat auch die Pfaffsche Determinante einige Eigenschaften, die es erleichtern mit ihr umzugehen. Die meisten dieser Eigenschaften folgen auch aus der Verbindung der Pfaffschen Determinante zur Determinante:  $\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$ .

**Satz 3.1.** Für  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  gilt  $\text{Pf}(A) = 1$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \phi\left(\sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j\right) \\ &= \phi(a_{12} \cdot e_1 \wedge e_2) \\ &= \phi(1 \cdot e_1 \wedge e_2) \\ &= 1 + 1 \cdot e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

Nach Definition gilt

$$\text{Pf}(A) \cdot e_1 \wedge e_2 = \phi_1(\omega) = 1 \cdot e_1 \wedge e_2$$

Also gilt  $\text{Pf}(A) = 1$ . □

**Satz 3.2.** Für eine Matrix  $B \in M_{2n}(K)$  und eine schiefsymmetrische Matrix  $A \in M_{2n}(K)$  gilt:

$$\text{Pf}(B^t A B) = \det(B) \cdot \text{Pf}(A)$$

**Lemma 3.3.**  $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$  und  $W = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$  seien  $K$ -Vektorräume.  $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(K)$  sei eine beliebige Matrix mit zugehöriger linearer Abbildung

$$\begin{aligned} a: V &\rightarrow W \\ e_i &\mapsto \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j \end{aligned}$$

und ihren höheren Potenzen

$$\begin{aligned} \Lambda^r a: \Lambda^r V &\rightarrow \Lambda^r W \\ (x_1, \dots, x_r) &\mapsto a(x_1) \wedge \dots \wedge a(x_r) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\Lambda^n a(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \det(A) f_1 \wedge \dots \wedge f_n$$

*Beweis.* Nach Leibniz gilt:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^n a(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) &= a(e_1) \wedge \cdots \wedge a(e_n) \\
&= \left( \sum_{j=1}^n a_{1j} f_j \right) \wedge \cdots \wedge \left( \sum_{j=1}^n a_{nj} f_j \right) \\
&= \sum_{\{|j_1 \dots j_n\}|=n} a_{1j_1} f_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{nj_n} f_{j_n} \\
&= \sum_{\{|j_1 \dots j_n\}|=n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} f_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge f_{\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \\
&= \det(A) f_1 \wedge \cdots \wedge f_n
\end{aligned}$$

□

**Lemma 3.4.** *V und W seien K-Vektorräume.*

*f: V → W sei eine lineare Abbildung.*

*Dann gilt für alle ω ∈ Λ²V:*

$$\phi(\Lambda^2 f(\omega)) = \Lambda^{2\bullet} f(\phi(\omega))$$

*Das heißt, das folgende Diagramm ist kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda^2 V & \xrightarrow{\phi} & \Lambda^{2\bullet} V \\
\Lambda^2 f \downarrow & & \downarrow \Lambda^{2\bullet} f \\
\Lambda^2 W & \xrightarrow{\phi} & \Lambda^{2\bullet} W
\end{array}$$

*Beweis.* Wegen der Multiplikativität von  $\phi$  reicht es aus die Behauptung für primitive Elemente  $\omega = v \wedge w$  mit  $v, w \in V$  zu zeigen.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\phi(\Lambda^2 f(v \wedge w)) &= \phi(f(v) \wedge f(w)) \\
&= 1 + f(v) \wedge f(w)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Lambda^{2\bullet} f(\phi(v \wedge w)) &= \Lambda^{2\bullet} f(1 + v \wedge w) \\
&= \Lambda^0 f(1) + \Lambda^2 f(v \wedge w) \\
&= 1 + f(v) \wedge f(w)
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

**Bemerkung.** Insbesondere gilt für alle Elemente  $\omega \in \Lambda^2 V$ :

$$\phi_i(\Lambda^2 f(\omega)) = \Lambda^{2i} f(\phi_i(\omega))$$

*Beweis des Satzes.* Es sei  $V = K^{2n} = \langle e_1, \dots, e_{2n} \rangle$ .

$B = (b_{ij})_{ij} \in M_{2n}(K)$  sei die darstellende Matrix einer linearen Abbildung  $f: V \rightarrow V$ .

Es sei  $\omega(A) := \sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \Lambda^2 f(\omega(A)) &= \Lambda^2 f\left(\sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j\right) \\
 &= \sum_{i < j} a_{ij} f(e_i) \wedge f(e_j) \\
 &= \sum_{i < j} \sum_{s, t} a_{ij} b_{is} e_s \wedge b_{jt} e_t \\
 &= \sum_{i < j} \sum_{s, t} a_{ij} b_{is} b_{jt} e_s \wedge e_t \\
 (*) &= \sum_{i < j} \sum_{s < t} a_{ij} (b_{is} b_{jt} - b_{it} b_{js}) e_s \wedge e_t \\
 &= \sum_{i < j} \sum_{s < t} a_{ij} (b_{is} b_{jt} - b_{js} b_{it}) e_s \wedge e_t \\
 (**) &= \sum_{i, j} \sum_{s < t} a_{ij} b_{is} b_{jt} e_s \wedge e_t \\
 &= \sum_{s < t} (B^t A B)_{st} e_s \wedge e_t \\
 &= \omega(B^t A B)
 \end{aligned}$$

Dabei gilt (\*) wegen  $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$  und  $e_i \wedge e_i = 0$  und (\*\*) gilt wegen  $a_{ij} = -a_{ji}$  und  $a_{ii} = 0$ .

Nach Lemma 3.4 gilt:

$$\phi_n(\Lambda^2 f(\omega(A))) = \Lambda^{2n} f(\phi_n(\omega(A)))$$

Dabei ist

$$\phi_n(\Lambda^2 f(\omega(A))) = \phi_n(\omega(B^t A B))$$

und nach Lemma 3.3 ist

$$\Lambda^{2n} f(e_1 \wedge \dots \wedge e_{2n}) = \det(B) e_1 \wedge \dots \wedge e_{2n}$$

Also gilt:

$$\phi_n(\omega(B^t A B)) = \det(B) \phi_n(\omega(A))$$

beziehungsweise

$$\text{Pf}(B^t A B) = \det(B) \text{Pf}(A)$$

□

Im Folgenden sei  $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{2n}(K)$  eine schiefsymmetrische Matrix und  $\omega$  sei definiert durch  $\omega := \sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ .

**Satz 3.5.** Für ein Skalar  $\lambda \in K$  gilt:

$$\text{Pf}(\lambda A) = \lambda^n \cdot \text{Pf}(A)$$

*Beweis.* Diese Eigenschaft folgt daraus, dass die Abbildung  $\phi_n$  homogen ist vom Grad  $n$ .

Nach Lemma 1.3 gilt für  $\omega \in \Lambda^2 V$ :

$$\phi_n(\lambda\omega) = \lambda^n \phi(\omega)$$

Nach Definition gilt dann

$$\begin{aligned} \text{Pf}(\lambda A)e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n} &= \phi_n(\lambda\omega) \\ &= \lambda^n \phi_n(\omega) \\ &= \lambda^n \text{Pf}(A)e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\text{Pf}(\lambda A) = \lambda^n \cdot \text{Pf}(A)$$

□

**Satz 3.6.** Es gilt:

$$\text{Pf}(A^t) = (-1)^n \cdot \text{Pf}(A)$$

*Beweis.* Da  $A$  schiefssymmetrisch ist gilt:

$$\text{Pf}(A^t) = \text{Pf}(-A).$$

Nach Satz 3.5 gilt dann:

$$\begin{aligned} \text{Pf}(A^t) &= \text{Pf}(-A) \\ &= (-1)^n \cdot \text{Pf}(A) \end{aligned}$$

□

**Satz 3.7.** Für zwei schiefssymmetrische Matrizen  $A_1 \in M_{2n}(K)$  und  $A_2 \in M_{2m}(K)$  gilt:

$$\text{Pf}(A_1 \oplus A_2) = \text{Pf}\left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\right) = \text{Pf}(A_1) \cdot \text{Pf}(A_2)$$

*Beweis.* Diese Eigenschaft folgt aus der Multiplikativität von  $\phi$ .

Nach Satz 1.1 gilt für  $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2 V$ :

$$\phi(\omega_1 + \omega_2) = \phi(\omega_1) \cdot \phi(\omega_2)$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \text{Pf}(A_1 \oplus A_2)e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n+2m} &= \phi_{n+m}(\omega_1 + \omega_2) \\ &= \phi_n(\omega_1) \cdot \phi_m(\omega_2) \\ &= \text{Pf}(A_1)e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n} \cdot \\ &\quad \text{Pf}(A_2)e_{2n+1} \wedge \cdots \wedge e_{2n+2m} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\text{Pf}(A_1 \oplus A_2) = \text{Pf}(A_1) \cdot \text{Pf}(A_2)$$

□



## LITERATUR

- [1] N. Bourbaki, *Algèbre (Chapitre 9: Formes sesquilineaires et formes quadratiques)*, Hermann, Paris, 1959
- [2] E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, New York (u.a.), 1957
- [3] M.A. Knus, *Quadratic forms, Clifford algebras and spinors*, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, 1988
- [4] M.A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J.P. Tignol, *The book of involutions*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998