DIE MULTIPLIKATIVE QUADRATISCHE NORM FÜR DEN GROTHENDIECK-WITT-RING

DIPLOMARBEIT
VON
TOBIAS WITTKOP

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT BIELEFELD
SEPTEMBER 2006

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Arbeit ist in das Themengebiet der Theorie von symmetrischen Bilinearformen einzuordnen. Betrachtet man reguläre symmetrische Bilinearformen über einem Körper F, so bilden ihre Isometrieklassen mit einer Multiplikation, dem Tensorprodukt, und einer Addition, der orthogonalen Summe, einen Semiring $\widehat{W}^+(F)$. Nach einer bekannten Konstruktion von A. Grothendieck kann ein Semiring zu einem Ring komplettiert werden mit der universellen Eigenschaft, dass jeder Semiring-Homomorphismus in einen Ring eindeutig fortgesetzt wird zu einem Ring-Homomorphismus. Den so konstruierten Ring bezeichnet man als Grothendieck-Ring, und im speziellen Fall der Isometrieklassen von symmetrischen Bilinearformen als Grothendieck-Witt-Ring $\widehat{W}(F)$. Der Quotientenring von $\widehat{W}(F)$ modulo dem Ideal $\mathbf{H}(F)$ der hyperbolischen Formen wird als Witt-Ring $W(F)$ bezeichnet.

In "Quadratic and Hermitian forms"[1] untersuchte W. Scharlau den Zusammenhang zwischen dem Grothendieck-Witt-Ring $\widehat{W}(L)$ eines Erweiterungskörpers L und dem Grothendieck-Witt-Ring $\widehat{W}(F)$ des Grundkörpers F. Er gibt einen additiven Transfer

$$\mathcal{T}_{L/F}\colon \widehat{W}(L) \to \widehat{W}(F),$$

den Scharlau-Transfer an. Umgekehrt existiert eine Restriktion $\mathrm{res}_{L/F}$ von $\widehat{W}(F)$ in $\widehat{W}(L)$.

$$\mathrm{res}_{L/F}\colon \widehat{W}(F) \to \widehat{W}(L),$$

welche zusammen mit dem Scharlau-Transfer der Projektionsformel

$$\mathcal{T}_{L/F}(\mathrm{res}_{L/F}(x)) = \mathcal{T}_{L/F}(1)x, \quad x \in \widehat{W}(F)$$

genügt.

An diesem Punkt setzt ein Projekt von M. Rost ein, welches den multiplikativen Transfer, die Norm $\mathcal{N}_{L/F}$, untersucht. Daraus resultierende Ergebnisse (siehe [5]) wurden von S. Garibaldi, A. Merkurjev und J.-P. Serre in 'Cohomological Invariants in Galois Cohomology' erwähnt (vergleiche [9, Seite 71, Remark 29.5]). Im Rahmen des Projektes entstanden mehrere Diplomarbeiten. Während die Diplomarbeit von S. Krsnik den technisch aufwändigen Fall der Existenz einer solchen Abbildung für beliebige separable Körpererweiterungen als Schwerpunkt hat, befasst sich diese Arbeit mit dem konkreten Fall von Körpererweiterungen vom Grad 2. Für diesen Fall wird die Existenz des multiplikativen Transfers gezeigt und weitere grundlegende Eigenschaften untersucht. Ferner werden für interessante Elemente aus $\widehat{W}(L)$, wie hyperbolische Formen, so wie Pfisterformen die Bilder unter der Normabbildung $\mathcal{N}_{L/F}$ konkret berechnet. Im Gegensatz zum Scharlau-Transfer lässt sich die Norm nicht auf den Witt-Ring fortsetzen, da die Bilder von hyperbolischen Formen nicht hyperbolisch sind.

Dabei wird wie folgt vorgegangen.

Das erste Kapitel dient der Vorbereitung. Zunächst wird die Norm und Spur von L-Moduln definiert, die zur Herleitung der Norm von symmetrischen Bilinearformen benötigt wird. Im Folgenden wird die Grothendieck-Vervollständigung für Semiringe eingeführt und speziell der Grothendieck-Witt-Ring untersucht. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels beschäftigt sich mit äußeren Potenzen von symmetrischen Bilinearformen und ihrer Fortsetzung auf den Grothendieck-Witt-Ring mit Hilfe von formalen Potenzreihen so wie Rechenregeln für diese.

Die in Abschnitt 1.2 eingeführte Norm von regulären symmetrischen Bilinearformen wird auf Grundlage der Ergebnisse aus Abschnitt 1.3 eindeutig auf den Grothendieck-Witt-Ring zu dem gewünschten multiplikativen Transfer fortgesetzt. Des Weiteren werden die Eigenschaften der Norm formuliert und bewiesen. In Abschnitt 2.3 wird die Norm von hyperbolischen Formen und Pfisterformen berechnet. Als abschließendes Ergebnis erhält man dadurch, dass sich die Norm nicht auf den Witt-Ring definieren lässt.

Im letzten Kapitel, dem Anhang, werden der Beweis der Grothendieck-Vervollständigung und einige längere Nebenrechnungen aufgeführt.

Ich möchte mich an dieser Stelle noch bei meinem Betreuer Prof. Dr. Markus Rost bedanken für die Zeit und Geduld die er aufgebracht hat um mich bei der Erstellung dieser Arbeit zu unterstützen.

1. Vorbereitung

Sei im Weiteren F ein Körper mit $\mathrm{char}(F) \neq 2$ und L eine quadratische Körpererweiterung, die wir meistens in der Form $L = F[\alpha]/(\alpha^2 - a)$ mit $a \in F^*$ schreiben.

1.1. **Grundlegende Definitionen.** Sei in diesem Abschnitt V ein beliebiger endlich dimensionaler F-Modul.

Definition 1.1. *Eine symmetrische Bilinearform ist eine Abbildung $b\colon V \times V \to F$, so dass für alle $v, v', w \in V$, $\lambda \in F$ gilt:*

(i) $b(v, w) = b(w, v)$

(ii) $b(v + v', w) = b(v, w) + b(v', w)$

(iii) $b(\lambda v, w) = \lambda b(v, w) = b(v, \lambda w)$

Das Paar (V, b) wird als symmetrischer Bilinearraum bezeichnet.

Definition 1.2. *Eine quadratische Form ist eine Abbildung $q\colon V \to F$, so dass für alle $v, w \in V$, $\lambda \in F$ gilt:*

(i) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ *und*

(ii) $b_q(v, w) := \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$ *ist eine symmetrische Bilinearform.*

Das Paar (V, q) wird als quadratischer Raum bezeichnet.

Definition 1.3. *Sei $b\colon V \times V \to F$ eine symmetrische Bilinearform, so heißt die quadratische Form $q_b\colon V \to F$, die definiert ist durch $q_b(v) := b(v, v)$, die zu b assoziierte quadratische Form.*

Sei V ein F-Modul und $q\colon V \to F$ eine quadratische Form, so heißt die symmetrische Bilinearform $b_q\colon V \times V \to F$, die definiert ist durch $b_q(v, w) := \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$, die zu q assoziierte Bilinearform.

Bemerkung 1.4. *Es ist leicht nachzurechnen, dass $b_{q_b} = b$ und $q_{b_q} = q$ gilt. Das heißt, man kann quadratische Formen mit symmetrischen Bilinearformen identifizieren.*

Definition 1.5. *Sei V ein F-Modul mit Basis $\varrho = \{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ und $b\colon V \times V \to F$ eine symmetrische Bilinearform. Die Matrix $B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ mit $b_{i,j} = b(e_i, e_j)$ heißt die zu b assoziierte Matrix bezüglich der Basis ϱ. Es gilt:*

$$b(v, w) = v^t B w, \quad v, w \in V$$

Sei $q\colon V \to F$ eine quadratische Form, so ist die assoziierte Matrix B_q von q bezüglich der Basis ϱ gerade die der assoziierten symmetrischen Bilinearform b_q. Es gilt:

$$q(v) = v^t B_q v, \quad v \in V$$

Definition 1.6. *Sei V ein F-Modul mit Basis ϱ und (V, b) ein symmetrischer Bilinearraum. Die Determinante der zu (V, b) assoziierten Matrix B modulo Multiplikation mit ${F^*}^2$ wird als Determinante des*

Bilinearraums (V, b) *bezeichnet und mit* $\det((V, b))$ *oder kurz* $\det(b)$ *notiert.*

Definition 1.7. *Zwei Bilinearräume* (V, b) *und* (V', b') *mit Basis* ϱ *und* ϱ' *heißen isometrisch, wenn ihre assoziierten Matrizen* B, B' *(bezüglich* ϱ *und* ϱ'*) kongruent sind, d.h. wenn es eine invertierbare Matrix* T *gibt mit:*

$$T \cdot B \cdot T^t = B'$$

Bemerkung 1.8. *Es ist leicht zu überprüfen, dass für zwei isometrische Bilinearräume* (V, b) *und* (V', b') *gilt:*

$$\det(b) = \det(b')$$

Lemma 1.9. *Jede symmetrische Matrix* B *ist kongruent zu einer Diagonalmatrix.*

Beweis. Siehe hierzu [1]. □

Bemerkung 1.10. *Betrachtet man nur die Isometrieklassen von symmetrischen Bilinearformen (quadratischen Formen), so kann man jede Form* b *darstellen als Diagonalmatrix* B*. Wir schreiben:*

$$b = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \text{ für } B = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}$$

Definition 1.11. *Sei* $b \colon V \times V \to F$ *eine symmetrische Bilinearform, so heißt* b *regulär, falls gilt:*

$$V^{\perp_b} := \{ v \in V \mid b(u, v) = 0, \forall u \in V \} = \{0\}$$

Eine quadratische Form q *heißt regulär, falls die assoziierte Bilinearform* b_q *regulär ist.*

Bemerkung 1.12. *Eine symmetrische Bilinearform ist genau dann regulär, wenn für ihre Determinante gilt:*

$$\det(b) \neq 0$$

Beweis. Siehe hierzu [1, Seite 11]. □

Definition und Lemma 1.13. *Seien* V *und* W F*-Moduln. Seien weiterhin* $b \colon V \times V \to F$ *und* $b' \colon W \times W \to F$ *zwei symmetrische Bilinearformen, so gilt:*

(i) Es gibt genau eine symmetrische Bilinearform

$$b \otimes b' \colon (V \otimes W) \times (V \otimes W) \to F$$

mit der Eigenschaft:

$$((v \otimes w), (v' \otimes w')) \mapsto b(v, v') \cdot b'(w, w')$$

Sind b *und* b' *regulär, so ist es auch* $b \otimes b'$*.*

(ii) Es gibt genau eine symmetrische Bilinearform

$$b \perp b' \colon (V \oplus W) \times (V \oplus W) \to F$$

mit der Eigenschaft:

$$((v, w), (v', w')) \mapsto b(v, v') + b(w, w')$$

Sind b und b' regulär, so ist es auch $b \perp b'$.

Beweis. (i) Betrachte die 4-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \beta \colon V \times W \times V \times W &\to F \\ (v, w, v', w') &\mapsto b(v, v') \cdot b'(w, w'). \end{aligned}$$

Aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts erhält man die eindeutige lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi \colon V \otimes W \otimes V \otimes W &\to F \\ v \otimes w \otimes v' \otimes w' &\mapsto b(v, v') \cdot b'(w, w'). \end{aligned}$$

Zusammen mit der kanonischen bilinearen Abbildung

$$\begin{aligned} \beta' \colon (V \otimes W) \times (V \otimes W) &\to V \otimes W \otimes V \otimes W \\ ((v \otimes w), (v' \otimes w')) &\mapsto v \otimes w \otimes v' \otimes w' \end{aligned}$$

erhält man eine symmetrische Bilinearform auf $V \otimes W$. Siehe hierzu und zum Beweis der Regularität [7, Seite 9,10].

(ii) Man kann die erforderlichen Eigenschaften einfach nachrechnen. Siehe zum Beweis der Regularität [1]. □

Bemerkung 1.14. *Seien b, b' zwei symmetrische Bilinearformen und $B = (b_{ij})_{ij}, B'$ ihre assoziierten Matrizen.*

Für die assoziierte Matrix A der Bilinearform $b \otimes b'$ gilt:

$$A = B \otimes B' := \begin{pmatrix} b_{1,1}B' & \dots & b_{1,n}B' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1}B' & \dots & b_{n,n}B' \end{pmatrix}$$

Für die assoziierte Matrix A' der Bilinearform $b \perp b'$ gilt:

$$A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

Bemerkung 1.15. *Das Tensorprodukt zweier quadratischen Formen q, q' wird über das Tensorprodukt der assoziierten Bilinearformen definiert:*

$$b_{q \otimes q'} := b_q \otimes b_{q'}$$

Beispiel 1.16. *Die quadratische Form*

$$\langle\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle\rangle := \bigotimes_{i=1}^{n} \langle 1, -\alpha_i \rangle, \quad \alpha_i \in F^*$$

wird als n-fache Pfisterform bezeichnet.

1.2. **Die Norm von Moduln und symmetrischen Bilinearformen über quadratischen Körpererweiterungen.** Im Folgenden werden die Norm und die Spurabbildung definiert. Dies geschieht für die Spur analog zu der Definition aus [1].

Sei $L = F \oplus \alpha F$, $\alpha^2 = a \in F^*$ eine quadratische Körpererweiterung von F. Für ein Element $u = y + \alpha z \in L$ sei $\overline{u}$ definiert durch $\overline{u} = y - \alpha z$.

Betrachte den L-Modulendomorphismus der Linksmultiplikation mit einem Element $u = y + \alpha z \in L$.

$$\begin{aligned} \mu_u \colon L &\to L \\ l &\mapsto ul \end{aligned}$$

Dieser Endomorphismus hat zur Basis $(1, \alpha)$ die darstellende Matrix $\left(\begin{smallmatrix} y & az \\ z & y \end{smallmatrix}\right)$ und somit das charakteristische Polynom $x^2 - (u + \overline{u})x + u\overline{u}$.

Definition 1.17. *Die Spur $T_{L/F}(u)$ eines Elements $u \in L$ bezüglich der Körpererweiterung L/F ist die Spur des Endomorphismus μ_u, also $T_{L/F}(u) = u + \overline{u}$.*

Die Norm $N_{L/F}(u)$ eines Elements $u \in L$ bezüglich der Körpererweiterung L/F ist die Determinante des Endomorphismus μ_u, also $N_{L/F}(u) = u\overline{u}$.

Definition 1.18. *Seien V, W L-Moduln. Eine Abbildung*

$$f \colon V \to W$$

heißt L-semilinear (bezüglich $l \mapsto \overline{l}$, $l \in L$) falls für alle $v \in V$ und $l \in L$ gilt:

$$f(lv) = \overline{l} f(v)$$

Definition 1.19. *Sei V ein L-Modul. $\overline{V}$ ist der L-Modul definiert durch $\overline{V} = V$ als Menge, und der Skalarmultiplikation*

$$l \cdot v = \overline{l} v, \quad l \in L, v \in V.$$

Zur Verdeutlichung werden die Elemente aus $\overline{V}$ mit $\overline{v}$, $v \in V$ bezeichnet. Wir schreiben dann:

$$l\overline{v} = \overline{\overline{l}v}$$

Bemerkung 1.20. *Die L-semilinearen Abbildungen*

$$V \to W$$

sind gerade die L-linearen Abbildungen

$$V \to \overline{W}.$$

Lemma 1.21. *Sei V ein L-Modul. Dann gibt es genau eine L-semilineare Abbildung*

$$\tau \colon V \otimes_L \overline{V} \to V \otimes_L \overline{V}$$

mit

$$v \otimes \overline{w} \mapsto w \otimes \overline{v}.$$

Es gilt:

$$\tau \circ \tau = id$$

Beweis. Man betrachte, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon V \times \overline{V} &\to \overline{V \otimes_L \overline{V}} \\ (v, \overline{w}) &\mapsto \overline{w \otimes \overline{v}} \end{aligned}$$

L-bilinear ist und man somit durch die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts eine eindeutige L-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}\colon V \otimes_L \overline{V} &\to \overline{V \otimes_L \overline{V}} \\ v \otimes \overline{w} &\mapsto \overline{w \otimes \overline{v}} \end{aligned}$$

erhält. Nach Bemerkung 1.20 existiert also genau eine L-semilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \tau\colon V \otimes_L \overline{V} &\to V \otimes_L \overline{V} \\ v \otimes \overline{w} &\mapsto w \otimes \overline{v}. \end{aligned}$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass $\tau \circ \tau = id$ gilt. □

Definition 1.22. *Die Norm eines L-Moduls V wird definiert durch*

$$\mathcal{N}_{L/F}(V) = (V \otimes_L \overline{V})^\tau$$

wobei τ die L-semilineare Abbildung aus Lemma 1.21 ist. Es ist also der F-Modul der Invarianten von $V \otimes \overline{V}$ unter der Abbildung τ.

Beispiel 1.23. *Die Norm des L-Moduls L ist der F-Modul F:*

$$\mathcal{N}_{L/F}(L) = F$$

Beweis. Der F-Modul $(L \otimes \overline{L})^\tau$ wird offensichtlich von $1 \otimes 1$ erzeugt, und ist somit ein 1-dimensionaler F-Modul, also isomorph zu F. □

Lemma 1.24. *Sei V ein endlicher freier L-Modul mit Basis $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$, so bilden die Elemente*

$$\begin{aligned} f_i &:= e_i \otimes \overline{e_i} \in \mathcal{N}_{L/F}(V) && \textit{für } i = 1, \dots, n \\ g_{ij} &:= e_i \otimes \overline{e_j} + e_j \otimes \overline{e_i} \in \mathcal{N}_{L/F}(V) && \textit{für } 1 \le i < j \le n \\ h_{ij} &:= \alpha(e_i \otimes \overline{e_j} - e_j \otimes \overline{e_i}) \in \mathcal{N}_{L/F}(V) && \textit{für } 1 \le i < j \le n \end{aligned}$$

eine F-Basis des F-Moduls $\mathcal{N}_{L/F}(V)$ und eine L-Basis des L-Moduls $V \otimes \overline{V}$.

Beweis. Da $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ eine Basis von V ist, bilden die Elemente $\{e_i \otimes \overline{e_j}\}_{i,j=1,\dots,n}$ eine Basis des L-Moduls $V \otimes \overline{V}$. Diese Basiselemente lassen sich folgendermaßen durch die eben definierten Elemente f_i, g_{ij}, h_{ij} ausdrücken:

$$\begin{aligned} e_i \otimes \overline{e_i} &= f_i && \text{für } i = 1, \dots n \\ e_i \otimes \overline{e_j} &= \tfrac{1}{2}(g_{ij} + \alpha^{-1} h_{ij}) && \text{für } 1 \le i < j \le n \\ e_i \otimes \overline{e_j} &= \tfrac{1}{2}(g_{ji} - \alpha^{-1} h_{ji}) && \text{für } 1 \le j < i \le n \end{aligned}$$

Somit bilden die Elemente f_i, g_{ij}, h_{ij} eine L-Basis von $V \otimes \overline{V}$. Es ist leicht nachzurechnen, dass sie invariant unter der Abbildung τ sind.

Sei $x \in V \otimes \overline{V}$ mit

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mu_{ij} g_{ij} + \eta_{ij} h_{ij}), \quad \lambda_i, \mu_{ij}, \eta_{ij} \in L.$$

Gilt $\tau(x) = x$, so folgt aus der L-Semilinearität von τ:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} f_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\overline{\mu_{ij}} g_{ij} + \overline{\eta_{ij}} h_{ij})$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$\overline{\lambda_i} = \lambda_i, \ \overline{\mu_{ij}} = \mu_{ij} \text{ und } \overline{\eta_{ij}} = \eta_{ij}.$$

Da also gilt $\lambda_i, \mu_{ij}, \eta_{ij} \in F$, bilden die Elemente f_i, g_{ij}, h_{ij} eine Basis von $\mathcal{N}_{L/F}(V)$.

□

Bemerkung 1.25. *Im Weiteren schreiben wir:*

$$\mathcal{N}_{L/F}(v) := v \otimes \overline{v}$$

Lemma 1.26. *Sei V ein L-Modul. Die Elemente $\mathcal{N}_{L/F}(v)$, $v \in V$ erzeugen $\mathcal{N}_{L/F}(V)$.*

Beweis. Dies folgt aus den leicht nachzurechnenden Gleichungen

$$\begin{aligned} f_i &= \mathcal{N}_{L/F}(e_i) && \text{für } i = 1, \ldots, n \\ g_{ij} &= \mathcal{N}_{L/F}(e_i + e_j) - \mathcal{N}_{L/F}(e_i) - \mathcal{N}_{L/F}(e_j) && \text{für } 1 \leq i < j \leq n \\ h_{ij} &= \mathcal{N}_{L/F}(e_i + \alpha e_j) - \mathcal{N}_{L/F}(e_i) - a\mathcal{N}_{L/F}(e_j) && \text{für } 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

□

Definition 1.27. *Sei V ein L-Modul, so ist V auch ein F-Modul. Er wird auch die Spur des L-Moduls V genannt und mit $\mathcal{T}_{L/F}(V)$ bezeichnet. Es ist also $\mathcal{T}_{L/F}(V) = V$ als Menge, mit der Multiplikation $k \cdot v = kv$ für $k \in F$.*

Definition und Lemma 1.28. *Sei b eine symmetrische Bilinearform auf einem L-Modul V, dann gilt:*

(i) Die Abbildung

$$\overline{b} \colon \overline{V} \times \overline{V} \to L,$$

die definiert ist durch

$$\overline{b}(\overline{v}, \overline{w}) = \overline{b(v, w)},$$

ist eine symmetrische L-Bilinearform.

(ii) Die Abbildung

$$\mathcal{T}_{L/F}(b)\colon \mathcal{T}_{L/F}(V) \times \mathcal{T}_{L/F}(V) \to F,$$

die definiert ist durch

$$\mathcal{T}_{L/F}(b)(v,w) = T_{L/F}(b(v,w)),$$

ist eine symmetrische F-Bilinearform, wobei $T_{L/F}$ die Spurabbildung ist (siehe hierzu auch [1, Seite 44-51]).

(iii) Die Abbildung

$$\mathcal{N}_{L/F}(b)\colon \mathcal{N}_{L/F}(V) \times \mathcal{N}_{L/F}(V) \to F,$$

die definiert ist durch

$$\mathcal{N}_{L/F}(b)(x,y) = (b \otimes \overline{b})(x,y),$$

ist eine symmetrische F-Bilinearform.

Beweis. (i) Seien $\overline{v}, \overline{w} \in \overline{V}$ und $\lambda \in L$. Die Biadditivität und die Symmetrie sind offensichtlich. Die L-Linearität sieht man so:

$$\begin{aligned}\overline{b}(\lambda\overline{v}, \overline{w}) &= \overline{b}(\overline{\overline{\lambda}v}, \overline{w}) = \overline{b(\overline{\lambda}v, w)} \\ &= \overline{\overline{\lambda}b(v,w)} = \lambda\overline{b(v,w)} = \lambda\overline{b}(\overline{v}, \overline{w})\end{aligned}$$

(ii) Man hat für $v, w \in V$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{L/F}(b)(v,w) &= T_{L/F}(b(v,w)) \\ &= b(v,w) + \overline{b(v,w)} \\ &= b(v,w) + \overline{b}(\overline{v}, \overline{w})\end{aligned}$$

Die Biadditivität, Symmetrie sowie die F-Linearität sind offensichtlich.

(iii) Es ist nur zu zeigen, dass $\mathcal{N}_{L/F}(b)$ Werte in F hat. Dazu reicht es nach Lemma 1.26 aus, dies für die Erzeuger $\mathcal{N}_{L/F}(v) = v \otimes \overline{v}$ von $\mathcal{N}_{L/F}(V)$ zu zeigen. Es gilt:

$$(b \otimes \overline{b})(v \otimes \overline{v}, w \otimes \overline{w}) = b(v,w) \cdot \overline{b}(\overline{v}, \overline{w}) = N_{L/F}(b(v,w)) \in F$$

□

Satz 1.29. *Seien V und W L-Moduln, so sind folgende Abbildungen Isomorphismen von L-Moduln:*

(i)

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathcal{T}_{L/F}(V) \otimes_F L &\to V \oplus \overline{V} \\ v \otimes_F l &\mapsto l(v, \overline{v})\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathcal{N}_{L/F}(V) \otimes_F L &\to V \otimes \overline{V} \\ x \otimes_F l &\mapsto lx\end{aligned}$$

Beweis. (i) Die Abbildung ist offensichtlich L-linear. Sei $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ eine L-Basis von V, so ist e_i, αe_i, $i = 1,\dots,n$ eine F-Basis von $\mathcal{T}_{L/F}(V)$ und $e_i \otimes_F 1$, $\alpha e_i \otimes_F 1$, $i = 1,\dots,n$ eine L-Basis von $\mathcal{T}_{L/F}(V) \otimes_F L$. Diese wird folgendermaßen abgebildet:

$$e_i \otimes_F 1 \mapsto (e_i, \overline{e_i})$$

$$\alpha e_i \otimes_F 1 \mapsto (\alpha e_i, \overline{\alpha e_i}) = \alpha(e_i, -\overline{e_i})$$

Die Elemente $(e_i, \overline{e_i})$, $\alpha(e_i, -\overline{e_i})$, $i = 1,\dots,n$ bilden wiederum eine L-Basis von $V \oplus \overline{V}$, da sie linear unabhängig sind, und sich die Basis $(e_i, 0)$, $(0, \overline{e_i})$, $i = 1,\dots,n$ von $V \oplus \overline{V}$ aus ihnen erzeugen lässt. Daraus folgt die Behauptung.

(ii) Die Abbildung ist offensichtlich L-linear. Da die F-Basis f_i, g_{ij}, h_{ij} von $\mathcal{N}_{L/F}(V)$ eine L-Basis von $V \otimes \overline{V}$ ist, folgt die Behauptung. □

Korollar 1.30. *Sei b eine symmetrische Bilinearform auf einem L-Modul V. Unter Berücksichtigung der Isomorphismen ϕ und ψ aus Satz 1.29 gilt:*

(i) $\mathcal{T}_{L/F}(b) \otimes_F L = b \perp \overline{b}$
(ii) $\mathcal{N}_{L/F}(b) \otimes_F L = b \otimes \overline{b}$

Beweis. Der Beweis wird exemplarisch für den Fall (ii) gezeigt. Den Fall (i) zeigt man auf analoge Weise.

Seien $x, y \in \mathcal{N}_{L/F}(V)$, $k, l \in L$, so gilt:

$$\begin{aligned}(b \otimes \overline{b}) \circ (\psi \times \psi)(x \otimes_F l, y \otimes_F k) &= lk(b \otimes \overline{b}) \circ (\psi \times \psi)(x \otimes_F 1, y \otimes_F 1)\\ &= lk\mathcal{N}_{L/F}(b)(x, y)\\ &= lk(\mathcal{N}_{L/F}(b) \otimes_F L)(x \otimes_F 1, y \otimes_F 1)\\ &= (\mathcal{N}_{L/F}(b) \otimes_F L)(x \otimes_F l, y \otimes_F k)\end{aligned}$$

□

Lemma 1.31. *Ist b eine reguläre symmetrische Bilinearform auf einem L-Modul V, dann gilt:*

(i) $\overline{b}$ ist regulär.
(ii) $\mathcal{T}_{L/F}(b)$ ist regulär.
(iii) $\mathcal{N}_{L/F}(b)$ ist regulär.

Beweis. Für ein beliebiges $v \in V$, wähle ein $w \in V$, so dass $b(v, w) = \beta \neq 0$.

(i) Daraus folgt, dass

$$\overline{b}(\overline{v}, \overline{w}) = \overline{b(v, w)} = \overline{\beta} \neq 0.$$

Also ist $\overline{b}$ regulär.

(ii) Dies folgt da $\mathcal{T}_{L/F}(b) \otimes_F L = b \perp \overline{b}$ gilt, und diese Form regulär ist. Man kann es auch mit den obigen Voraussetzungen folgendermaßen überprüfen:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{L/F}(b)(v, w\cdot\beta^{-1}) &= T_{L/F}(b(v, w\cdot\beta^{-1})) = b(v, w\beta^{-1}) + \overline{b(v, w\beta^{-1})}\\ &= b(v,w)\beta^{-1} + \overline{b(v,w)\beta^{-1}} = \beta\cdot\beta^{-1} + \overline{\beta\cdot\beta^{-1}} = 1+1 \neq 0.\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{T}_{L/F}(b)$ regulär. Siehe hierzu auch [1, Seite 47].

(iii) Dies folgt, da $\mathcal{N}_{L/F}(b)\otimes_F L = b\otimes\overline{b}$ gilt, und diese Form regulär ist, wenn b regulär ist. □

Lemma 1.32. *Seien V und W L-Moduln, so gibt es kanonische L-Modulisomorphismen:*

(i)

$$\phi'\colon \mathcal{N}_{L/F}(V\oplus W) \to \mathcal{N}_{L/F}(V)\oplus\mathcal{T}_{L/F}(V\otimes\overline{W})\oplus\mathcal{N}_{L/F}(W)$$

mit der Eigenschaft:

$$\mathcal{N}_{L/F}((v,w)) \mapsto (\mathcal{N}_{L/F}(v), v\otimes\overline{w}, \mathcal{N}_{L/F}(w))$$

(ii)

$$\psi'\colon \mathcal{N}_{L/F}(V\otimes W)\to\mathcal{N}_{L/F}(V)\otimes\mathcal{N}_{L/F}(W)$$

mit der Eigenschaft:

$$\mathcal{N}_{L/F}(v\otimes w)\mapsto\mathcal{N}_{L/F}(v)\otimes\mathcal{N}_{L/F}(w)$$

Beweis. (i) Der Isomorphismus entsteht aus dem Isomorphismus

$$\begin{gathered}(V\oplus W)\otimes(\overline{V}\oplus\overline{W})\to(V\otimes\overline{V})\oplus(V\otimes\overline{W})\oplus(W\otimes\overline{V})\oplus(W\otimes\overline{W})\\ (v,w)\otimes(\overline{v'},\overline{w'})\mapsto(v\otimes\overline{v'}, v\otimes\overline{w'}, w\otimes\overline{v'}, w\otimes\overline{w'})\end{gathered}$$

durch Einschränkung und den Isomorphismen aus Satz 1.29.

(ii) Analog zu (i) entsteht der gewünschte Isomorphismus aus dem Isomorphismus

$$\begin{gathered}(V\otimes W)\otimes(\overline{V}\otimes\overline{W})\to(V\otimes\overline{V})\otimes(W\otimes\overline{W})\\ v\otimes w\otimes\overline{v'}\otimes\overline{w'}\mapsto v\otimes\overline{v'}\otimes w\otimes\overline{w'}\end{gathered}$$

wiederum durch Einschränkung und den Isomorphismen aus Satz 1.29. □

Satz 1.33. *Seien b und b' symmetrische Bilinearformen auf V bzw. V'. Unter Beachtung der Isomorphismen ϕ' und ψ' aus Lemma 1.32 gilt:*

(i) $\mathcal{N}_{L/F}(b\perp b') = \mathcal{N}_{L/F}(b)\perp\mathcal{T}_{L/F}(b\otimes\overline{b'})\perp\mathcal{N}_{L/F}(b')$

(ii) $\mathcal{N}_{L/F}(b\otimes b') = \mathcal{N}_{L/F}(b)\otimes\mathcal{N}_{L/F}(b')$

Beweis. Man führt den Beweis von (i) analog zum Beweis von Korollar 1.30. Im Fall (ii) betrachtet man die Bilinearformen über dem Erweiterungskörper L. Da sie dort gleich sind, sind sie es bereits über F. □

1.3. **Der Grothendieck-Witt-Ring.**

Satz 1.34. *Sei M eine abelsche Halbgruppe. Dann existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige abelsche Gruppe $\widehat{M}$ und ein Halbgruppenhomomorphismus $i\colon M \to \widehat{M}$ mit der universellen Eigenschaft: Zu jedem Halbgruppenhomomorphismus $f\colon M \to G$ in eine abelsche Gruppe G existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $f'\colon \widehat{M} \to G$ mit $f = f' \circ i$.*

Beweis. Der Beweis wurde aus [1, Seite 29,30] übernommen, und steht noch einmal im Anhang Nebenrechnung 3.1. Er zeigt, dass $\widehat{M}$ von den Elementen $i(a)$, $a \in M$ erzeugt wird. Die Elemente aus $\widehat{M}$ werden mit

$$[a,b] = i(a) - i(b) = a - b, \quad a,b \in M$$

notiert. □

Bemerkung 1.35. *Ist M eine Halbgruppe, die der Kürzungsregel genügt, so ist i injektiv.*

Bemerkung 1.36. *Ist in Satz 1.34 M ein Semiring, so ist $\widehat{M}$ auf kanonische Weise ein Ring.*

Definition 1.37. *Sei M eine Halbgruppe (Semiring), so heißt die aus Satz 1.34 konstruierte Gruppe (Ring) $\widehat{M}$ Grothendieckgruppe (Grothendieckring) von M.*

Lemma 1.38. *Seien M eine abelsche Halbgruppe und G eine abelsche Gruppe. Sei $B\colon M \times M \to G$ eine biadditive Abbildung. Dann existiert eine eindeutig bestimmte biadditive Fortsetzung $\widehat{B}$ der Abbildung B auf $\widehat{M} \times \widehat{M}$, mit:*

$$\widehat{B}(a-b, c-d) = B(a,c) + B(b,d) - B(a,d) - B(b,c)$$

Beweis. Man betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r, "B"] \arrow[d, "(i,\mathrm{id}_M)"'] & G \arrow[d, "\mathrm{id}_G"] \\
\widehat{M} \times M \arrow[r, "\widetilde{B}"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_{\widehat{M}},i)"'] & G \arrow[d, "\mathrm{id}_G"] \\
\widehat{M} \times \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{B}"] & G
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist $i\colon M \to \widehat{M}$ wie in Satz 1.34. Für $b \in M$ ist

$$\begin{aligned} M &\to G \\ a &\mapsto B(a,b) \end{aligned}$$

ein Halbgruppenhomomorphismus. Sei

$$\begin{aligned} \widehat{M} &\to G \\ u &\mapsto \widetilde{B}(u,b) \end{aligned}$$

die Fortsetzung zu einem Gruppenhomomorphismus nach der universellen Eigenschaft von i. Ferner ist dann für $u \in \widehat{M}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} M &\to G \\ b &\mapsto \widetilde{B}(u,b) \end{aligned}$$

auch ein Halbgruppenhomomorphismus. Sei dann

$$\begin{aligned} \widehat{M} &\to G \\ v &\mapsto \widehat{B}(u,v) \end{aligned}$$

wiederum die Fortsetzung zu einem Gruppenhomomorphismus nach der universellen Eigenschaft von i. Die Eigenschaften sind leicht nachzurechnen. □

Bemerkung 1.39. *Ist B symmetrisch, so ist es auch $\widehat{B}$.*

Lemma 1.40. *Sei M eine abelsche Halbgruppe, die der Kürzungsregel genügt, und sei G eine abelsche Gruppe. Sei*

$$Q\colon M \to G$$

eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} B\colon M \times M &\to G \\ B(a,b) &:= Q(a+b) - Q(a) - Q(b) \end{aligned}$$

biadditiv ist.
Dann gibt es genau eine Abbildung

$$\widehat{Q}\colon \widehat{M} \to G$$

mit der Eigenschaft

$$\widehat{Q}(u+v) = \widehat{Q}(u) + \widehat{Q}(v) + \widehat{B}(u,v), \quad \text{für } u,v \in \widehat{M}$$

und

$$\widehat{Q}(i(a)) = Q(a), \quad \text{für } a \in M$$

wobei i die Abbildung aus Satz 1.34 ist.

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$\widehat{Q}\colon \widehat{M} \to G$$

mit

$$\widehat{Q}([a,b]) = Q(a) - Q(b) + B(b,b) - B(a,b).$$

Sie ist wohldefiniert (siehe Anhang Nebenrechnung 3.2), und erfüllt die gewünschten Eigenschaften (siehe Anhang Nebenrechnung 3.3). Die Abbildung ist eindeutig bestimmt, da $\widehat{M}$ erzeugt wird von $i(M)$. □

Korollar 1.41. *Sei M ein kommutativer Semiring der bezüglich der Addition der Kürzungsregel genügt, Q und B Abbildungen wie in Lemma 1.40 mit der zusätzlichen Eigenschaft*

$$Q(a \cdot b) = Q(a) \cdot Q(b), \quad a, b \in M.$$

Dann lässt sich die Abbildung auf den Grothendieckring $\widehat{M}$ fortsetzen mit den Eigenschaften aus Lemma 1.40 und der Eigenschaft

$$\widehat{Q}([a,b] \cdot [a',b']) = \widehat{Q}([a,b]) \cdot \widehat{Q}([a',b']), \quad [a,b],[a',b'] \in \widehat{M}.$$

Beweis. Es muss nur noch die letzte Eigenschaft nachgerechnet werden. Siehe dazu im Anhang Nebenrechnung 3.5. □

Satz 1.42 (Wittscher Kürzungssatz)**.** *Seien b, b_1, b_2 symmetrische Bilinearformen. Ist $b \perp b_1$ isometrisch zu $b \perp b_2$, dann ist b_1 isometrisch zu b_2.*

Beweis. Siehe hierzu [2, Seite 15-19]. □

Definition 1.43 (Grothendieck-Witt-Ring)**.** *Man betrachte die Menge $\widehat{W}^+(F)$ der Isometrieklassen von regulären symmetrischen Bilinearformen auf F-Moduln.*

Mit der Addition $[b] + [b'] = [b \perp b']$ und der Multiplikation $[b] \cdot [b'] = [b \otimes b']$ aus Definition 1.13 bildet $\widehat{W}^+(F)$ einen Semiring, dessen additive Halbgruppe nach dem Wittschen Kürzungssatz der Kürzungsregel genügt (vergleiche [1, Seite 29-33]).

Aus der Konstruktion aus Satz 1.34 ergibt sich der Ring $\widehat{W}(F)$, welchen wir als Grothendieck-Witt-Ring bezeichnen. Seine Elemente schreiben wir $i([b]) - i([b'])$ (oder kurz $[b] - [b']$) mit $[b], [b'] \in \widehat{W}^+(F)$. Der Ring ist kommutativ auf Grund der Definition der Multiplikation.

Definition 1.44. *Sei V ein F-Modul, b eine symmetrische Bilinearform auf V. Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$ heißt isotrop, falls $b(v,v) = 0$. Ansonsten heißt er anisotrop.*

Ein Bilinearraum (V, b) heißt isotrop, falls er einen isotropen Vektor v enthält.

Ein Bilinearraum (V, b) heißt total isotrop, falls für alle $v, w \in V$ gilt $b(v, w) = 0$.

Definition 1.45. *Sei V ein F-Modul und V^* sein Dualraum. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_V \colon (V \oplus V^*) \times (V \oplus V^*) &\to F \\ ((v,f),(w,g)) &\mapsto f(w) + g(v) \end{aligned}$$

ist eine wohldefinierte reguläre symmetrische Bilinearform. Der Bilinearraum

$$\mathbb{H}(V) := (V \oplus V^*, \mathbf{h}_V)$$

heißt hyperbolischer Raum von V.

Lemma 1.46. *Sei V ein $2n$-dimensionaler F-Modul, b eine symmetrische Bilinearform auf V. (V,b) ist genau dann isometrisch zu einem hyperbolischen Raum, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) Es existiert ein n-dimensionaler total isotroper Unterraum von V.

(ii) b wird repräsentiert von einer Matrix der Form:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^t & D \end{pmatrix}$$

wobei C und D $n \times n$ Matrizen sind und $\det(C) \neq 0$.

(iii) b wird repräsentiert von einer Matrix der Form:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

wobei E die $n \times n$ Einheitsmatrix ist.

(iv) b wird repräsentiert von einer Matrix der Form:

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$$

wobei A eine invertierbare $n \times n$ Matrix ist.

(v) b ist isometrisch zur Form $n\langle 1, -1\rangle$.

Beweis. Siehe hierzu [1, Seite 12]. □

Bemerkung 1.47. *Zu jedem Element $x \in \widehat{W}(F)$ existiert eine eindeutig bestimmte anisotrope Form q und eine eindeutig bestimmte Zahl $n \in \mathbb{Z}$, so dass sich x schreiben lässt als:*

$$x = [q] + [n\langle 1, -1\rangle]$$

Beweis. Siehe hierzu [1, Seite 34 Theorem 1.11]. □

Definition 1.48. *Wir bezeichnen mit $\mathbf{H}(F)$ die Untergruppe des Grothendieck-Witt-Ringes $\widehat{W}(F)$, die additiv erzeugt wird von den Klassen der hyperbolischen Räume. Es gilt:*

$$\mathbf{H}(F) = [\langle 1, -1\rangle]\mathbb{Z}$$

Bemerkung 1.49. *Für einen Bilinearraum (V,b) sei die Dimension von b gleich der Dimension von V. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \dim\colon \widehat{W}^+(F) &\to \mathbb{Z} \\ [b] &\mapsto \dim(b) \end{aligned}$$

ist ein Semiringhomomorphismus, und wird nach Satz 1.34 eindeutig zu einem Ringhomomorphismus

$$\dim\colon \widehat{W}(F) \to \mathbb{Z}$$

fortgesetzt. Für $[\varphi] - [\psi] \in \widehat{W}(F)$ gilt:

$$\dim([\varphi] - [\psi]) = \dim([\varphi]) - \dim([\psi])$$

Lemma 1.50. *Sei $\varphi \in \mathbf{H}(F)$ und $x \in \widehat{W}(F)$. Dann gilt:*

$$\varphi \otimes x = \dim(x)\varphi \in \mathbf{H}(F)$$

Die hyperbolischen Formen bilden somit ein Ideal im Grothendieck--Witt-Ring $\widehat{W}(F)$.

Beweis. Siehe hierzu [1, Seite 33]. □

Definition 1.51. *Der Grothendieck-Witt-Ring $\widehat{W}(F)$ modulo dem Ideal $\mathbf{H}(F)$ wird als Wittring $W(F)$ bezeichnet. Es ist also der Ring der Isometrieklassen von anisotropen quadratischen Formen.*

Sei im Weiteren

$$\pi\colon \widehat{W}(F) \to W(F)$$

die Projektion des Grothendieck-Witt-Ring in den Witt-Ring.

Lemma 1.52. *Die Abbildung*

$$\dim_{|\mathbf{H}(F)}\colon \mathbf{H}(F) \to 2\mathbb{Z}$$

ist bijektiv. Ferner induziert die Dimensionsabbildung des Grothendieck-Witt-Ringes folgende Abbildung auf dem Witt-Ring:

$$\begin{aligned} \widetilde{\dim}\colon W(F) &\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x &\mapsto \dim(x) \mod 2 \end{aligned}$$

□

Definition 1.53. *Die Ideale*

$$\widehat{I}(F) := \mathit{Kern}(\dim) \subset \widehat{W}(F)$$
$$I(F) := \mathit{Kern}(\widetilde{\dim}) \subset W(F)$$

werden als fundamentale Ideale des Grothendieck-Witt-Ringes bzw. des Witt-Ringes bezeichnet.

Lemma 1.54. *Für die Potenzen der fundamentalen Ideale gilt:*

$$\widehat{I}^n(F) \cong I^n(F), \quad n > 0$$

Beweis. Man betrachte die eingeschränkte Projektion:

$$\pi_{|\widehat{I}(F)}\colon \widehat{I}(F) \to I(F),$$

und folgert leicht aus Lemma 1.52, dass diese Abbildung bijektiv ist. □

Definition 1.55. *Das Element*

$$[[a_1, \dots, a_n]] := \langle\!\langle a_1, \dots, a_n \rangle\!\rangle - \langle\!\langle 1 \rangle\!\rangle^n \in \widehat{I}^n(F)$$

wird als normalisierte n-fache Pfisterform bezeichnet. Man beachte:

$$[[a_1, \dots, a_n]] = (\pi_{|\widehat{I}(F)})^{-1}(\langle\!\langle a_1, \dots, a_n \rangle\!\rangle)$$

Lemma 1.56. *Die n-ten Potenzen der fundamentalen Ideale $I(F)$ und $\widehat{I}(F)$ werden additiv erzeugt von den n-fachen Pfisterformen bzw. den normalisierten n-fachen Pfisterformen.*

Beweis. Es reicht aus dies jeweils für den Fall $n = 1$ zu zeigen. Jedes Element aus $I(F)$ lässt sich schreiben als Summe von 2-dimensionalen quadratischen Formen, und diese wiederum als Summe zweier Pfisterformen:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle 1, \alpha \rangle - \langle 1, -\beta \rangle = \langle\langle -\alpha \rangle\rangle - \langle\langle \beta \rangle\rangle$$

Siehe hierzu auch [1].

Die Behauptung für $\widehat{I}(F)$ folgt damit aus Lemma 1.54. □

Im Folgenden werden Rechenregeln für den Grothendieck-Witt-Ring und den Witt-Ring aufgeführt und bewiesen, die im späteren Verlauf der Arbeit benutzt werden.

Bemerkung 1.57. *Für zwei Elemente $x, y \in \widehat{W}(F)$ gilt*

$$x = y \quad \text{in } \widehat{W}(F)$$

genau dann, wenn:

$$\dim(x) = \dim(y) \quad \text{und} \quad \pi(x) = \pi(y) \quad \text{in } W(F)$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Bemerkung 1.47. □

Satz 1.58 (Wittrelation)**.** *Es gelten folgende Relationen im Grothendieck-Witt-Ring $\widehat{W}(F)$ eines Körpers F:*

(i) $\langle k \rangle = \langle kl^2 \rangle$, $k, l \in F^*$

(ii) $\langle k \rangle + \langle l \rangle = \langle k + l \rangle + \langle (k + l)kl \rangle$, $k, l \in F^*$ *mit* $k + l \neq 0$

Im Witt-Ring $W(F)$ gilt zusätzlich die Eigenschaft:

$$\langle k \rangle + \langle -k \rangle = 0, \quad k \in F^*$$

Beweis. Siehe hierzu [1, Seite 66]. □

Bemerkung 1.59. *Für die Erzeuger von $\widehat{I}^n(F)$ gelten folgende Rechenregeln, wobei λ, λ_i, $\mu_i \in F^*$.*

(i) $[[\lambda_1, \dots, \lambda_n]] \cdot [[\mu_1, \dots, \mu_m]] = [[\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m]]$

(ii) $[[\lambda]] = \langle 1 \rangle - \langle \lambda \rangle$

(iii) $[[\lambda, \mu]] = [[\lambda, -\lambda\mu]]$

(iv) $[[a, N_{L/F}(\lambda)]] = 0$ *für* $\lambda \in L^*$

(v) $\langle 2 \rangle \langle\langle -a \rangle\rangle + \langle 2 \rangle [[a]] = 2$

Beweis. (i) und (ii) folgen aus Bemerkung 1.57.

(iii) Unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.57 und der Wittrelationen aus Satz 1.58 rechnet man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \langle\langle \lambda, -\lambda\mu \rangle\rangle &= \langle 1, -\lambda, \lambda\mu, -\lambda^2\mu \rangle \\ &= \langle 1, -\lambda, -\mu, \lambda\mu \rangle \\ &= \langle\langle \lambda, \mu \rangle\rangle \end{aligned}$$

(iv) Nach Bemerkung 1.57 reicht es zu zeigen, dass $\langle\langle a, N_{L/F}(\lambda)\rangle\rangle$ hyperbolisch ist. Sei dazu $\lambda = x+\alpha y$ und somit $N_{L/F}(\lambda) = x^2-ay^2$. Sei weiterhin $x, y \neq 0$, da sonst die Aussage direkt folgt. Unter Verwendung der Wittrelationen gilt:

$$\begin{aligned}
\langle\langle a, x^2 - ay^2\rangle\rangle &= \langle 1, -a, -x^2 + ay^2, ax^2 - a^2y^2\rangle \\
&= \langle 1, -a, -1 + a \underbrace{\tfrac{y^2}{x^2}}_{=:z^2}, a - a^2\tfrac{y^2}{x^2}\rangle \\
&= \langle 1, -az^2, -1 + az^2, a(1 - az^2)\rangle \\
&= \langle 1 - az^2, -az^2(1 - az^2), -1 + az^2, a(1 - az^2)\rangle \\
&= \langle 1 - az^2, -(1 - az^2), a(1 - az^2), -a(1 - az^2)\rangle \\
&= \langle 1, 1, -1, -1\rangle
\end{aligned}$$

(v) Man zeigt die Gleichung auf folgende Weise:

$$\langle 2\rangle[[a]] + \langle 2\rangle\langle\langle -a\rangle\rangle = \langle 2\rangle(\langle 1\rangle - \langle a\rangle + \langle 1\rangle + \langle a\rangle) = \langle 2\rangle(\langle 1, 1\rangle)$$

Nach Satz 1.58 (ii) gilt:

$$2 = \langle 1, 1\rangle = \langle 1\rangle + \langle 1\rangle = \langle 1 + 1\rangle + \langle (1 + 1)\cdot(1\cdot 1)\rangle = \langle 2, 2\rangle$$

$\square$

1.4. **Äußere Potenzen von quadratischen Formen und Lambda-Operationen.**

Definition 1.60. *Sei $x \in \widehat{W}^+(F)$ repräsentiert durch eine symmetrische Bilinearform $\varphi\colon V \times V \to F$. Die k-fache äußere Potenz von x ist definiert durch:*

$$\lambda^k(x)\colon \lambda^k V \times \lambda^k V \to F$$
$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) \mapsto \det(\varphi(v_i, u_j))_{1 \le i,j \le k}$$

$\lambda^0(x)$ wird als $\langle 1 \rangle$ definiert.

Bemerkung 1.61. *Für $x \in \widehat{W}^+(F)$ gilt:*

(i) $\lambda^k(x) \in \widehat{W}^+(F)$
(ii) $\lambda^1(x) = x$
(iii) $\lambda^k(x) = 0$ *für* $k > \dim(x)$

Lemma 1.62. *Sei $x = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \widehat{W}^+(F)$ und $k \le \dim(x) = n$, so ist $\dim(\lambda^k(x)) = \binom{n}{k}$ und $\lambda^k(x)$ hat die Diagonalform:*

$$\lambda^k(x) = \bigoplus_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \langle a_{i_1} \cdots a_{i_k} \rangle$$

Beweis. Siehe hierzu [8, Seite 3]. □

Beispiel 1.63. *Im Fall λ^2, der im Weiteren vorwiegend betrachtet wird, hat $\lambda^2(x)$ die Diagonalform:*

$$\lambda^2(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle) = \bigoplus_{1 \le i < j \le n} \langle a_i a_j \rangle =: \langle a_i a_j \rangle_{i<j}$$

Für $x \in \widehat{W}^+(F)$ betrachtet man die Potenzreihe:

$$\lambda_t(x) := \sum_{i \ge 0} t^i \lambda^i(x) \in \widehat{W}^+(F)[[t]]$$

Lemma 1.64. *Es gilt für x, $y \in \widehat{W}^+(F)$:*

$$\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x)\lambda_t(y)$$

Beweis. Sei $x = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $y = \langle a_{n+1}, \ldots, a_m \rangle$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\lambda_t(x)\lambda_t(y)\\
&= \sum_{i \ge 0} t^i \lambda^i(x) \cdot \sum_{i \ge 0} t^i \lambda^i(y)\\
&= \sum_{k \ge 0} \sum_{0 \le i \le k} t^k \lambda^i(x) \lambda^{k-i}(y)\\
&= \sum_{k \ge 0} t^k \sum_{0 \le i \le k} \lambda^i(x) \lambda^{k-i}(y)
\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.62 erhält man:

$$\lambda^i(x)\lambda^{k-i}(y)$$
$$= \left(\bigoplus_{0\leq j_1<\cdots<j_i\leq n} \langle a_{j_1}\cdots a_{j_k}\rangle\right)\cdot\left(\bigoplus_{n+1\leq l_1<\cdots<l_{k-i}\leq m} \langle a_{l_1}\cdots a_{l_{k-i}}\rangle\right)$$

Summiert man dies über $i\in\{0,\dots,k\}$, so ergibt sich:

$$\sum_{0\leq i\leq k}\lambda^i(x)\lambda^{k-i}(y) = \bigoplus_{0\leq j_1<\cdots<j_k\leq m}\langle a_{j_1}\cdots a_{j_k}\rangle = \lambda^k(x+y)$$

und damit die gewünschte Potenzreihe:

$$\sum_{k\geq 0} t^k\lambda^k(x+y) = \lambda_t(x+y)$$

□

Bemerkung 1.65. *Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $R[[t]]$ der Potenzreihenring von R. Dann ist*

$$M := 1 + tR[[t]] \subset R[[t]]$$

eine Untergruppe bezüglich der Multiplikation.

Für die Inverse einer Potenzreihe

$$\lambda = 1 + ta_1 + t^2a_2 + \dots,\quad a_i\in R$$

gilt:

$$\lambda^{-1} = 1 - ta_1 + t^2(a_1 - a_2) + \dots$$

Ferner gilt im speziellen:

$$(1+ta)^{-1} = \sum_{i\geq 0} t^i(-a)^i$$

Im Folgenden betrachten wir den Fall $R = \widehat{W}(F)$.

Bemerkung 1.66. *Für $x\in\widehat{W}^+(F)$ ist*

$$\lambda_t(x)\in M.$$

Nach Lemma 1.64 ist

$$\lambda_t\colon \widehat{W}^+(F)\to M$$

ein Halbgruppenhomomorphismus, welcher sich nach Satz 1.34 eindeutig zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\widehat{\lambda}_t\colon \widehat{W}(F)\to M$$

fortsetzt. Dieser hat dann die Eigenschaft:

$$\widehat{\lambda}_t(x-y) = \widehat{\lambda}_t(x)(\widehat{\lambda}_t(y))^{-1}$$

Er wird im Folgenden einfach mit λ_t notiert.

Definition 1.67. *Die λ-Operationen können wir jetzt durch die formalen Potenzreihen definieren, die auf ganz $\widehat{W}(F)$ gegeben sind. Dabei ist für alle $x \in \widehat{W}(F)$, $\lambda^i(x)$ das i-te Glied der Potenzreihe $\sum_{i\geq 0} t^i\lambda^i(x)$.*

Lemma 1.68. *Für $x, y \in \widehat{W}(F)$ gilt:*

$$\lambda^2(x-y) = \lambda^2(x) - xy + y^2 - \lambda^2(y)$$

Beweis. Modulo $t^3\widehat{W}(F)[[t]]$ gilt nach Bemerkung 1.65 und Bemerkung 1.66:

$$\begin{aligned}\lambda_t(x-y) &= \lambda_t(x)(\lambda_t(y))^{-1} \\ &= (1+tx+t^2\lambda^2(x))(1-ty+t^2(y^2-\lambda^2(y))) \\ &= 1+t(x-y)+t^2(-xy+\lambda^2(x)+y^2-\lambda^2(y))\end{aligned}$$

□

Lemma 1.69. *Seien $x, y \in \widehat{W}(F)$ und $l \in F^*$. Für die λ-Operationen gelten folgende Regeln:*

(i) $\lambda^0(\lambda) = \langle 1\rangle$
(ii) $\lambda^1(x) = x$
(iii) $x^2 = \dim(x) + 2\lambda^2(x)$
(iv) $\lambda^2(-x) = \lambda^2(x) + \dim(x)$
(v) $\lambda^2(x+y) = \lambda^2(x) + xy + \lambda^2(y)$
(vi) $\lambda^2(x-y) = \lambda^2(x) - xy + \dim(y) + \lambda^2(y)$
(vii) $\lambda^2(\langle l\rangle x) = \lambda^2(x)$

Beweis. (i) und (ii) folgen aus der Definition von $\lambda^0(x)$ für $\dim(x) \geq 0$.

(iii) Die Behauptung ist klar, für $x \in \widehat{W}^+(L)$ (vergleiche Beispiel 1.63). Für $x = v - w \in \widehat{W}(F)$ mit $v, w \in \widehat{W}^+(F)$ wissen wir nach Bemerkung 1.49:

$$\dim(x) = \dim(v) - \dim(w)$$

und nach Lemma 1.68:

$$\lambda^2(x) = \lambda^2(v) - vw + w^2 - \lambda^2(w)$$

Die Behauptung ergibt sich daraus wie folgt:

$$\begin{aligned}&\dim(x) + 2\lambda^2(x) \\ &= \dim(v) - \dim(w) + 2(\lambda(v) - vw + w^2 - \lambda^2(w)) \\ &= \dim(v) - \dim(w) + v^2 - \dim(v) - 2vw + 2w^2 - w^2 + \dim(w) \\ &= v^2 - 2vw + w^2 = x^2\end{aligned}$$

Die Gleichungen (iv)-(vii) lassen sich mit (iii), Beispiel 1.63 und Lemma 1.68 leicht überprüfen. □

Bemerkung 1.70. *Sei $y = \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$, $a_i \in F^*$ eine n-fache Pfisterform, so gilt*

$$y^2 = \langle\langle -1\rangle\rangle^n y,$$

da für n=1 schon gilt

$$\langle\langle\lambda\rangle\rangle^2 = \langle 1, -\lambda, -\lambda, 1\rangle = \langle\langle -1\rangle\rangle\langle\langle\lambda\rangle\rangle,$$

und der allgemeine Fall sich darauf reduzieren lässt durch

$$\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle^2 = \prod_{i=1}^{n}\langle\langle a_i\rangle\rangle^2 = \prod_{i=1}^{n}\langle\langle -1\rangle\rangle\langle\langle a_i\rangle\rangle = \langle\langle -1\rangle\rangle^n\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle.$$

Lemma 1.71. *Sei x eine n-fache Pfisterform und $x' = x - \langle\langle 1\rangle\rangle^n \in \widehat{I}^n(F)$. Dann gilt:*

$$\lambda^2(x') = \langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1}x'$$

Beweis. Sei $x = \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, b\rangle\rangle$ und $y = \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle$, so gilt nach Bemerkung 1.57

$$x' = y - \langle b\rangle y$$

Mit Hilfe der Regeln aus Lemma 1.69 rechnet man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\lambda^2(x') &= \lambda^2(y - \langle b\rangle y)\\ &= \lambda^2(y) - \langle b\rangle y(y - \langle b\rangle y) - \lambda^2(\langle b\rangle y)\\ &= \lambda^2(y) - \langle b\rangle y^2 + \langle b\rangle^2 y^2 - \lambda^2(y)\end{aligned}$$

Da $y^2 = \langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1}y$ (siehe Bemerkung 1.70) folgt:

$$\begin{aligned}\lambda^2(x') &= -\langle b\rangle\langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1}y + \langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1}y\\ &= \langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1}y(\langle 1\rangle - \langle b\rangle)\\ &= \langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1}x'\end{aligned}$$

□

Lemma 1.72.

$$\lambda^2(\langle\langle 1\rangle\rangle^n) = \langle\langle 1\rangle\rangle^{2n-1} - \langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1}$$

Beweis. Man zeigt die Aussage durch Induktion über n.

Betrachte also zunächst den Fall $n = 1$.

$$\lambda^2(\langle 1, -1\rangle) = \langle -1\rangle = \langle\langle 1\rangle\rangle - \langle\langle -1\rangle\rangle^0$$

Angenommen die Aussage stimmt für alle $k \leq n$ so folgt für $n + 1$:

$$\begin{aligned}&\lambda^2(\langle\langle 1\rangle\rangle^{n+1})\\ &= \lambda^2(\langle\langle 1\rangle\rangle^n + \langle\langle 1\rangle\rangle^n)\\ &= \lambda^2(\langle\langle 1\rangle\rangle^n) + \langle\langle 1\rangle\rangle^n\langle\langle 1\rangle\rangle^n + \lambda^2(\langle\langle 1\rangle\rangle^n)\\ &= \langle\langle 1\rangle\rangle^{2n-1} - \langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1} + \langle\langle 1\rangle\rangle^{2n} + \langle\langle 1\rangle\rangle^{2n-1} - \langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1}\\ &= \langle\langle 1\rangle\rangle^{2n+1} - \langle\langle -1\rangle\rangle^n\end{aligned}$$

□

Korollar 1.73. *Für eine n-fache Pfisterform x gilt:*

$$\lambda^2(x) = x'\langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1}$$

mit $x' := x - \langle 1\rangle$.

Beweis. Unter Verwendung von Lemma 1.68 ergibt sich:

$$\lambda^2(x - \langle\langle 1\rangle\rangle^n) = \lambda^2(x) - \langle\langle 1\rangle\rangle^n(x - \langle\langle 1\rangle\rangle^n) - \lambda^2(\langle\langle 1\rangle\rangle^n)$$

Da hyperbolische Formen der Dimension 0 gleich 0 sind (vergleiche Lemma 1.52) erhält man:

$$\lambda^2(x - \langle\langle 1\rangle\rangle^n) = \lambda^2(x) - \lambda^2(\langle\langle 1\rangle\rangle^n)$$

Nach Lemma 1.72 folgt:

$$\lambda^2(x - \langle\langle 1\rangle\rangle^n) = \lambda^2(x) - \langle\langle 1\rangle\rangle^{2n-1} + \langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1}$$

Und nach Lemma 1.71 folgt schließlich die Behauptung durch:

$$\begin{aligned}
\lambda^2(x) &= \lambda^2(x - \langle\langle 1\rangle\rangle^n) + \langle\langle 1\rangle\rangle^{2n-1} - \langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1} \\
&= (x - \langle\langle 1\rangle\rangle^n)\langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1} + \langle\langle 1\rangle\rangle^{2n-1} - \langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1} \\
&= x\langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1} - \langle\langle 1\rangle\rangle^{2n-1} + \langle\langle 1\rangle\rangle^{2n-1} - \langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1} \\
&= (x')\langle\langle -1\rangle\rangle^{n-1}
\end{aligned}$$

□

2. Die multiplikative quadratische Norm für den Grothendieck-Witt-Ring

Sei im Weiteren L und F wie in Abschnitt 1.2.

2.1. **Einführung der Norm.**

Nach Lemma 1.31 bildet die in Definition 1.28 definierte Normabbildung $\mathcal{N}_{L/F}$ eine reguläre symmetrische Bilinearform eines L-Moduls auf eine reguläre symmetrische Bilinearform eines F-Moduls ab. Es ist leicht zu überprüfen, dass die auf den Isometrieklassen induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{L/F} \colon \widehat{W}^+(L) &\to \widehat{W}^+(F) \\ [b] &\mapsto [\mathcal{N}_{L/F}(b)] \end{aligned}$$

wohldefiniert und durch $\mathcal{N}_{L/F}$ eindeutig bestimmt ist. Gleiches gilt für die Spurabbildung $\mathcal{T}_{L/F}$.

Lemma 2.1. *Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung*

$$\mathcal{T}_{L/F} \colon \widehat{W}(L) \to \widehat{W}(F)$$

mit der Eigenschaft:

$$[b] \mapsto [\mathcal{T}_{L/F}(b)]$$

für eine reguläre symmetrische Bilinearform b.

Beweis. Aus der Definition der Spur lässt sich leicht zeigen, dass die Spur ein Halbgruppenhomomorphismus (bezüglich der Addition) von $\widehat{W}^+(L)$ in den Grothendieck-Witt-Ring $\widehat{W}(F)$ ist. Damit gibt es nach Satz 1.34 einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\widehat{\mathcal{T}}_{L/F} \colon \widehat{W}(L) \to \widehat{W}(F)$$

mit der gewünschten Eigenschaft. Wir schreiben zukünftlich einfach $\mathcal{T}_{L/F}$ anstatt $\widehat{\mathcal{T}}_{L/F}$. □

Lemma 2.2. *Seien b, b' symmetrische F-Bilinearformen mit* $\dim(b) = \dim(b') = 2$. *Ist* $\det(b) = \det(b')$ *und haben die quadratischen Formen q_b, $q_{b'}$ einen gemeinsamen von Null verschiedenen Wert, so sind b und b' isometrisch.*

Beweis. Sei $c = q_b(v) = q_{b'}(v') \neq 0$, so gibt es Diagonalisierungen:

$$b = \langle c, d \rangle, \quad b' = \langle c, d' \rangle$$

Da

$$cd = \det(b) = \det(b') = cd' \mod F^{*2}$$

existiert ein $e \in F^*$ mit $d' = de^2$ und damit sind b und b' isometrisch. □

Lemma 2.3. *Im Grothendieck-Witt-Ring gelten für die Spur folgende Gleichungen:*

(i) $\mathcal{T}_{L/F}(x + y) = \mathcal{T}_{L/F}(x) + \mathcal{T}_{L/F}(y)$, $x, y \in \widehat{W}(L)$

(ii) $\mathcal{T}_{L/F}(\langle 1\rangle) = \langle 2\rangle\langle\langle -a\rangle\rangle$

(iii) $\mathcal{T}_{L/F}(\langle\lambda\rangle) = \begin{cases} \langle T_{L/F}(\lambda)\rangle\langle\langle -aN_{L/F}(\lambda)\rangle\rangle & \textit{falls } T_{L/F}(\lambda)\neq 0 \\ \langle\langle 1\rangle\rangle & \textit{sonst} \end{cases}$

(iv) $\mathcal{T}_{L/F}(\overline{x}) = \mathcal{T}_{L/F}(x)$, $x\in\widehat{W}(L)$

Beweis. (i) Dies folgt aus Satz 1.34 und Lemma 2.1.

(ii) Sei $\lambda = \mu + \alpha\eta \in L^*$, so gilt:

$$\mathcal{T}_{L/F}(\langle 1\rangle)(\lambda) = T_{L/F}(\lambda^2) = 2(\mu^2 + \alpha^2\eta^2)$$

Es gilt also:

$$\mathcal{T}_{L/F}(\langle 1\rangle) = \langle 2, 2a\rangle = \langle 2\rangle\langle\langle -a\rangle\rangle$$

(iii) Sei $\lambda = \mu + \alpha\eta \in L^*$. Zu der Standardbasis $1,\alpha$ hat $\mathcal{T}_{L/F}(\langle\lambda\rangle)$ die darstellende Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2\mu & 2a\eta \\ 2a\eta & 2a\mu \end{smallmatrix}\right)$. Falls $T_{L/F}(\lambda) = 2\mu = 0$ so ist die Form nach Lemma 1.46 hyperbolisch, und es gilt:

$$\mathcal{T}_{L/F}(\langle\lambda\rangle) = \langle 1, -1\rangle = \langle\langle 1\rangle\rangle$$

Da die Dimension der Formen 2 ist, reicht es aus die Bedingungen aus Lemma 2.2 zu überprüfen. Für die Determinante gilt:

$$\det(\mathcal{T}_{L/F}(\langle\lambda\rangle) = aN_{L/F}(\lambda) = \det(\langle T_{L/F}(\lambda)\rangle\langle\langle -aN_{L/F}(\lambda)\rangle\rangle).$$

Ferner haben beide quadratische Formen den gemeinsamen Wert

$$T_{L/F}(\lambda).$$

(iv) Die Behauptung ist klar für $x\in\widehat{W}^+(L)$ und damit, auf Grund der Additivität von $\mathcal{T}_{L/F}$, auch für $x\in\widehat{W}(L)$. □

Lemma 2.4. *Die Abbildung*

$$\widetilde{\mathcal{T}}_{L/F}\colon \widehat{W}^+(L)\times\widehat{W}^+(L)\to\widehat{W}^+(F)$$

$$\widetilde{\mathcal{T}}_{L/F}(x,y) = \mathcal{T}_{L/F}(x\overline{y})$$

ist biadditiv und symmetrisch.

Beweis. Aus Bemerkung 2.3 (iv) folgt die Symmetrie, und aus den Eigenschaften des Tensorprodukts die Biadditivität. □

Satz 2.5. *Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung*

$$\mathcal{N}_{L/F}\colon \widehat{W}(L)\to\widehat{W}(F)$$

mit den Eigenschaften:

(i) $\mathcal{N}_{L/F}([b]) = [\mathcal{N}_{L/F}(b)]$ *für eine reguläre symmetrische Bilinearform b.*

(ii) $\mathcal{N}_{L/F}(x+y) = \mathcal{N}_{L/F}(x) + \mathcal{N}_{L/F}(y) + \mathcal{T}_{L/F}(x\cdot\overline{y})$ $\quad x,y\in\widehat{W}(L)$.

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{L/F}\colon \widehat{W}^+(L) &\to \widehat{W}^+(F)\\ [b] &\mapsto [\mathcal{N}_{L/F}(b)]\end{aligned}$$

erfüllt nach Lemma 1.32 die Bedingungen aus Lemma 1.40 mit:

$$B(x,y) = \widetilde{\mathcal{T}}_{L/F}(x,y), \quad x,y \in \widehat{W}^+(L)$$

Sie lässt sich somit eindeutig fortsetzen zu einer Abbildung

$$\widehat{\mathcal{N}}_{L/F}\colon \widehat{W}(L) \to \widehat{W}(F)$$

mit der Eigenschaft:

$$\widehat{\mathcal{N}}_{L/F}(x+y) = \widehat{\mathcal{N}}_{L/F}(x) + \widehat{\mathcal{N}}_{L/F}(y) + \widehat{\mathcal{T}}_{L/F}(x \cdot \overline{y}) \quad x,y \in \widehat{W}^+(L)$$

□

2.2. **Grundlegende Eigenschaften der Norm.**

Lemma 2.6. *Die Normabbildung aus Satz 2.5 hat mit $\lambda \in L^*$, $\mu \in K^*$ und $x, y \in \widehat{W}(L)$ folgende Eigenschaften:*

(i) $\mathcal{N}_{L/F}(\langle\lambda\rangle) = \langle N_{L/F}(\lambda)\rangle$

(ii) $\mathcal{N}_{L/F}(\langle\mu\rangle) = \langle\mu^2\rangle$

(iii) $\mathcal{N}_{L/F}(x \cdot y) = \mathcal{N}_{L/F}(x) \cdot \mathcal{N}_{L/F}(y)$

Beweis. (i) Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{L/F}(\langle\lambda\rangle) &= (\langle\lambda\rangle \otimes \overline{\langle\lambda\rangle})_{|\mathcal{N}_{L/F}(L)}\\ &= (\langle\lambda\rangle \otimes \overline{\langle\lambda\rangle})_{|F\otimes F}\\ &= (\langle\lambda\overline{\lambda}\rangle)_{|F}\\ &= (\langle N_{L/F}(\lambda)\rangle)_{|F}\end{aligned}$$

(ii) Dies folgt aus (i) und $N_{L/F}(\mu) = \mu^2$, $\mu \in F$.

(iii) Nach Satz 1.33 erfüllt die Normabbildung die Eigenschaften von Korollar 1.41, womit die Behauptung folgt. □

Definition 2.7. *Sei b eine reguläre symmetrische Bilinearform auf einem F-Modul V. Die Abbildung*

$$\begin{aligned}b_L\colon V \otimes_F L \times V \otimes_F L &\to L\\ (v \otimes l, w \otimes k) &\mapsto lb(v,w)k\end{aligned}$$

ist eine reguläre symmetrische Bilinearform. Sei B die assoziierte Matrix von b bezüglich einer Basis $\varrho = \{e_i\}_{i=1,\dots,\dim_F(V)}$ von V, so gilt für die assoziierte Matrix B_L von b_L bezüglich der Basis $\varrho_L = \{e_i \otimes_F 1\}_{i=1,\dots,\dim_L(V\otimes_F L)}$ von $V \otimes_F L$:

$$B = B_L$$

Damit sieht man leicht, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{L/F}\colon \widehat{W}^+(F) &\to \widehat{W}(L)\\ [b] &\mapsto [b_L]\end{aligned}$$

ein Semiringhomomorphismus ist, welcher sich nach Satz 1.34 zu einem Ringhomomorphismus

$$\mathrm{res}_{L/F}\colon \widehat{W}(F) \to \widehat{W}(L)$$

fotsetzt. Diesen bezeichnen wir als Restriktion. (Siehe hierzu auch [1, Seite 44,45].)

Lemma 2.8 (Projektionsformel)**.** *Sei $x \in \widehat{W}(F)$ und $y \in \widehat{W}(L)$, dann gilt:*

$$\mathcal{T}_{L/F}(\mathrm{res}_{L/F}(x)y) = x\mathcal{T}_{L/F}(y)$$

Im Spezialfall $y = \langle 1\rangle$ ergibt sich somit

$$\mathcal{T}_{L/F}(\mathrm{res}_{L/F}(x)) = \mathcal{T}_{L/F}(\langle 1\rangle)x = \langle 2\rangle\langle\langle -a\rangle\rangle x.$$

Beweis. Siehe hierzu [1, Seite 48 Theorem 5.6] und Bemerkung 2.3. □

Satz 2.9. *Sei* $x \in \widehat{W}(L)$ *so gilt:*

$$\mathcal{N}_{L/F}(-x) = \mathcal{N}_{L/F}(x) - \dim(x)\langle 2\rangle[[a]]$$

Beweis. Mit Hilfe der bisher bekannten Regeln ergibt sich für $x \in \widehat{W}(L)$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{N}_{L/F}(0) = \mathcal{N}_{L/F}(x + (-x)) \\ &= \mathcal{N}_{L/F}(x) + \mathcal{N}_{L/F}(-x) + \mathcal{T}_{L/F}(x\overline{(-x)}) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgende Formel für die Norm von $-x$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{L/F}(-x) &= \mathcal{T}_{L/F}(x\overline{x}) - \mathcal{N}_{L/F}(x) \\ &= \mathcal{N}_{L/F}(x) - (2\mathcal{N}_{L/F}(x) - \mathcal{T}_{L/F}(x\overline{x})) \end{aligned}$$

Zunächst beweist man die Aussage für alle $x \in \widehat{W}^+(L)$ durch vollständige Induktion über die Dimension.

Sei $x = \langle k\rangle$, $k \in L^*$. Durch die obige Gleichung reicht es folgendes zu zeigen:

$$2\mathcal{N}_{L/F}(\langle k\rangle) - \mathcal{T}_{L/F}(\langle k\rangle\overline{\langle k\rangle}) = \dim(\langle k\rangle)\langle 2\rangle[[a]]$$

Mit Hilfe der Projektionsformel (siehe Lemma 2.8) und der Eigenschaft

$$\langle k\rangle\overline{\langle k\rangle} = \mathrm{res}_{L/F}(\mathcal{N}_{L/F}(\langle k\rangle)) = \mathrm{res}_{L/F}(\langle N_{L/F}(k)\rangle)$$

ergibt sich folgende Behauptung:

$$2\langle N_{L/F}(k)\rangle - \langle 2\rangle\langle\langle -a\rangle\rangle\langle N_{L/F}(k)\rangle = \langle 2\rangle[[a]]$$

Nach Bemerkung 1.59 (v) erhält man:

$$\langle 2\rangle[[a]]\langle N_{L/F}(k)\rangle = \langle 2\rangle[[a]]$$

Dies wiederum gilt nach Bemerkung 1.59 (iv).

Bleibt der Induktionsschritt zu zeigen. Sei dazu $x = \langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$. Angenommen, die Aussage gilt für alle Formen der Dimension kleiner n, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_{L/F}(-x + (-\langle a_n\rangle)) \\ &= \mathcal{N}_{L/F}(-x) + \mathcal{N}_{L/F}(-\langle a_n\rangle) + \mathcal{T}_{L/F}(x\overline{\langle a_n\rangle}) \\ &= \mathcal{N}_{L/F}(x) + \mathcal{N}_{L/F}(\langle a_n\rangle) - (n-1)\langle 2\rangle[[a]] - 1\langle 2\rangle[[a]] + \mathcal{T}_{L/F}(x\overline{\langle a_n\rangle}) \\ &= \mathcal{N}_{L/F}(x + \langle a_n\rangle) - n\langle 2\rangle[[a]] \end{aligned}$$

Nun beweist man die Aussage für alle $x = y - z \in \widehat{W}(L)$, $y, z \in \widehat{W}^+(L)$ unter Benutzung des eben Gezeigten:

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_{L/F}(y - z) \\ &= \mathcal{N}_{L/F}(y) - \mathcal{T}_{L/F}(y \cdot \overline{z}) + \mathcal{N}_{L/F}(-z) \\ &= \mathcal{N}_{L/F}(-y) + \dim(y)\langle 2\rangle[[a]] - \mathcal{T}_{L/F}(z \cdot \overline{y}) + \mathcal{N}_{L/F}(z) - \dim(z)\langle 2\rangle[[a]] \\ &= \mathcal{N}_{L/F}(z - y) - \dim(z - y)\langle 2\rangle[[a]] \end{aligned}$$

□

Satz 2.10. *Für $z \in \widehat{W}(F)$ gilt:*

$$\mathcal{N}_{L/F}(\operatorname{res}_{L/F}(z)) = z^2 - \langle 2\rangle[[a]]\lambda^2(z)$$

Beweis. Angenommen die Behauptung stimmt für alle $z \in \widehat{W}^+(F)$, so folgt für $x-y \in \widehat{W}(F)$ mit $x, y \in \widehat{W}^+(F)$ und $\dim(x) = n$, $\dim(y) = m$:

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_{L/F}(\operatorname{res}_{L/F}(x-y))\\ &= \mathcal{N}_{L/F}(\operatorname{res}_{L/F}(x)) + \mathcal{N}_{L/F}(-\operatorname{res}_{L/F}(y)) - \mathcal{T}_{L/F}(\operatorname{res}_{L/F}(xy))\end{aligned}$$

Unter Anwendung von Satz 2.9 und der oben genannten Vorraussetzung erhält man:

$$x^2 - \langle 2\rangle[[a]]\lambda^2(x) + y^2 - \langle 2\rangle[[a]]\lambda^2(y) - \langle 2\rangle[[a]]m - \mathcal{T}_{L/F}(\operatorname{res}_{L/F}(xy))$$

Man benutzt die Projektionsformel aus Lemma 2.8 und erhält:

$$x^2 + y^2 - \langle 2\rangle\langle\langle -a\rangle\rangle xy - \langle 2\rangle[[a]](\lambda^2(x) + m + \lambda^2(y))$$

Mit Hilfe von Bemerkung 1.59(v) und Lemma 1.69(vi) folgt dann die Behauptung.

Den Fall $z \in \widehat{W}^+(F)$ beweist man durch vollständige Induktion über die Dimension $\dim(z) = n$.

Der Induktionsanfang $n = 1$ folgt aus Lemma 2.6(ii) und Bemerkung 1.61(iii).

Sei die Aussage richtig für alle quadratischen Formen der Dimension kleiner n. Sei nun $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \widehat{W}^+(F)$ und $x = \langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$. Analog zu der eben geführten Gleichungskette folgt das Ergebnis durch:

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_{L/F}(\operatorname{res}_{L/F}(x + \langle a_n\rangle))\\ &= \mathcal{N}_{L/F}(\operatorname{res}_{L/F}(x)) + \mathcal{N}_{L/F}(\operatorname{res}_{L/F}\langle a_n\rangle) + \mathcal{T}_{L/F}(\operatorname{res}_{L/F}(x\overline{\langle a_n\rangle})\\ &= x^2 - \langle 2\rangle[[a]]\lambda^2(x) + \langle a_{n+1}\rangle^2 + \langle 2\rangle\langle\langle -a\rangle\rangle x\langle a_n\rangle\\ &= x^2 + \langle a_n\rangle^2 + \langle 2\rangle\langle\langle -a\rangle\rangle x\langle a_n\rangle - \langle 2\rangle[[a]](\lambda^2(x) + \lambda^2(\langle a_n\rangle))\\ &= x^2 + \langle a_n\rangle^2 + 2x\langle a_n\rangle - \langle 2\rangle[[a]](\lambda^2(x) + \lambda^2(\langle a_n\rangle) + x\langle a_n\rangle)\\ &= (x + \langle a_n\rangle)^2 - \langle 2\rangle[[a]]\lambda^2(x + \langle a_n\rangle)\end{aligned}$$

□

Lemma 2.11. *Seien $x, y \in \widehat{W}^+(L)$ so gilt*

$$\mathcal{T}_{L/F}(x)\mathcal{T}_{L/F}(y) = \mathcal{T}_{L/F}(xy) + \langle a\rangle\mathcal{T}_{L/F}(x\overline{y}).$$

Beweis. Unter Verwendung der Projektionsformel (siehe Lemma 2.8) erhält man

$$\mathcal{T}_{L/F}(x)\mathcal{T}_{L/F}(y) = \mathcal{T}_{L/F}(x\operatorname{res}_{L/F}(\mathcal{T}_{L/F}(y))).$$

Aus Satz 1.33 folgt dann

$$\mathcal{T}_{L/F}(x(y + \overline{y})) = \mathcal{T}_{L/F}(xy) + \mathcal{T}_{L/F}(x\overline{y}).$$

Wiederum mit der Projektionsformel und da $\mathrm{res}_{L/F}(\langle a\rangle) = \langle 1\rangle$ (a ist ein Quadrat in L) ergibt sich schließlich

$$\mathcal{T}_{L/F}(xy) + \mathcal{T}_{L/F}(\mathrm{res}_{L/F}(\langle a\rangle)x\overline{y}) = \mathcal{T}_{L/F}(xy) + \langle a\rangle\mathcal{T}_{L/F}(x\overline{y}).$$

□

Satz 2.12. *Sei $x \in \widehat{W}(L)$, so gilt:*

$$\lambda^2(\mathcal{T}_{L/F}(x)) = \mathcal{T}_{L/F}(\lambda^2(x)) + \langle a\rangle\mathcal{N}_{L/F}(x)$$

Beweis. Zuerst zeigt man die Behauptung für $x \in \widehat{W}^+(L)$. Dies geschieht durch vollständige Induktion über die Dimension $\dim(x) = n$.

Betrachte zunächst den Induktionsanfang $n = 1$. Nach Lemma 2.3 (iii) gilt:

$$\lambda^2(\mathcal{T}_{L/F}(\langle l\rangle)) = \lambda^2(\langle T_{L/F}(l), aT_{L/F}(l)N_{L/F}(l)\rangle)$$

Mit Hilfe von Beispiel 1.63 und Satz 1.58(i) erhält man:

$$\lambda^2(\mathcal{T}_{L/F}(\langle l\rangle)) = \langle aN_{L/F}(l)\rangle = \langle a\rangle\langle N_{L/F}(l)\rangle$$

Die Behauptung folgt schließlich aus Lemma 2.6(i) und Bemerkung 1.61(iii).

Sei nun $x = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$ und $y = \langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle$. Nach Lemma 1.69 gilt:

$$\lambda^2(\mathcal{T}_{L/F}(x)) = \lambda^2(\mathcal{T}_{L/F}(y)) + \lambda^2(\mathcal{T}_{L/F}(\langle a_n\rangle)) + \mathcal{T}_{L/F}(y)\mathcal{T}_{L/F}(\langle a_n\rangle)$$

Auf Grund der Induktionsvorraussetzung wird die Gleichungskette folgendermaßen weitergeführt:

$$\mathcal{T}_{L/F}(\lambda^2(y)) + \langle a\rangle(\mathcal{N}_{L/F}(y) + \mathcal{N}_{L/F}(\langle a_n\rangle) + \mathcal{T}_{L/F}(y)\mathcal{T}_{L/F}(\langle a_n\rangle)$$

Man ergänzt die passenden Terme und erhält:

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}_{L/F}(\lambda^2(x)) + \langle a\rangle(\mathcal{N}_{L/F}(x))\\ &- \mathcal{T}_{L/F}(y\langle a_n\rangle) - \langle a\rangle\mathcal{T}_{L/F}(y\overline{\langle a_n\rangle}) + \mathcal{T}_{L/F}(y)\mathcal{T}_{L/F}(\langle a_n\rangle)\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.11 folgt dann direkt die Aussage.

Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass die Aussage auch für ein beliebiges Element $z = x - y \in \widehat{W}(L)$, $x, y \in \widehat{W}^+(L)$ gilt. Mit Hilfe der Rechenregeln für λ^2 (siehe Lemma 1.69) folgt:

$$\begin{aligned}&\lambda^2(\mathcal{T}_{L/F}(x-y))\\ &= \lambda^2(\mathcal{T}_{L/F}(x)) - \mathcal{T}_{L/F}(x)\mathcal{T}_{L/F}(y) + \dim(\mathcal{T}_{L/F}(y)) + \lambda^2(\mathcal{T}_{L/F}(y))\end{aligned}$$

Aus der im oberen Teil des Beweises bereits gezeigten Aussage erhält man:

$$\begin{aligned}\lambda^2(\mathcal{T}_{L/F}(x-y)) &= \mathcal{T}_{L/F}(\lambda^2(x) + \lambda^2(y)) + \langle a\rangle(\mathcal{N}_{L/F}(x) + \mathcal{N}_{L/F}(y))\\ &\quad - \mathcal{T}_{L/F}(x)\mathcal{T}_{L/F}(y) + \dim(\mathcal{T}_{L/F}(y))\end{aligned}$$

Da $\mathcal{N}_{L/F}(y) = \mathcal{N}_{L/F}(-y) + \dim(y)\langle 2\rangle[[a]]$ (vergleiche Satz 2.9) und wiederum aus den Rechenregeln für λ^2 (vergleiche Lemma 1.69) erhält man:

$$\begin{aligned}\lambda^2(\mathcal{T}_{L/F}(x-y)) = {}& \mathcal{T}_{L/F}(\lambda^2(x-y)) + \langle a\rangle\mathcal{N}_{L/F}(x-y)\\ &+ \langle a\rangle\mathcal{T}_{L/F}(x\overline{y}) + \mathcal{T}_{L/F}(xy) - \mathcal{T}_{L/F}(x)\mathcal{T}_{L/F}(y)\\ &+ \langle a\rangle \dim(y)\langle 2\rangle[[a]] - \mathcal{T}_{L/F}(\dim(y)) + \dim(\mathcal{T}_{L/F}(y))\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.11 und der Projektionsformel (siehe Lemma 2.8) ergibt sich:

$$\mathcal{T}_{L/F}(\lambda^2(x-y)) + \langle a\rangle\mathcal{N}_{L/F}(x-y) + \dim(y)(\langle 2a\rangle[[a]] - \langle 2\rangle\langle\langle -a\rangle\rangle + \langle 1,1\rangle)$$

Die Behauptung folgt schließlich aus Bemerkung 1.59(v). $\square$

2.3. **Die Norm von hyperbolischen Formen und Pfisterformen.**

Lemma 2.13. *Es gilt:*

$$\mathcal{N}_{L/F}(n\langle\langle 1\rangle\rangle) = n\langle 2\rangle[[a]] + 2n^2\langle\langle 1\rangle\rangle, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Beweis. Für $n > 0$ zeigt man die Aussage durch Induktion über n.

Sei also $n = 1$, so gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{L/F}(\langle 1, -1\rangle) &= \mathcal{N}_{L/F}(\langle 1\rangle) + \mathcal{N}_{L/F}(\langle -1\rangle) + \mathcal{T}_{L/F}(\langle 1\rangle\overline{\langle -1\rangle}) \\ &= \langle 1\rangle + \langle 1\rangle + \mathcal{T}_{L/F}(\langle -1\rangle) \\ &= \langle 2, 2\rangle + \langle -2\rangle\langle\langle -a\rangle\rangle \\ &= 2 - \langle 2\rangle\langle\langle -a\rangle\rangle + 2\langle\langle 1\rangle\rangle \\ &= \langle 2\rangle[[a]] + 2\langle\langle 1\rangle\rangle\end{aligned}$$

Der Induktionsschritt folgt leicht durch:

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_{L/F}((n+1)\langle\langle 1\rangle\rangle) \\ &= \mathcal{N}_{L/F}(n\langle\langle 1\rangle\rangle) + \mathcal{N}_{L/F}(\langle\langle 1\rangle\rangle) + \mathcal{T}_{L/F}(n\langle\langle 1\rangle\rangle\overline{\langle\langle 1\rangle\rangle}) \\ &= n\langle 2\rangle[[a]] + 2n^2\langle\langle 1\rangle\rangle + \langle 2\rangle[[a]] + 2\langle\langle 1\rangle\rangle + \mathcal{T}_{L/F}(2n\langle\langle 1\rangle\rangle) \\ &= (n+1)\langle 2\rangle[[a]] + (2n^2+2)\langle\langle 1\rangle\rangle + (4n)\langle\langle 1\rangle\rangle \\ &= (n+1)\langle 2\rangle[[a]] + (2(n+1)^2)\langle\langle 1\rangle\rangle\end{aligned}$$

Der Fall $n < 0$ ergibt sich schließlich aus Satz 2.9 durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{L/F}(n\langle\langle 1\rangle\rangle) &= \mathcal{N}_{L/F}(-n\langle\langle 1\rangle\rangle) + 2n\langle 2\rangle[[a]] \\ &= (-n)\langle 2\rangle[[a]] + 2(-n)^2\langle\langle 1\rangle\rangle + 2n\langle 2\rangle[[a]] \\ &= n\langle 2\rangle[[a]] + 2n^2\langle\langle 1\rangle\rangle\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.14. *Da die Norm hyperbolische Formen nicht in hyperbolische Formen überführt, lässt sie sich nicht als Abbildung von $W(L)$ nach $W(F)$ fortsetzen.*

Definition 2.15. *Man bezeichne mit $\eta(k)$, $k \in L$ das folgende Element aus $\widehat{I}(F) \subset \widehat{W}(F)$:*

$$\eta(k) = \begin{cases} [[T_{L/F}(k), -aN_{L/F}(k)]] & \text{falls } T_{L/F}(k) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit Hilfe der eben definierten Notation $\eta(k)$ lässt sich die Norm von Pfisterformen leichter ausdrücken.

Satz 2.16. *Für $k, k_i \in L^*$ gilt:*

(i) $\mathcal{N}_{L/F}(\langle\langle k\rangle\rangle) = \langle\langle a\rangle\rangle + \eta(k)$ *im Witt-Ring* $W(F)$.

(ii) $\mathcal{N}_{L/F}(\langle\langle k_1, \dots, k_n\rangle\rangle) = \langle\langle a\rangle\rangle^n + (\eta(k_1)\cdots\eta(k_n))$ *im Witt-Ring* $W(F)$.

(iii) $\mathcal{N}_{L/F}([[k]]) = [[2, a]] + \eta(k)$ *im Grothendieck-Witt-Ring* $\widehat{W}(F)$.

(iv) $\mathcal{N}_{L/F}([[k_1,\dots,k_n]]) = \eta(k_1)\cdots\eta(k_n)$ *für* $n>1$.

Beweis. Die bisher bekannten Regeln für die Norm liefern die Ergebnisse wie folgt.

(i) Sei $k \in L^*$ und $T_{L/F}(k) \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{L/F}(\langle\langle k\rangle\rangle) &= \mathcal{N}_{L/F}(\langle 1,-k\rangle)\\ &= \mathcal{N}_{L/F}(\langle 1\rangle) + \mathcal{N}_{L/F}(\langle -k\rangle) + \mathcal{T}_{L/F}(\langle 1\rangle\overline{\langle -k\rangle})\\ &= \langle N_{L/F}(1)\rangle + \langle N_{L/F}(k)\rangle + \mathcal{T}_{L/F}(-k)\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.3 ergibt sich:

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_{L/F}(\langle\langle k\rangle\rangle)\\ &= \langle 1\rangle + \langle N_{L/F}(k)\rangle + \langle T_{L/F}(-k)\rangle\langle\langle -aN_{L/F}(k)\rangle\rangle\\ &= \langle 1\rangle + \langle N_{L/F}(k)\rangle + \langle\langle T_{L/F}(k), -aN_{L/F}(k)\rangle\rangle - \langle\langle -aN_{L/F}(k)\rangle\rangle\\ &= \langle 1\rangle + \langle N_{L/F}(k)\rangle - \langle 1\rangle - \langle aN_{L/F}(k)\rangle + \eta(k) + 2\langle\langle 1\rangle\rangle\\ &= \langle N_{L/F}(k)\rangle[[a]] + \eta(k) + 2\langle\langle 1\rangle\rangle\end{aligned}$$

Nach Bemerkung 1.59(iv) gilt $\langle N_{L/F}(k)\rangle[[a]] = [[a]]$ und somit folgt die Aussage folgendermaßen:

$$\mathcal{N}_{L/F}(\langle\langle k\rangle\rangle) = [[a]] + \eta(k) + 2\langle\langle 1\rangle\rangle = \langle\langle a\rangle\rangle + \eta(k) + \langle\langle 1\rangle\rangle$$

Vergleiche [5].

(ii) Die Behauptung ist erfüllt nach (i) und der Aussage aus Bemerkung 1.59(iv).

(iii) Sei $k \in L^*$ und $T_{L/F}(k) \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{L/F}([[k]]) &= \mathcal{N}_{L/F}(\langle\langle k\rangle\rangle - \langle\langle 1\rangle\rangle)\\ &= \mathcal{N}_{L/F}(\langle\langle k\rangle\rangle) + \mathcal{N}_{L/F}(-\langle\langle 1\rangle\rangle) + \mathcal{T}_{L/F}(\langle\langle k\rangle\rangle(-\langle\langle 1\rangle\rangle))\end{aligned}$$

$\mathcal{T}_{L/F}(\langle\langle k\rangle\rangle(-\langle\langle 1\rangle\rangle))$ ist hyperbolisch, und somit erhält man unter Verwendung von Satz 2.9:

$$\mathcal{N}_{L/F}([[k]]) = \mathcal{N}_{L/F}(\langle\langle k\rangle\rangle) + \mathcal{N}_{L/F}(\langle\langle 1\rangle\rangle) - 2\langle 2\rangle[[a]] - 4\langle\langle 1\rangle\rangle$$

Mit den Ergebnissen aus (i) und Lemma 2.13 folgt dann:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{L/F}([[k]]) &= \eta(k) + \langle\langle a\rangle\rangle + \langle\langle 1\rangle\rangle + \langle 2\rangle[[a]] + 2\langle\langle 1\rangle\rangle - 2\langle 2\rangle[[a]] - 4\langle\langle 1\rangle\rangle\\ &= \eta(k) + \langle\langle a\rangle\rangle - \langle 2\rangle[[a]] - \langle\langle 1\rangle\rangle\\ &= \eta(k) + [[a]] - \langle 2\rangle[[a]]\\ &= \eta(k) + [[2,a]]\end{aligned}$$

(iv) Die letzte Gleichung folgt aus der vorherigen, sowie Bemerkung 1.59(i) und Lemma 2.6(ii) durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{L/F}([[k_1,\dots,k_n]]) &= \mathcal{N}_{L/F}([[k_1]]\cdots[[k_n]])\\ &= \mathcal{N}_{L/F}([[k_1]])\cdots\mathcal{N}_{L/F}([[k_n]])\\ &= ([[2,a]] + \eta(k_1))\cdots([[2,a]] + \eta(k_n))\\ &= [[2,a]]^n + \eta(k_1)\cdots\eta(k_n)\end{aligned}$$

und der Eigenschaft:

$$\begin{aligned}[[2]][[2]] &= \langle\langle 2, 2\rangle\rangle - \langle 1, -1\rangle^2 \\ &= \langle 1, -2, -2, 1\rangle - \langle 1, 1, -1, -1\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Korollar 2.17. *Sei $x \in \widehat{W}(L)$ eine n-fache Pfisterform. Dann ist*

$$\mathcal{N}_{L/F}(x) - [[a]]^n \in \widehat{W}(F)$$

eine $2n$-fache Pfisterform (vergleiche [5]).

Korollar 2.18. *Sei $x \in \widehat{W}(L)$ eine normalisierte n-fache Pfisterform. Ist $n \geq 2$ so ist*

$$\mathcal{N}_{L/F}(x) \in \widehat{W}(F)$$

eine normalisierte $2n$-fache Pfisterform.

3. Anhang

Die folgenden Rechnungen gelten für eine Halbgruppe M mit neutralem Element 0. Für unsere einzige Anwendung $M = \widehat{W}^+(F)$ ist diese Annahme erfüllt. Für eine beliebige Halbgruppe M erweitert man gegebenenfalls M durch Hinzunahme eines neutralen Elements.

Nebenrechnung 3.1. *Man definiere eine Äquivalenzrelation auf $M \times M$ folgendermaßen:*

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow \exists c \in M \text{ mit } a + b' + c = a' + b + c$$

Man schreibe die Äquivalenzklasse von (a, b) mit $[a, b]$ und die Menge der Äquivalenzklassen mit $\widehat{M}$. Man definiere eine Addition auf $\widehat{M}$ durch:

$$[a, b] + [a', b'] = [a + a', b + b']$$

Diese ist wohldefiniert, assoziativ und kommutativ. Bezüglich dieser Addition besitzt $\widehat{M}$ das neutrale Element $0 = [a, a]$, $a \in M$ beliebig, und zu jedem Element $[a, b]$ ein Inverses $[b, a]$. Damit bildet $\widehat{M}$ eine abelsche Gruppe. Die Abbildung

$$\begin{aligned} i\colon M &\to \widehat{M} \\ a &\mapsto [a, 0] \end{aligned}$$

ist ein Halbgruppenhomomorphismus. Bleibt die universelle Eigenschaft zu zeigen. Da $[a, b] = [a, 0] - [b, 0]$, erzeugt das Bild von i gerade $\widehat{M}$. Sei nun G eine abelsche Gruppe, und $f\colon M \to G$ ein Halbgruppenhomomorphismus, so ist die Abbildung $f'([a, b]) = f(a) - f(b)$ ein Gruppenhomomorphismus mit der Eigenschaft $f = f' \circ i$. Dieser ist eindeutig bestimmt da $\widehat{M}$ von $i(M)$ erzeugt wird. Des weiteren ist leicht nachzurechnen, dass $\widehat{M}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Nebenrechnung 3.2. *Für $[a, b] = [a', b']$ $(a + b' = a' + b)$ gilt:*

$$\begin{aligned}
&\widehat{Q}([a, b]) - \widehat{Q}([a', b']) \\
&= Q(a) - Q(b) + B(b, b) - B(a, b) \\
&\quad - (Q(a') - Q(b') + B(b', b') - B(a', b')) \\
&= Q(a) + Q(b') + B(b, b) + B(a', b') \\
&\quad - Q(a') - Q(b) - B(b', b') - B(a, b) \\
&= Q(a + b') + B(a', b) + B(b, b) + B(a', b') \\
&\quad - Q(a' + b) - B(a, b') - B(b', b') - B(a, b) \\
&= B(a' + b, b) + B(a', b') - B(a + b', b') - B(a, b) \\
&= B(a + b', b) + B(a', b') - B(a' + b, b') - B(a, b) \\
&= B(b', b) - B(b, b') = 0
\end{aligned}$$

Nebenrechnung 3.3. *Für $a \in M$ gilt:*

$$\widehat{Q}(i(a)) = \widehat{Q}([a,0]) = Q(a) - Q(0) + B(0,0) - B(a,0) = Q(a)$$

Für $[a,b],[c,d] \in \widehat{M}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\widehat{Q}([a,b]+[c,d]) \\
&= \widehat{Q}([a+c,b+d]) \\
&= Q(a+c) - Q(b+d) + B(b+d,b+d) - B(a+c,b+d) \\
&= Q(a) + Q(c) + B(a,c) - Q(b) - Q(d) - B(b,d) \\
&\quad + B(b,b) + B(b,d) + B(d,b) + B(d,d) \\
&\quad - B(a,b) - B(a,d) - B(c,b) - B(c,d) \\
&= Q(a) - Q(b) + B(b,b) - B(a,b) \\
&\quad + Q(c) - Q(d) + B(d,d) - B(c,d) \\
&\quad + B(d,b) + B(a,c) - B(a,d) - B(c,b) \\
&= \widehat{Q}([a,b]) + \widehat{Q}([c,d]) + \widehat{B}([a,b],[c,d])
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.4. *Mit den Voraussetzungen aus Korollar 1.41 gelten folgende Rechenregeln:*

(i) $B(a,b) \cdot B(c,d) = B(ac,bd) + B(bc,ad)$
(ii) $Q(a) \cdot B(b,c) = B(ab,ac)$

Beweis. Die Gleichungen werden mit Hilfe der Eigenschaften der Abbildungen einfach nachgerechnet.

(i)

$$\begin{aligned}
&B(a,b) \cdot B(c,d) \\
&= (Q(a+b) - Q(a) - Q(b))(Q(c+d) - Q(c) - Q(d)) \\
&= Q((a+b)c + (a+b)d) - Q((a+b)c) - Q((a+b)d) \\
&\quad - Q(ac+ad) + Q(ac) + Q(ad) \\
&\quad - Q(bc+bc) + Q(bc) + Q(bd) \\
&= B(ac+bc, ad+bd) - B(ac,ad) - B(bc,bd) \\
&= B(ac,bd) + B(bc,ad)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
Q(a) \cdot B(b,c) &= Q(a)(Q(b+c) - Q(b) - Q(c)) \\
&= Q(ab+ac) - Q(ab) - Q(ac) = B(ab,ac)
\end{aligned}$$

□

Nebenrechnung 3.5. *Unter Verwendung der Rechenregeln aus Bemerkung 3.4 rechnet man folgendermaßen:*

$$
\begin{aligned}
&\widehat{Q}([a,b]) \cdot \widehat{Q}([c,d]) \\
&= (Q(a) - Q(b) + B(b,b) - B(a,b))(Q(c) - Q(d) + B(d,d) - B(c,d)) \\
&= Q(ac) - Q(ad) + Q(a)B(d,d) - Q(a)B(c,d) \\
&\quad - Q(bc) + Q(bd) - Q(b)B(d,d) + Q(b)B(c,d) \\
&\quad + Q(c)B(b,b) - Q(d)B(b,b) + B(b,b)B(d,d) - B(b,b)B(c,d) \\
&\quad - Q(c)B(a,b) + Q(d)B(a,b) - B(a,b)B(d,d) + B(a,b)B(c,d) \\
&= Q(ac) - Q(ad) + Q(bd) - Q(bc) \\
&\quad - B(ac,ad) + B(ad,ad) - B(bd,bd) + B(bc,bd) \\
&\quad + B(cb,cb) - B(db,db) + B(b,b)B(d,d) - B(b,b)B(c,d) \\
&\quad - B(ac,bc) + B(ad,bd) - B(a,b)B(d,d) + B(a,b)B(c,d) \\
&= Q(ac) - Q(ad) + Q(bd) - Q(bc) \\
&\quad - B(ac,ad) + B(ad,ad) - B(bd,bd) + B(bc,bd) \\
&\quad + B(cb,cb) - B(db,db) + B(bd,bd) + B(bd,bd) \\
&\quad - B(bc,bd) - B(bc,bd) - B(ac,bc) + B(ad,bd) \\
&\quad - B(ad,bd) - B(bd,ad) + B(ac,bd) + B(bc,ad) \\
&= Q(ac) - Q(ad) + Q(bd) - Q(bc) \\
&\quad - B(ac,ad) + B(ad,ad) + B(cb,cb) - B(bc,bd) \\
&\quad - B(ac,bc) - B(bd,ad) + B(ac,bd) + B(bc,ad) \\
&\quad + B(ad,bc) - B(ad,bc) \\
&= Q(ac) + Q(bd) + B(ac,bd) \\
&\quad - Q(ad) - Q(bc) - B(ad,bc) \\
&\quad + B(ad,ad) + B(ad,bc) + B(bc,ad) + B(cb,cb) \\
&\quad - B(ac,ad) - B(ac,bc) - B(bd,ad) - B(bc,bd) \\
&= Q(ac+bd) - Q(ad+bc) \\
&\quad + B(ad+bc,ad+bc) - B(ac+bd,ad+bc) \\
&= \widehat{Q}([ac+bd, ad+bc]) \\
&= \widehat{Q}([a,b] \cdot [c,d])
\end{aligned}
$$

Literatur

[1] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian forms*, Springer, 1985.

[2] ———, *Quadratic forms*, Queen's papers in pure and apllied mathematics **22** (1969).

[3] M. Rost, *Scratches on multiplicative transfer*, 2001.

[4] ———, *On the Galois cohomology of Spin(14)*, preprint, 1999,2006.

[5] ———, *A Pfister form invariant for etale algebras*, preprint, 2002.

[6] T.Y. Lam, *The algebraic theory of quadratic forms*, W.A.Benjamin Inc., 1973.

[7] D. Husemoller and J. Milnor, *Symmetric bilinear forms*, Springer, 1973.

[8] S. McGarraghy, *Exterior powers of symmetric bilinear forms*, preprint, Linear Algebraic Groups and Related Structures, http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/lag/, 2001.

[9] S. Garibaldi, A. Merkujev, and J.-P. Serre, *Cohomological Invariants in Galois Cohomology*, University Lecture Series **28** (2003).