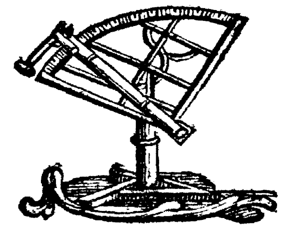
Beyträge
zum
Gebrauche
der
Mathematik
und deren Anwendung
durch
J. H. Lambert.

Mit Kupfern.



Berlin, 1765.
im Verlage des Buchladens der Realschule.

Vorbericht.

Ich liefere hier einige Abhandlungen, welche sämtlich dahin gehen, die mathematische Erkenntniß theils an sich zu erweitern, fürnemlich aber dieselbe sowohl in dem gemeinen Leben, als in der Naturlehre und bey Versuchen anwendbar zu machen.

In der ersten, welche auf die practische Geometrie geht, habe ich mir verschiedene Absichten vorgesetzt, welche theils die Auswahl der Materien, theils die Anordnung ihres Vortrages bestimmen. Denn einmal hat man die Vortheile und Kunstgriffe, welche die Algeber anbeut, bißher fast immer nur auf die Astronomie und Mechanik angewandt, die practische Geometrie aber fast ganz den Feldmessern überlassen. Daher kömmt es, daß man darinn nur noch die gemeinsten Aufgaben aufgelößt findet, und daß man die Ausmessungen aufgiebt, wo man keine Standlinie haben kann. Indessen ist es eigentlich das Thun der Analysten, daß sie auch für solche Fälle Mittel angeben, wo man mit den gemeinen Regeln der Feldmesser nicht ausreicht. Von solchen Fällen aber giebt die practische Geometrie eine Menge an, die nicht nur ungemein brauchbar sind, sondern, wenn sie auf eine schickliche Art aufgelöst werden sollen, auch dem scharfsinnigsten Analysten noch zu thun geben. Um aus vielen

vielen Beyspielen eines einigen Erwähnung zu thun, so setze man, ein Feldmesser befinde sich mit seinem Meßtischgen auf einem Schiffe, welches dem Ufer nach fortschift, so, daß er alle Objecte am Ufer und auf dem Lande sehen kann, und er soll alle diese Objecte und den Weg des Schiffes in Grund legen, oder in einen Riß bringen, so daß nur noch der Maaßstab dazu fehlt. Hier hat man nun keine Standlinie, und man kann nichts als die Winkel messen, die die Objecte an jedem Orte mit dem Schiffe machen. Diese Aufgabe findet sich §. 269.—277, und wenn man die Mittagslinie oder den Compaß dazu gebrauchen will, §. 107—116. umständlicher entwickelt und aufgelöst. Und von dieser Art kommen in gegenwärtiger ersten Abhandlung noch eine Menge anderer vor.

Sodann bemerke ich, daß die practische Geometrie in der wirklichen Welt angewandt wird, wo alles biß aufs Individuale bestimmt ist, und wo die Natur uns solche Data angiebt, von

welchen

welchen man in der theoretischen Geometrie ganz abstrahiren muß, weil diese nicht den Raum in der Natur, sondern an sich, und auf eine bloß ideale Art betrachtet. Es war demnach die Frage, solche Data, die in der Sache und in der Natur schon da sind, aufzusuchen, abzuzählen, und die Vortheile in ausführlichen Aufgaben vorzutragen, welche die practische Geometrie davon ziehen kann. Diß ist die zweyte Absicht.

Endlich war noch die Genauigkeit der Ausmessung mit deren Bequemlichkeit in Verbindung zu bringen. Was man nur beyläuftig zu wissen verlangt, muß eben nicht mühsam gesucht werden. Hingegen muß man sich etwas mehr Mühe gefallen lassen, wo man die äusserste Schärfe sucht, so oft diese nicht so leicht erhalten werden kann. Diese dritte Absicht habe ich mit den beyden erstern dergestalt verbunden, daß ich bey dem leichtesten, welches aber nur ein bey nahe giebt, bey der Theorie des bloßen Augenmaaßes anfienge, sodann

sodann die Data vorzählte, welche sowohl die Natur als die Sache selbst darbeut, und bey jeden Aufgaben den Grad der Genauigkeit und Zuverlässigkeit bestimmte, und endlich da, wo man die äusserste Schärfe sucht, die die Theorie der Fehler, so man im Ausmessen nicht vermeiden kann, und die Theorie der Folgen, die sie in Absicht auf den Grundriß nach sich ziehen, so wohl nach den einfachern als nach den zusammengesetztern Fällen beyfügte. Die besondern Abschnitte sind demnach

12.° Die Fehler im Observiren §. 309.
13.° Theorie der Folgen der Fehler §. 326.
14.° Folgen der Fehler in zusammen gesetzten Umständen §. 366.
15.° Die Auswahl der Standlinie §. 393.
16.° Das Mittel zwischen den Fehlern §. 427.

Alle diese Stücke dienen, die practische Geometrie zu erweitern, und die Ausübung bequemer und zuverläßiger zu machen, je nachdem man die Sache mehr oder minder genau zu wissen verlangt. Die meisten Aufgaben sind sowohl durch Rechnung als durch Construction aufgelöst, weil die Construction mehrentheils leichter, und daher in denen Fällen bequemer ist, wo man die gröste Schärfe entweder nicht verlangt, oder wegen der Umstände der Sache nicht erhalten kann.

Die zweyte dieser Abhandlungen gehört ebenfalls mit zur practischen Geometrie. Sie betrift aber einen ganz specialen Theil derselben, nemlich das Visiren

Visiren der Fässer. Dieses wäre nun für volle Fässer sehr leicht, wenn sie in der Mitte nicht bauchicht, sondern cylindrisch oder conisch wären. Man hat sich daher viele Mühe gegeben, eine bequeme und leichte Regel und Maaßstab oder Visirstab dazu zu erfinden. Bald stellte man sich die Fässer als zween abgestümpfte Kegel vor, bald sahe man ihren Innhalt als das Mittel zwischen zween Cylindern an, deren Diameter der Bodentiefe und der Spundtiefe gleich sind. Noch andere setzten, die Krümmung der Faßdauben sey parabolisch, und andere verwarfen diese Voraussetzung, weil die wahre Krümmung der Faßdauben unbekannt, und bald bey jeden Fässern verschieden ist. Bey allen diesen Umständen aber halte ich mich nicht lange auf, sondern fordere nur, daß die Krümmung einförmig und nicht merklich groß sey. Das erste, weil man bey höckerichten Fässern an keine allgemeine Regel sie zu visiren denken kann, das andere, weil es bey den Fässern wirklich statt findet, und weil man statt ihrer Krümmung den

Krümmungskreis gebrauchen kann. Diesen gebrauche ich sodann wirklich, und leite daraus theils Regeln zum Visiren, theils auch Visirstäbe her, welche sämtlich eben so leicht als das Mittel zwischen den erstgedachten beyden Cylindern sind, weil sie sämtlich darauf ankommen, daß man von dem grössern Cylinder $\frac{2}{3}$ von dem kleinern $\frac{1}{3}$ nehme, und sie zusammen addire. Alle Methoden werden sodann durch wirklich angestellte Versuche mit viererley Arten von Fässern geprüft, und mit den bißher üblichen verglichen. Für liegende Fässer, die nicht ganz voll sind, hat man noch gar keine genaue Methode sie zu visiren finden können. Ich habe daher einen Versuch angestellt, sie zu zergliedern, welcher glücklicher ausgefallen, als es Anfangs zu vermuthen war. Es ließe sich nemlich der Raum, der in solchen Fässern ausgefüllt ist, der Axe nach in 4 Ausschnitte zertheilen, welche theils prismatisch, theils pyramidal, theils auch considal sind, und wovon nicht nur jedes besonders gemessen, und mit dem Inhalte des Fasses vergli-

verglichen werden konnte, sondern die sich in eine Summe zusammenziehen ließe. Die hiebey herausgebrachte Regel wird §. 36. so vorgetragen, daß man sie ohne Figur verstehen kann. Ich habe sie sodann im folgenden zur Ausübung leicht und brauchbar gemacht, und ihre Genauigkeit durch einen wirklich angestellten Versuch gewiesen, bey welchem ein Faß von 1735 Maaßen so angefüllt worden, daß man nach jeden hineingegossenen 3 Eymern oder 96 Maaßen, die Höhe ausgemessen.

Die dritte Abhandlung betrift die Trigonometrie, und liefert Anmerkungen und Zusätze zu derselben. Die beyden Nepperschen Regeln für die rechtwinklichten sphärischen Triangel sind bekannt. Sie beziehen sich auf 10 verschiedene Fälle. Ich habe gefunden, daß sich auf der Kugelfläche 5 rechtwinklichte Triangel dergestallt im Kreise herum legen lassen, daß die Hypothenusen an einander liegen, und jede auf beyden Seiten um ihren Zusatz zu 90 Graden verlängert, einen Cathetum

thetum zu den beyden anliegenden Triangeln abgiebt. Dadurch ließen sich alle 10 Fälle der Nepperschen Regeln, auf eine leichte, nette, und in die Augen fallende Art vorstellen. Da diese Figur noch andere sehr schöne Eigenschaften hat, z. E. daß die fünf Triangel nebst der gedoppelten Fläche des Fünfeckes, welches sie einschließen, immer $\frac{3}{8}$ von der ganzen Kugelfläche ausmachen, so habe ich mich bey deren Betrachtung umständlicher aufgehalten. Da sich, wenn man die sphärische Trigonometrie auf allgemeine Formeln bringen will, alle Fälle, deren es 60 giebt, auf 4 reduciren lassen, so habe ich im folgenden von diesen vier Fällen schickliche Benennungen gegeben, und denen zu Folge die Fälle selbst in Formeln vorgestellt, und sie besonders auf die kürzeste Art bewiesen, besonders aber auch gezeigt, wie die dabey vorkommenden Irrationalitäten vermieden, und die Formeln zum Gebrauche der Logarithmen, wo man mit Zahlen rechnet, bequem gemacht werden können, z. E. wie man, wenn man die Ta-

geslänge weiß, die Höhe der Sonne für jeden Augenblick durch die bloße Addition dreyer Logarithmen finden könne ꝛc.

In der vierten Abhandlung kömmt eine Theorie von der Zuverläßigkeit der Beobachtungen und Versuche vor. Die Beobachtungen und Versuche, wobey etwas auszumessen ist, sind mit so vielen Individualien und Nebenumständen verflochten, daß sie selten oder niemals genau angestellt werden können. Es ist daher schon längst üblich, dieselben zu wiederholen, und das Mittel aus allen zu nehmen. Dieses that man aber bißher nur für diejenigen Fälle, wobey die wiederholten Versuche einerley Resultate gaben. Es sind auch an sich die leichtesten. Indessen giebt es noch mehr andere, wobey man das Mittel nicht so schlechthin nehmen kann. Von diesen kömmt nun hier fürnemlich die Theorie und ihre Anwendung und Erläuterung durch wirkliche Beyspiele vor. So z. E. hat man zu Paris schon über ein halb Jahrhundert alle Jahre die Zeit der Nachtgleichen und Sonnenwenden beobachtet, um daraus die Länge des Jahrs zu bestimmen. Von allen diesen Beobachtungen ist keine bis auf eine halbe oder ¼ Stund zuverläßig. Man kann leicht denken, das Mittel aus allen müsse ungleich zuverläßiger seyn, und die Frage ist demnach nur wie man es finden solle? Eben diese Frage kömmt auch bey der Länge des Penduls vor, welche man von dem Aequator bis zu dem Polarcircul gemessen hat. Sie kömmt ebenfalls bey den gemessenen Graden des Mittagscirculs, bey den beobachteten Barometerhöhen auf verschiedenen Bergen und bey unzähligen andern Fällen vor, wo das Mittel aus mehrern und von einander stuffenweise verschiedenen Beobachtungen zu nehmen ist. Bey allen diesen Fällen ist noch das Gesetz gegeben, nach welchem die Beobachtungen stuffenweise verschieden sind. Man hat aber z. E. seit 200 Jahren die Abweichung der Magnetnadel betrachtet. Oefters wurde etwan eine schlechte Nadel gebraucht, zuwei-

len die Mittagslinie nicht genau getroffen, und überdiß hat die Nadel täglich und stündl. kleine Veränderungen. Alles dieses macht, daß man aus diesen Beobachtungen das Mittel nehmen muß, um zu finden, nach welchem Gesetze sie sich verändert. Und die Frage ist wiederum, wie dieses Mittel müsse genommen werden. Die Theorie und Auflösung dieser ungemein brauchbaren und häufig vorkommenden Frage ist der Gegenstand der vierten Abhandlung, und die erst angeführten Beyspiele werden darinn nebst mehrern andern theils zur Erläuterung der Regeln, theils auch deßwegen umständlich abgehandelt, weil sie schon längst nach dieser Methode hätten untersucht und dadurch brauchbarer und zuverläßiger gemacht werden sollen.

Einige Druckfehler.

p. 32. §. 51 am Rande: Fig. 5.
p. 33. lin. 2. an statt gAE liese gAe.
p. 40. §. 64. am Rande: Fig. 8.
p. 45. §. 69. lin. 9. an statt AB liese AP.

Druckfehler.

p. 65. §. 96. lin. 2. an statt keine liese seine
p. 68. lin. 3. an statt E liese C.
lin. 4. an statt DCE liese DCB.
p. 161. §. 237. lin. 2. an statt AF liese AB.
p. 179. §. 259. am Rande Fig. 43.
p. 207. §. 298. am Rande Fig. 53.
p. 450. §. 40. lin. 7. an statt 182 liese $18\frac{1}{2}$
p. 458. lin. 7. an statt $\frac{1}{10}$ liese $\frac{1}{76}$

I.
Anmerkungen und Zusätze
zur
practischen Geometrie.

§. 1.

Wer kein ander Mittel weiß, wodurch die Länge der Linien, und der Abstand der Gegenstände kan gefunden werden, als daß man darüber gehen, und den angenommenen Maaßstab, so vielmal überschlagen sollte, bis man die ganze Länge durchgemessen, der macht ohne Bedenken den Schluß, daß alle Oerter, die unzugänglich sind, unmöglich ausgemessen werden können, und hält sich desto mehr berechtigt, so dreiste zu urtheilen, je offenbarer es ist, daß man den Weg nicht machen könne. Der gröste Theil der Menschen bleibt ungläubig, wenn man von der Entfernung der Gestirne spricht, und es gebraucht die ganze Erfüllung der astronomischen Weissagungen von dem Laufe der Sterne und den Finsternissen, um die Astronomie bey ihrem Credit zu erhalten.

§. 2.

Allerdings würden solche Schlüsse richtig seyn, wenn man nicht andere Mittel hätte, wodurch diese scheinbare Unmöglichkeit gehoben wird, die uns die edle Meßkunst, die gewisseste unter den menschlichen Wissenschaften angiebt. Diese zeigt uns, wie das Maaß unzugänglicher Linien auf andere reducirt wird, die man ausmessen kann, und daß eben die Winkel, welche dienen die Figur zu bestimmen, zu Bestimmung und Berechnung aller ihrer Theile können gebraucht werden.

§. 3.

Thut die Meßkunst hierinn ein Werk, welches in den Augen der Unwissenden mehr als recht scheinet, so bedient sie sich auf der andern Seite des gefundenen Vortheils, uns auch in denen Fällen, wo man die Linien gerade hin wirklich ausmessen könnte, diese Mühe zu sparen. Man kann unzählige Winkel messen, ohne sich von der Stelle zu bewegen. Die Bequemlichkeit dabey ist viel zu groß, als daß man sie nicht brauchen sollte, da durch die Ausmessung der Winkel die Ausmessung unzähliger

zähliger Linien auf eine einige gebracht wird. Ueberdiß wird ja nicht mehr wirklich ausgemessen, als zu Bestimmung des übrigen erfordert wird, und die Geometrie lehrt uns, wie man es auf die geringste Anzahl bringen, und sich bloß mit dem begnügen könne, was zureichend ist, die ganze Figur auf dem Papier zu entwerfen. Hat man dieses, so kann man bequem und ruhig in seinem Zimmer finden, wozu man sonst Jahre hätte gebrauchen müssen, oder vollends nicht hätte erreichen können.

§. 4.

In dieser Absicht kann man die Geometrie, und nach derselben auch die übrigen mathematischen Wissenschaften, eine **Wissenschaft der Trägheit**, oder wenn dieser Scherz zu hart ist, eine **Wissenschaft der Bequemlichkeit** nennen. In der That, was gab sich **Newton** für Mühe, um die wahre Figur der Erde zu bestimmen? Er bliebe ruhig in seinem Cabinette, und die Meßkunst gab ihm Gründe, worauf er seine Schlüsse baute, und seine Rechnung zum Ende brachte. Hingegen gebrauchte es Jahre, um eben diese Figur der Erde durch wirkliche Ausmessung zu bestimmen. Wer giebt sich die Mühe, den dritten Winkel eines geradlinichten Triangels auszumessen, wenn er die zween ersten weiß? Und wer durchläuft noch seine zwo andern Seiten, wenn er zu diesen beyden Winkeln die dritte Seite gemessen hat? Diese Mühe läßt man wohl bleiben, weil uns die Geometrie lehrt, daß sie so gut als schon ausgemessen sind.

§. 5.

Man sieht leicht, daß diese gedoppelte Absicht der Meßkunst ebenfalls die Absicht aller allgemeinen Wissenschaften seyn solle. Sie sollen uns in Stand setzen, aus einer geringen Anzahl allgemeiner Wahrheiten, dasjenige durch Schlüsse heraus zu bringen, was wir entweder gar nicht, oder doch nur durch mühsamere Erfahrungen finden könnten. In der Geometrie fallen diese beyden Absichten mehr in die Augen, und in der Ausübung derselben wird es als ein Fehler angesehen, wenn man, ohne besondere Gründe zu haben, auch nur den geringsten Umweg zuläßt, und mehrere Stücke ausmißt, als es zu Bestimmung der übrigen gebrauchte.

§. 6.

So wesentlich diese Absicht bey der Ausübung der Meßkunst ist, so scheinet sie mir noch nicht genug entwickelt, und es wird sich der Mühe lohnen, sie deutlicher aus einander zu setzen, und die Mittel, die dazu dienen, in gewisse Classen zu vertheilen. Allerdings giebt es darinn, wie in den übrigen Wissenschaften, noch Lücken, und diese werden nie ehender entdeckt, als wenn man die ganze Sache und ihre

ihre Theile in behörige Ordnung bringt. Man kann dabey sehen, ob noch ganze Classen, und in jeder Classe noch besondere Stücke fehlen.

§. 7.

In der theoretischen Geometrie beschäftigt man sich bloß mit den Verhältnissen und Vergleichungen der Theile einer Figur, und sucht, auf wie vielerley Arten diese einander bestimmen, wie viele man davon haben müsse, um die übrigen daraus zu finden, und nach welchen Regeln sie in der That können gefunden werden. Man entscheidet darinn, wie ferne die angenommenen Data beysammen seyn können, und wenn sie anfangen unmöglich zu werden, wie ferne folglich bey einer angenommenen Figur etwas willkührlich bleibt, was aus einigen angenommenen Stücken der Figur, für andere zugleich müssen angenommen oder als schon bestimmt angesehen werden, und wo das willkührliche dabey noch statt hat.

§. 8.

Die practische Geometrie hingegen beschäftigt sich mit Figuren, die wirklich vorhanden sind, und an welchen sich folglich nichts ändern läßt. Man kann dabey nichts als gegeben annehmen, als die allgemeinen Verhältnisse, welche die Theorie bestimmt hat, und aus diesen läßt sich schliessen, welche Theile der Figur müssen bekannt seyn, um die übrigen daraus

 zu

zu finden. Da man nun hiebey die wirkliche Grösse der Theile sucht, so müssen auch wirkliche Grössen dabey als bekannt angenommen, und daher in der That ausgemessen werden. Das Willkührliche, so dabey bleibt, besteht bloß in der Auswahl der Stücke, aus welchen man die übrigen finden kann. So z. E. wenn die Figur ein Triangel ist, dessen Seiten und Winkel sollen gemessen werden, so erweißt die Theorie, daß man dabey die Wahl behält, entweder 3 Seiten, oder 2 Seiten und einen Winkel, oder eine Seite und zween Winkel zu messen, und daß aus jeden dieser drey Stücke die übrigen können gefunden werden. Eine ähnliche Auswahl findet sich bey allen übrigen Figuren, und die Theorie bestimmt, wie weit sich dieselbe jedesmal erstreckt.

§. 9.

In der Ausübung giebt es dreyerley Umstände, welche das Willkührliche, so die Theorie zuläßt, auf viele Arten näher einschränken. Erstlich die Unmöglichkeit gewisse Linien und Winkel in der That zu messen. Dahin gehören die meisten Linien uud Winkel in der Astronomie und Geographie, und auch in kleinern Figuren, diejenigen, da man von einem Orte zu den übrigen weder gehen noch sehen kann. Diese Umstände machen, daß man viele theoretische Data in der Ausübung nicht gebrauchen kann, und daher wird die Auswahl auf

auf die eingeschränkt, die in unserer Gewalt sind, zu glücklich, wenn zuweilen noch ein einiges Mittel übrig bleibt.

§. 10.

Da man aber zu jeder Figur noch neue Linien und Winkel hinzusetzen, und selbige damit verbinden kann, daß wenn diese neue gefunden sind, auch die ganze Figur dadurch bestimmt wird, so erweitert sich dadurch das Willkührliche, weil man in vielen Fällen eine freye Wahl behält, diesen Zusatz nach Belieben anzunehmen. So z. E. ist bey Ausmessung eines Feldes die Standlinie und alle Linien und Winkel an derselben sehr willkührlich, und gewöhnlich machen sie keinen Theil der Figur aus.

§. 11.

Wenn aber bey der Figur selbsten, oder bey dem angenommenen Zusatze nach der Theorie alles willkührlich bleibt, so hat die Ausübung noch eine andere Einschränkung, die dabey einen merklichen Abbruch thut. Diese ist die Genauigkeit in der wirklichen Ausmessung und in den Folgen, die daraus entstehen. Die Instrumente, so man dazu gebraucht, lassen die vollkommene Schärfe nicht zu, welche die Theorie annimmt, und es ist mehr ein Glück, als ein Vorsatz, wenn das genommene Maaß mit der wirklichen Größe übereinstimt. Da man ferner von der Größe der Abweichung

chung nicht allemal versichert ist, so muß man die Sache gleichsam auf der schlimmern Seite betrachten, und wenigstens die Möglichkeit eines Fehlers zugeben, dafür man nicht stehen kann. Alles, was man thun kann, ist, daß man denselben so geringe mache als möglich ist. Die Güte der Instrumente, und die Sorgfalt im observiren ist dabey unentbehrlich. Man kann bey den verschiedenen Ausmessungen, welche die französischen Akademiker zu Bestimmung der Grösse eines Grades auf dem Erdcirculn vorgenommen, als Proben ansehen, wie weit man es hierinn gebracht, und auf wie viele kleine und unbeträchtliche Umstände man zu sehen hat, wenn man einen Fehler vermeiden will, der nicht einen tausendsten Theil des Ganzen betrage.

§. 12.

Was aber dabey einen vorzüglichen Einfluß hat, ist die Auswahl der Stücke der Figur oder ihres Zusatzes, wodurch man dieselbe bestimmen, und die übrigen Theile finden will. Die Folgen, die ein Fehler in Absicht auf die ganze Figur hat, sind sehr ungleich, und hängen nicht bloß von dem Fehler selbsten, sondern von seinem Verhältnisse zu den übrigen Linien ab. Diese Folgen lassen sich durch die Theorie auf Regeln bringen, von welchen *Marinoni* in seinem weitläuftigen Werke *de re ichnographica* bereits verschiedene angegeben, und durch

durch ausführliche Beyspiele erläutert hat. Wir werden sie in dem folgenden in die Kürze ziehen, und mit Zusätzen, die *Marinoni* nicht mitgenommen, vollständiger zu machen suchen.

§ 13.

Die Genauigkeit, die man bey Ausmessung der Figuren zu erhalten sucht, hat verschiedene Stuffen, und man muß jedesmal aus der Absicht, die man dabey hat, bestimmen, wie weit man darinn gehen solle. Es wäre überflüßig eine Sache, die man nur beyläufig zu wissen verlangt, mit eben der Schärfe zu suchen, die man bey Ausmessung der Grade der Erde gebraucht hat. Wiederum giebt es Umstände, die nothwendig keine scharfe Bestimmung zulassen, und überhaupt muß entweder alles genau seyn, was Folgen nach sich ziehen kann, oder wenn diß nicht angeht, so ist das *proxime* zureichend. Man findet nicht wenige Beyspiele, wo bis auf einen Umstand, der aber alles wieder verderbt, die gröste Sorgfalt gebraucht worden. Und dieß ist eben so viel, als wenn man sie nicht gebraucht hätte.

§ 14.

Das dritte Stück, welches das willkührliche in der Ausübung der Meßkunst, näher einschränket, ist die Bequemlichkeit, und die Erspahrung unnöthiger Arbeit. Wir haben schon angemerket, daß die ganze Geometrie dahin zielet, daß man aus der geringsten Anzahl wirklich ausgemessener Stücke einer Figur die übrigen alle wie von sich selbst finden könne. Da man aber dabey doch wirklich etwas ausmessen muß, so kommt es auf die Stücke an, welche nicht nur am leichtesten und bequemsten gemessen, sondern aus welchen auch die übrigen am bequemsten und sichersten gefunden werden können.

§ 15.

Diese beyden Absichten stimmen selten mit einander überein, wenn man sie beyde erhalten will. Die Bequemlichkeit fordert die geringste Anzahl und die leichtesten Ausmessungen, und die nächsten, so man haben kann, sind die besten. Wenn man aber alles genau wissen, und den Fehler, den man etwan in der Ausführung begangen, schätzen will, so muß man mehr Winkel und Linien wirklich ausmessen, als vonnöthen wäre, und überdiß solche Seiten und Winkel wählen, welche dem geringsten Fehler unterworfen sind. Dieses macht überhaupt die ganze Arbeit richtiger, und jenes dienet dieselbe zu prüfen, und die Größe des Fehlers aus seinen Folgen zu schätzen, und die erträglichste Verbesserung dabey vorzunehmen Wird aber die Genauigkeit so strenge nicht gefordert, so kann man auch

auch die Mittel wählen, welche in der Ausübung leichter sind. Ueberhaupt hat man schon längstens die Ausmessung der Winkel der Ausmessung der Seiten vorgezogen, und die ganze Arbeit dahin gebracht, daß man nur eine Linie ausmessen dürfe, und das übrige alles durch Winkel finde. Die Anzahl der auszumessenden Winkel vermindert sich ohnedem, weil man aus zween Winkeln eines jeden Triangels den dritten zugleich bestimmt hat, und ohne Mühe finden kann.

§ 16.

Aus diesen vorläufigen Betrachtungen läßt sich die Ordnung unserer Abhandlung bestimmen. Da die Genauigkeit der Bequemlichkeit mehrentheils entgegen steht, so werden wir Anfangs der letztern, nachgehends der erstern alles einräumen, und stuffenweise von dem ungefehr und bey nahe zu der grösten Schärfe gehen. Man sieht, daß die Leichtigkeit der Ausübung mit dieser Ordnung fast eben so abnimmt, wie die Genauigkeit zunimmt. Was man nur beyläufig zu wissen verlangt, muß eben nicht erst mühsam gesucht werden, und wo man hingegen die gröste Richtigkeit fordert, da muß man sich auch unbequemere Mittel gefallen lassen. Ich habe versprochen die ganze Sache in gewisse Classen zu bringen, und werde sie nun der Ordnung nach durchgehen. Man kann dabey

dabey sehen, wo ich noch Lücken lasse, und wo noch einzele Stücke oder auch ganze Classen fehlen.

I. Vom Augenmaaße.

§ 17.

Wir machen hiervon den Anfang, weil die Schätzung der Größe und Entfernung der Gegenstände durch das bloße Anschauen zugleich am wenigsten mühsam ist, und im eigentlichsten Verstande nur ein Ungefehr geben kann. Die Fälle, wo man etwas nur dem Auge nach schätzet, sind so häufig, daß nicht leicht jemand seyn wird, dem sie nicht mehrmahlen vorgekommen wären. Es giebt überdieß ganze Lebensarten und viele besondere Anlässe, wobey fast alles auf ein gutes Augenmaaß ankömmt. Daher es sich der Mühe lohnt, dasselbe in seinem weitläuftigsten Umfange zu betrachten, und den mannigfaltigen Gebrauch, den man davon machen kann, in allen seinen Theilen zu zeigen.

§ 18.

Insgemein versteht man durch das Augenmaaß eine Fertigkeit aus dem scheinbaren Bilde der Sache auf ihre wahre Größe zu schliessen, und bey den Malern besteht es bloß in der Fertigkeit, dieses scheinbare Bild nachzu-

nachzuzeichnen, damit das entworfene Bild dem Urbilde in allem ähnlich werde. Wir werden im folgenden sehen, daß man auch dadurch zu der Schätzung der wahren Grösse der Sache in vielen Fällen gelangen kann. Allein dieser gedoppelte Verstand des Augenmaaßes ist zu unserer Absicht noch viel zu enge. Wir müssen denselben so erweitern, daß wir alle Mittel, durch das Auge auf die Größe der Gegenstände zu schliessen, darunter begreifen, es mag nun durch eine bloße Schätzung aus dem Anscheine, oder durch Constructionen, die man mit dem Auge macht, um die Lage und Größe der Sachen daraus vermittelst geometrischer Lehrsätze zu schließen, oder endlich durch die optischen Lehrsätze von dem Orte des Bildes geschehen, so wird es immer zum Augenmaaße können gerechnet werden, wenn man dadurch ohne sich von der Stelle zu bewegen, den Schluß auf die Grösse, Lage und Abstand der Sache machen kann.

§ 19.

Indem ich diese Sache so weit ausdehne, so geschieht es allerdings nicht, um die Abhandlung darüber eben so vollständig zu machen. Was ich darüber sagen werde, kann man als abgebrochene Stücke davon ansehen, und aus ihrer Vergleichung mit dem Ganzen, wird man die Lücken finden, die noch auszu-

auszufüllen sind. Unter allem, was man bisher in der Optic abgehandelt hat, ist der Ort des scheinbaren Bildes der Sache noch den meisten Schwürigkeiten unterworfen. Es sey, daß die Theorie desselben in der That auf vielerley Gründen beruhet, die man noch nicht alle gefunden, noch behörig unter einander verbunden hat, oder daß noch ein allgemeiner Grund darunter verborgen liege, den man noch nicht entdecket hat, so geht es noch nur in wenigern Fällen an, daß man diesen Ort bestimmen kann. Hr. Smith hat sich darinn die meiste Mühe gegeben, und seine Gedanken kann man in seinem und Hrn. Prof. Kästners Lehrgebäude der Optic nachsehen. Ich werde hier nur so viel anführen, als sich zu gegenwärtigem Vorhaben, wenigstens meines Erachtens, genauer bestimmen läßt.

§. 20.

Aus der Beschreibung, die uns Hr. Cheselden von einem Blinden, dem er zu Gesichte geholfen, und von den ersten Eindrücken giebt, die die sichtbaren Gegenstände bey ihm gemacht, hat man geschlossen, daß wir von Kindheit an auf eine ähnliche Art sehen lernen, wie gehen, und daß der Begriff, den wir von dem Abstande der Sachen durch das bloße Anschauen haben, erst durch eine Uebung und mit Hülfe des Gefühls erlangt werde. Entlegenere Sachen machen allerdings einen andern Eindruck in das Auge als nahe. Aber damit wir aus dem Unterschiede dieses Eindrucks erkennen können, daß jene weiter weg sind, als diese, diß liegt nicht in dem Eindrucke, sondern wir müssen die Unterscheidungsstücke durch ein ander Mittel kennen lernen, und diese sind Zeit, Geschwindigkeit und Bewegung.

§. 21.

Laßt uns von diesen Unterscheidungsstücken die drey bekanntesten zur Erläuterung näher betrachten. Man weiß daß entfernte Sachen blasser, kleiner und undeutlicher aussehen als nähere. Alle diese drey Merkmale, woraus man auf die Entfernung schließt, enthalten den Begriff einer Vergleichung. Man muß gelernt haben, daß eben diese Sache in der Nähe eine stärkere Farbe, eine ansehnlichere Größe, und eine merklichere Deutlichkeit und Entwicklung der kleineren Theile dem Auge vorstelle, und wenn wir nicht mit diesen sondern mit jenen den Begriff der grössern Entfernung verbinden sollen, so müssen wir denselben aus der Veränderung des Ortes lernen. Den Abstand messen wir durch die Zeit, die wir aufwenden, um uns von dem Gegenstande wegzubegeben, und diesen Begriff des Abstandes lernen wir allgemach mit dem Eindrucke verbinden,

binden, den das scheinbare Bild der Sache im Auge macht. Ist uns das Bild der Sache, von nahe betrachtet, bekannt, so wird der Schluß, den wir von seiner Entfernung machen, wenn wir diese dreyfache Abänderung in ihrem Bilde bemerken, desto richtiger, je mehr wir Gelegenheit gehabt haben, solche Sachen in einer wirklich abgemessenen Entfernung zu sehen, die Entfernung mag nun in Stunden Weges oder in Schritten angegeben seyn. Es ist leicht zu erachten, daß man in solcher Schätzung durch öftere und genauere Uebungen ein richtigeres Augenmaaß erlangen kann.

§. 22.

Bey nähern Sachen mag der Winkel, den beyde Augenaxen mit einander machen, ebenfalls etwas dazu beytragen, und sieht man dieselbe hinter einer Reyhe von bekannten Gegenständen, so macht man auch auf ihre Entfernung einen richtigern Schluß, weil man sie dadurch gleichsam abmißt.

§. 23.

So lernen wir von Kindheit an die Entfernung der Sachen aus dem Eindrucke schätzen, den ihr scheinbares Bild in den Augen macht. Es erstrecket sich aber diese Schätzung nicht weiter als die Erfahrungen, die wir gehabt haben. Die übrigen erreichen wir

wir durch Schlüsse, die wir ohne daran zu gedenken, aus der Aehnlichkeit des Eindruckes auf die Aehnlichkeit des Abstandes machen, und wo der Abstand der Sache selbst nicht kann bestimmt werden, da schliessen wir bloß auf den Abstand ihres Bildes, welches in vielen Fällen ungleich näher ist als die Sache selbsten. So setzen wir dem Augenschein nach alle Sterne in die Luft, und auf eben die Art stellt sich uns der Himmel unter dem Bilde eines Gewölbes vor, dessen Höhe über dem Boden ungefehr der 6te oder 7te Theil seines Diameters ist, wie solches in vorangezogenen optischen Lehrgebäuden durch sinnreiche Observationes bestimmt wird.

§. 24.

So richtig der Grundsatz ist, den wir hier annehmen, daß wir nemlich aus der Aehnlichkeit des Eindruckes auf die ähnliche Entfernung der Sache, oder wenigstens ihres Bildes schliessen; so schwer ist es die verschiedene Stücke aus einander zu setzen, aus welchen dieser Eindruck besteht, und zu bestimmen, was jedes davon zu dem Schlusse, den wir machen, beyträgt. Es ist gewiß, daß nicht allemal alle beysammen sind, und wenn einige fehlen, so ist auch gemeiniglich unser Urtheil über die Entfernung der Sache unrichtig, ungeacht es in Ansehung der Entfernung ihres Bildes auch dann noch zutrift.

§. 25.

Die Art, wie wir nach und nach zu diesen Urtheilen gelangen, muß sehr allgemein seyn. Sie gründet sich allerdings auf die Structur des Auges, und scheinet bey allen Menschen auf eine ganz ähnliche Weise zugleich mit den Vorurtheilen die damit verknüpft sind, zu entstehen. In den meisten Fällen täuscht uns das Auge auf eine ähnliche Art, und man kann die scheinbare Wölbung des Himmels als einen Beweis davon ansehen. Das Bild des Mondes wird uns, in gleichen Umständen betrachtet, über einem und eben demselben Orte der Erde zu stehen scheinen. Hr. Smith führt besondere Observationen an, wie er nebst vielen andern gefunden, daß ein gewisser Punkt am Himmel über einem gewissen Punkte der Erde von allen einmüthig zu stehen geschienen habe.

§. 26.

Wir gebrauchen eben diesen Grundsatz bey gebrochenem und reflectirtem Lichte. Wir setzen das Bild der Sache hinter den flachen Spiegeln, und in den übrigen Fällen überhaupt an den Ort, aus welchem die Stralen in das Auge kommen müßten, um eben den Eindruck zu machen, den das Bild macht. Die Zurückwerfung und Brechung des Lichtes ändert den Ort des Bildes, und allem Ansehen nach geschieht dieses auch in der Luft, so

so geringe die Stralenbrechung darinn seyn mag. Man kann sich durch folgende Observation versichern, daß die Gegenstände, die in der höhern Luft sind, viel näher scheinen, als gleich entfernte Gegenstände auf dem Horizonte.

§. 27.

Es ist bekannt, daß die Sonnenstralen öfters zwischen den Wolken durchscheinen, und sich dem Auge als helle Striemen vorstellen, bey deren Erblickung man sagt, daß die Sonne Wasser ziehe. Diese Streifen sind in der That unter sich parallel, weil alle Sonnenstralen in einer parallelen Richtung durch die Luft fahren. Allein so kommen sie dem Auge nicht vor, sondern scheinen alle wie Radii eines Circuls in dem Bilde der Sonne sich zu vereinigen. Der Grund hievon wird aus der Perspective genommen, wo man zeigt, daß ein langer paralleler Gang sich eben so in die Ferne zusammen zu ziehen scheine.

§. 28.

Es sey nun AB die Erdfläche, S das Bild der Sonne, C das Bild zwoer Wolken, zwischen welchen die Sonnenstralen auf erstbesagte Art auf den Ort B zu fallen scheinen. Der Zuschauer sey in A, so ist SAB die Höhe der Sonne, und alle Stralen derselben sind der Linie SA parallel. Daher müssen Fig. 1.

sen die Stralen, die auf B fallen, nicht die scheinbare Lage SCB haben, sondern sie fallen nach der parallelen Richtung DB darauf. Und die beyden Wolken, die in C zu seyn scheinen, müssen gleichfalls in D seyn, wo die Linien ACD und DB einander durchschneiden. Es ist also offenbar, daß das Bild C dem Zuschauer in A viel näher ist, als die Wolken selbst, und dieses wird noch augenscheinlicher, wenn man bedenket, daß nach dieser Construction B nur das Bild des Ortes ist, wie es in A scheinet, und daß der wahre Ort weiter muß hinaus gerückt werden. Setzen wir demnach, er sey in b, so ist wieder klar, daß die beyden Wolken noch weiter hinweg in d seyn müssen. So groß man also den Unterscheid Bb macht, so wird der Unterscheid Cd immer grösser seyn. Es müssen uns derowegen die Wolken immer näher scheinen, als gleich entfernte Gegenstände auf dem Boden. Daß aber AB entfernter scheinen könne als AS, kann man fast in allen Fällen sehen, wenn die Sonne Wasser zieht.

§. 29.

Aus gleichem Grunde scheinen die Gipfel der Berge und besonders der Alpen ungleich viel näher zu seyn, als sie wirklich sind. Man kann es augenscheinlich sehen, wenn man dieselbe gerade vor sich und sodann seitwerts im Profil ansieht. Im ersten Fall scheinet seine Fläche unter einem Winkel von 50 bis 60 Gr. aufwerts zu gehen, da es sich im andern Falle zeigt, daß es kaum 20 Gr. sind. Wenn sie, wie eine Wand gerade aufstünden, so könnte es, zumal wenn man sie nahe bey dem Fusse anschaute, geschehen, daß sie vorwerts zu hangen schienen.

§. 30.

In so ferne also das Bild entfernter Sachen in der Luft, näher scheinet als die Sachen selbst sind, so ist nothwendig, daß sie auch kleiner scheinen müssen, weil wir nach dem Augenmaaße die Grösse der Sachen nicht bloß nach dem Winkel schätzen, den sie im Auge machen, sondern auch aus ihrer Entfernung.

§. 31.

Da die Sachen die in der Luft erhoben sind, so merklich näher scheinen, so ist vermuthlich, daß wir vielmehr daraus als aus perspectivischen Gründen herleiten müssen, warum ein hoher Thurm vorwerts zu hangen scheint, wenn man ihn vom Fuße herauf betrachtet, und warum, wenn man von oben herunter auf die Gasse schaut, die Leute, so darauf sind, viel kleiner scheinen, als sie sonsten in gleicher Entfernung dem Auge vorkommen. Es sey der Thurm AB, dessen Spitze B man aus C betrachte. Ist nun ihr Bild näher in D, so wird die ganze Seite AB die Lage AD zu haben, und folglich um den Winkel Fig. 2.

kel BAD vorwerts zu liegen scheinen. Wiederum wenn der Zuschauer in B ist, und Leute auf dem Boden AE sieht, so scheint der ganze Boden ungleich viel höher zu seyn, als vorhin die Spitze B niedriger schiene. Dessen Bild ist also in EF, und es ist offenbar, daß die Leute und andere Gegenstände auf demselben kleiner scheinen müssen. Denn da sich der Winkel, aus welchem man sie sieht, durch diese Verkürzung des scheinbaren Abstandes nicht ändert, so schätzt man die wahre Grösse bloß aus dem Abstande, und folglich um desto kleiner, je mehr derselbe geringer scheint.

§. 32.

Aus gleichem Grunde scheinen auch die obere Theile des Thurmes von unten herauf betrachtet, kleiner, als sie in einer gleichen horizontalen Entfernung scheinen würden. So z. E. werden die Zifferblätter an den Uhren, die man an den meisten Glockenthürmen sieht, von unten herauf betrachtet, viel kleiner geschätzt, als sie wirklich sind, und man verwundert sich über ihre Grösse, wenn man sie oben auf dem Thurme vor sich sieht. Eben dieses findet sich bey den Bergen, wie wir oben schon erwänt haben.

§. 33.

Aus diesen Betrachtungen erhellet, daß wir nicht die Sachen selbst sondern ihr Bild

sehen, und daß dieses Bild bey gleichem Abstande der Sache, um desto näher bey dem Zuschauer ist, je grösser der Unterschied ihrer Erhöhung in der Luft ist. Die Schätzung des wirklichen Abstandes wird daher überhaupt richtiger seyn, wenn der Gegenstand auf einer horizontalen Ebene liegt, und wenn mehrere Gegenstände unter einander zu vergleichen sind, so werden wir in folgendem sehen, daß die Vergleichung unter eben dieser Bedingung besser angehe. In den übrigen Fällen schätzen wir nur den Abstand des Bildes, und der Schluß den wir daraus auf den wahren Abstand der Sache machen müssen, gründet sich auf die allgemeine Theorie vom Orte des Bildes, welcher aber noch lange nicht ins reine gebracht ist.

§. 34.

Wir wenden uns demnach zu dem andern Gebrauch des Augenmaßes, und werden untersuchen, wie ferne man mit dem Auge geometrische Constructionen nachahmen, und dadurch, wo nicht auf die Grösse der Sache, doch wenigstens auf die Verhältniß ihrer Theile schliessen kann.

§. 35.

Die geometrischen Constructionen gründen sich alle auf das Linial und den Zirkel, und die übrigen Instrumente, die man dazu gebraucht, sind nur Abkürzungen von diesen beyden. Das Linial dient schlechthin gerade Linien zu ziehen, und der Zirkel dient, um sie zu fassen und abzutragen, desgleichen auch um Winkel zu ziehen, und den Linien ihre behörige Lage zu geben.

§. 36.

Um nun zu sehen, wie ferne das Auge eben dieses thun kann, wollen wir bey dem leichtern Falle anfangen, und setzen, die Fläche, auf welcher die Gegenstände liegen, sey eine horizontale Ebene, welche sich bis an den äussersten Horizont erstrecket, und das Auge sey über derselben so weit erhaben, als zureichend ist, um die ganze Figur, die man sich entwerfen will, zu übersehen.

§. 37.

Sodann nehmen wir auch hier den geometrischen Heischsatz an, daß man auf dieser Fläche von jedem Punkte zu jedem andern mit dem Auge eine gerade Linie ziehen, und dieselbe, wo es nöthig ist, auf jeder Seite bis an den Horizont hinaus verlängern könne. Der leichteste und richtigste Fall, wo dieses angeht, ist wenn der Observator selbst auf dieser Linie steht. Denn es ist klar, daß man von seinem Fusse weg gegen alle Ende des Horizonts mit dem bloßen Auge eine gerade Linie ziehen kann. In den übrigen Fällen habe

habe ich gefunden, daß man unter der Voraussetzung erst angeführter Bedingnisse (§. 36.) selten merklich fehlt. Ich habe nemlich auf einer Ebene durch zween Gegenstände, z. E. durch zween Bäume, die mehr oder minder von mir weg waren, die Linie bis an den Horizont verlängert, und am Horizonte bemerkt, wo sie hintrifft. Sodann bin ich zu dem einen Baume gegangen und habe gesehen, ob derselbe den andern und zugleich das am Horizonte bemerkte Zeichen bedeckte. Es hat immer näher zugetroffen, als ich es vermuthet hätte. Wiederum habe ich bey einem Spatziergange einem meiner Freunde, der ein Maler war, eben diese Frage vorgelegt, und bey angestelltem Versuche haben wir jede vorgegebene Linie an den Horizont hinausgezogen, und das Augenmaß traf bey beyden ordentlich zusammen, als jeden zween Stäbe gegen den bemerkten Ort des Horizonts gerichtet.

§. 38.

Dieser Heischsatz ist der einige, den wir zu unserer Construction gebrauchen werden. Diese wird folglich desto richtiger seyn, je mehr das Auge in Verlängerung der Linien bis an den Horizont geübt ist. Das übrige, so dazu gehöret, beruhet auf folgenden Lehrsätzen.

§. 39.

Wenn man parallele Linien bis an den Horizont verlängert, so scheinen sie daselbst

 in

in einen Punkt zusammen zu treffen. Dieser Satz wird eben so wie in der Perspective bewiesen. Denn die ganze Aussicht bildet auf dem Augennetze einen perspectivischen Abriß der Figur. Der scheinbare Abstand der Parallellinien wird mit der Entfernung geringer, und verschwindet vor dem Auge, wenn man die Parallellinien bis an den Horizont hinauszieht. Es ist für sich klar, daß die Entfernung des Horizontes in Absicht auf den Abstand der Parallellinien so groß angenommen werde, daß dieser Abstand auch an dem Horizonte betrachtet, keine merkliche scheinbare Grösse behält. So viel von dieser Voraussetzung abgeht, so viel wird auch an der Richtigkeit des Satzes fehlen. Man sieht leicht, daß ein sehr entfernter Horizont, und ein kleinerer Abstand der Parallellinien den Satz richtiger machen. Wir nehmen ihn hier in aller Schärfe an.

§. 40.

Hinwiederum wenn zwo bis an den Horizont verlängerte Linien daselbsten zusammentreffen, so sind sie einander parallel. Denn da sie sich nirgends durchschneiden als an dem Horizonte, so machen sie einen unendlich kleinen Winkel, folglich können sie als parallel angesehen werden.

§. 41.

§. 41.

Man kann also mit jeder fürgegebenen Linie aus jedem Punkte eine Parallellinie ziehen. Man verlängere die fürgegebene Linie bis an den Horizont, und bemerke daselbst den Punkt wo sie hintrift. Aus diesem ziehe man eine Linie durch den fürgegebenen Punkt, so ist diese mit der ersten parallel.

§. 42.

Hieraus ergiebt sich ferner ein Mittel, die mit dem Auge gezogene Linien zu prüfen, ob sie gerade gezogen worden. Man verlängere die fürgegebene Linie auf beyden Seiten bis an den Horizont, und bemerke daselbst die Punkte, wo sie hintreffen. Diese beyden Punkte müssen einander gegen über stehen, oder an dem Himmel 180. Grad von einander entfernt seyn. Ziehet ihr demnach von eurem Fusse eine gerade Linie bis in einen dieser Punkte, so muß eben diese Linie auf der andern Seite verlängert in den andern Punkt treffen. Findet sich dieses nicht, wie es denn sich zutragen kann, wenn die vorhin angeführte Voraussetzung (§. 39.) nicht vollkommen statt hat, so muß man beyden Punkten am Horizonte gleich viel zugeben, bis die corrigirten Punkte mit dem Observirorte in gerader Linie liegen, und diese wird sodann mit der fürgegebenen verlängerten

Linie

Linie parallel seyn. Und dieses ist das erste Mittel die mit dem Auge gemachte Construction zu verbessern.

§. 43.

Da diese Construction mit dem Augenmaaße geschehen kann, ohne daß man sich von der Stelle bewegen darf, so wollen wir Kürze halber ein Meßtischgen dabey gebrauchen, sonsten müßte man nach Art der ersten Geometer die Figur auf dem Sande zeichnen. Sodann werden wir das ganze Verfahren perspectivisch vorstellen, weil nicht nur die Beweise eine Aehnlichkeit mit den perspectivischen Aufrissen haben, sondern auch, weil wir dadurch die Verlängerung der Linien bis an den Horizont bequemer vorstellen können.

§. 44.

Fig. 3. Es sey demnach EG der Horizont, A, B, C drey Objecte, und diese sollen in a auf dem Meßtischgen nach dem Augenmaaße so entworfen werden, daß die Figur im kleinen der Großen ähnlich sey. Verlängert die beyden Seiten AB, AC mit dem Auge bis an den Horizont in F und G, und wählet auf dem Meßtischgen einen Punkt a, aus welchem ihr gleichfalls Linien aF, aG in die Punkte F und G ziehet, so sind diese den Linien AF, AG parallel. Nehmet ferner auf aG den Punkt c an,

c an, so daß ac die Seite AC vorstelle. Verlängert sodann die dritte Seite CB bis an den Horizont in E, und in eben diesen Punkt E ziehet die Linie cbE, so ist der △ abc der Abriß des Triangels ABC.

§. 45.

Alle Seiten dieses Abrisses sind mit den Seiten des Urbildes die sie vorstellen parallel, weil sie in gleiche Punkte des Horizonts laufen, daher muß der △ abc dem △ ABC ähnlich, und in beyden die gleichnahmige Winkel von gleicher Größe seyn. Ueberdiß haben sie auch in Absicht auf die Weltgegenden einerley Lage, und in beyden △ weichen die gleichnahmige Seiten gleich viel von der Mittagslinie ab.

§. 46.

Ferner sieht man, daß die Linie AC und ihr Abriß ac als eine Standlinie angesehen werden könne, auf welche man einen jeden andern Punkt B reducirt. Wenn also ausser B noch viele andere Punkte auf dem Felde herum liegen, und auf das Meßtischgen sollen gebracht werden, so ist offenbar, daß es vermittelst der angenommenen Linien AB, ab auf eben die Art geschehen kann, wie wir es in Ansehung des Punkts B gewiesen haben.

§. 47

§. 47.

Könnte man sich demnach auf die Verlängerung jeder Linie bis an den Horizont vollkommen verlassen, so wäre dieses unstreitig das leichteste Mittel aus einer einigen Station die weitläuftigste Figur in Grund zu legen. Wir haben aber schon bemerkt, daß das Augenmaaß nur ein bey nahe geben kann, es wird daher auch nur in denen Fällen dienen, wo eine beyläufige Entwerfung der Figur zu unsern Absichten zureichend ist. Solcher Fälle aber giebt es viele, und wir werden unten einige derselben anführen, wobey uns diese ungefehre Bestimmung zu der grösten Schärfe sehr dienlich seyn wird.

§. 48.

Was übrigens diese Methode vorzügliches an sich hat, ist, daß man sie durch sich selbsten prüfen, und daher die Abweichungen denen das Augenmaaß unterworfen ist, so viel man will, verbessern kann. Wir haben eines dieser Mittel bereits angeführt (§. 42.) und werden nun das andere, welches von allgemeinerm Gebrauche ist, folgendermaaßen vorstellen.

§. 49.

Fig. 4. Es sey wiederum EG der Horizont, A, C zwey Objecte, und das Meßtischgen in D. Ziehet aus dem Punkte D, welcher den Standpunkt vorstellt, Linien in A und C, so habt ihr die Lage dieser beyden Linien so scharf ihr sie verlanget, weil diese nicht von dem Horizonte abhängen, und daher auch keine Correction nöthig haben. Wählet auf der Linie DA den Punkt a, welcher den Punkt A vorstelle. Sodann verlängert mit dem Auge die Linie AC bis an den Horizont in G, und in eben diesen Punkt ziehet auch die Linie acG, so ist der △ acD der Abriß des △ ACD, und es ist klar, daß in demselben nichts als die Ecke c, welche aber dennoch auf DC liegen muß, zweifelhaft seyn kann.

§. 50.

Dieser Zweifel kann vermindert werden, wenn ihr euch von der Lage des Punkts G nach der vorhin gegebenen Methode (§. 42.) mehr versichert, welche bey allen Verlängerungen der Linien nützlich gebraucht wird. Um aber dieses noch auf eine andere Art zu thun, und zugleich noch einen andern Punkt B auf das Meßtischgen zu bringen, so ziehet erstlich die Linie DB, und es ist offenbar, daß ihre Lage keiner Verbesserung bedarf, und der Abriß des Punkts B auf dem Meßtischgen nothwendig auf DB liegen muß. Verlängert sodann mit dem Auge die beyden Seiten AB, CB bis an den Horizont in F und E, und in eben diese Punkte F, E ziehet aus a und c die Linien aF, cE. Sind nun die Verlängerungen der

der drey Seiten des $\triangle$ ABC richtig gemacht worden, so müssen die beyden Linien cE, aF sich auf der Linie DB in b durchschneiden, und Dabc wird der Abriß des Viereckes DABC seyn. Treffen aber die Linien cE, aF, DB nicht zusammen, so könnet ihr die Lage der Punkte E, F, G nochmals untersuchen, um zu sehen, ob der eine schwerer zu finden wäre, als der andere, welches wegen zwischenliegender Gegenstände und wenn die Fläche nicht sehr eben und frey offen ist, leicht geschehen kann. Wäre aber der Fehler nicht zu erkennen, so könnet ihr folgendes Mittel nehmen.

§. 51.

Fig. 5. Es seyen DA, DB, DC, Ad, cb, die auf dem Meßtischgen gezogenen Linien, so daß die 3 Punkte b, d, f in B sollten zusammentreffen.

1) Setzet der Fehler liege ganz auf der Linie Ac, so ziehet dg mit bc parallel, und da ist klar, daß d und g die beyden Objecte B, C wären, weil Ab bleibt, und cb ihre parallele Lage behalten muß, zieht also Ad.
2) Setzet, der Fehler sey allein an der Linie Ab, so liegt Ac und cb recht, und folglich muß b auf f fallen, ziehet demnach Af.
3) Endlich werfet den ganzen Fehler auf die Linie cb, so ist klar, daß man dafür cd ziehen müsse.

Es

Es sind demnach die Fehler dAf, dcb, gAe die unter diesen drey Voraussetzungen jedesmal wären begangen worden, weil die Linien Af, cd, Ag um so viel von den anfangs gezogenen Ad, cb, Ac abweichen. Verringert diese Abweichungen auf ihren dritten Theil, und ziehet die Linien AB, AC so, daß $bAB = \frac{1}{3}\,bAF$, $CAc = \frac{1}{3}\,gAC$ sey. Endlich macht auch $ecb = \frac{1}{3}\,dcb$, und zieht CB mit ce parallel, so wird A, B, C die corrigirte Lage der gesuchten 3 Objecte seyn.

§. 52.

Man sieht aus dieser Verbesserung, daß man sie kürzer erreichen kann, wenn man $dB = \frac{1}{3}\,df$, und $Cc = \frac{1}{3}\,cg$ macht, und sodann die Linien AC, CB, BA zieht. Denn die Punkte d und c sind in zweyen Fällen, die Punkte g und f aber nur in einem Fall richtig.

§. 53.

Hat man ausser den drey Punkten A, B, C Fig. 4. noch mehrere auf das Meßtischgen zu bringen, so ist offenbar, daß es auf eben die Art geschehen kann, weil die Standlinien DA und Da bey allen können beybehalten werden. Da man hiebey noch mehrere Diagonalen bekommt, so kann auch die Figur, die man auf dem Meßtischgen entworfen, auf mehrerley Arten untersucht, und aus den Abweichungen ein genaueres Mittel genommen werden.

C §. 54.

§. 54.

Bey dieser Construction haben wir angenommen, daß man sich nicht vom Orte bewegen dörfe, und daher die ganze Figur aus einem einigen Stande entwerfe. Man kann aber leicht sehen, daß man dadurch noch keine Linie in einem bekannten Maaße weiß, oder daß zu der auf dem Meßtischgen entworfenen Figur noch der Maaßstab fehle. Um diesen dabey zu haben, muß allerdings eine von den gezogenen Linien auf dem Felde wirklich gemessen werden, damit man, die auf dem Papiere in eben so viele Theile eintheilen, und dadurch den Maaßstab verfertigen könne.

§. 55.

Wenn man sich aber an einen Stand nicht binden will, so giebt es noch andere Mittel, das Augenmaaß zu gebrauchen, um den Abstand der Oerter auszumessen, von welchen mir folgende vorgekommen sind. Es sey EF der Horizont, und A, B zwey Oerter, deren Abstand man finden will, ohne sich dahin zu begeben, oder wenn man in der That nicht hinkommen kann. Befindet ihr euch nun in C, so verlängert mit dem Auge die Linie AB bis an den Horizont, und bemerket den Punkt F, wo sie hintrift. Schauet auch gerade nach A, und bemerket den Punkt des Horizonts E, den der Ort A bedecket. Gehet sodann gegen F zu, bis ihr mit B und E in einer geraden Linie stehet, welches in D geschieht. Nun sind AF und CF desgleichen CE und DE parallel, und daher auch CD = AB. Wenn ihr demnach im Hingehen die Linie CD in Schritten oder sonsten ausmesset, so habt ihr eben dadurch auch die gesuchte Länge von AB.

Fig. 6.

§. 56.

Fig. 7.

Man kann diese Methode auf folgende Art genauer machen. Es sey die Breite des Flusses AB zu messen. Der Horizont sey EF. Zielet in A nach B bis an den Horizont, und bemerket daselbst den Punkt E, wo die Linie hintrift, oder welcher von dem Objecte in B bedeckt wird. Gehet sodann seitwerts in D, zielet wieder nach B, und bemerkt am Horizonte den Punkt F, welchen das Object B bedecket. Gehet endlich von D in gerader Linie mit E so weit zurücke, bis ihr in C das Zeichen A und den Punkt F in gerader Linie sehet. Messet hierauf die Linie CD aus, so habt ihr die Breite des Flusses AB. Denn die ganze Figur ABCD ist ein Parallelogrammum, und daher AB = CD.

§. 57.

Auf gleiche Art wenn ihr die beyden Seiten DB und AB finden wollet, würdet ihr aus A über B in E, aus D über B in F zielen, und auf der Linie DE so weit zurücke gehen, bis ihr A und F in einer Linie sehet. Messet ihr sodann

sodann CD und CA aus, so habt ihr CA = BD und CD = AB. Wenn ihr noch DA ausmesset, so läßt sich die ganze Figur construiren.

§. 58.

Man sieht leicht, daß diese Ausmessung alle Schärfe hat, so bald man den Abstand des Horizonts oder der beyden Objecte E, F in Vergleichung mit den Linien der Figur als unendlich entfernt annehmen kann. Sind es Gebürge, die 10, 20 und mehr Meilen wegliegen, so hat die Hypothese alle erforderliche Richtigkeit, und die Linien AB, DC können dabey eine ansehnliche Größe haben.

§. 59.

Da aber hiebey das Augenmaaß wenig zu thun hat, so werden wir die übrigen Fälle im folgenden betrachten, und nun nur diejenigen vornehmen, wobey fast alles auf das Auge ankömmt. Wir haben bißher angenommen, daß die ganze Figur horizontal liege, und daß man auch nur horizontale Linien verlängere, welches mit ziemlicher Richtigkeit geschehen kann. Die Verlängerung solcher Linien, die auf dem Horizonte einen Winkel machen, oder die sich in die Höhe ziehen, scheinen diese Richtigkeit nicht zu haben, weil wir schon oben gesehen haben, daß ihr Bild eine merklich geänderte Lage hat (§. 28. seqq.) Und

Und da die Wolken oder auch das scheinbare Gewölbe des Himmels, daran sich diese Linien endigen würden, in denen Punkten, die näher bey dem Scheitel sind, keinen so merklichen Abstand haben, als die äussersten Ende des Horizontes, so kann man sie auch nicht so gut als parallellinien gebrauchen.

§. 60.

Sie haben aber einen andern Nutzen, von welchem wir hier nur die ersten Anfänge zeigen können, weil dessen Vollständigkeit von der Theorie des Bildes der Objecte in der Luft abhängt, die aber noch ganz fehlet. Vielleicht mögen die Erfahrungen so ich darüber gemacht habe, und hier anführen werde, denen dienlich seyn, die diese Theorie ausforschen wollen. Was ich darüber gefunden, ist noch zu unreif, als daß es hier sollte eingerückt werden. Es ist aber leicht zu zeigen, wie wichtig diese Theorie in unzähligen Fällen in der practischen Geometrie wäre, weil man dadurch in Stand gesetzt würde, den Abstand aller Oerter, die man auf der Erde vor sich liegen sieht, in einem bekannten Maaße, und noch ziemlich genau an dem Himmel abzumessen, ohne sich von der Stelle zu bewegen.

§. 61.

Den Heischsatz, der zu dieser Aufgabe gehört, habe ich aus Smiths Optic genommen,

men, und bereits oben schon angeführt (§. 25.) Nach Euclids Art vorgetragen, lautet er also: Aus jedem fürgegebenen Punkte des Himmels mit dem Auge eine senkrechte Linie auf die Erdfläche zu ziehen, und hinwiederum: Aus jedem fürgegebenen Punkte der Erdfläche eine verticallinie mit dem Auge bis an den Himmel zu ziehen. Euclid trägt nemlich seine Postulata als Aufgaben vor, von welchen er keine Auflösung giebt, eben so wie er die Axiomata ohne Beweis vorträgt. Von diesen setzt er, daß man sie zugebe so bald man sie versteht, und von jenen fordert er, daß man sie auflösen könne, und wo er davon abgeht, da sind auch seine Postulata von anderer Art, daß er sich mit der bloßen Möglichkeit der Auflösung begnügt, wie z. E. im 7. Buche, da er die Ausziehung der Wurzeln unter die Postulata setzt.

§. 62.

Die Möglichkeit unseres Heischsatzes gründet sich schlechterdings auf die Einrichtung des menschlichen Auges, und auf die Art, wie wir von den ersten Jahren an sehen lernen. Man kann sie mit Hrn. Smith als eine Erfahrung ansehen, und wenn man, wie er es gethan, den Versuch' anstellt, so werden alle einerley Punkte am Himmel über einerley Punkten auf der Erde liegen sehen. Fährt man mit dem Auge von dem letztern gerade aufwärts, so scheinet es als wenn das Auge an den Punkt des Himmels, der gerade über jenem zu liegen scheint, anstieße, und das Auge weigert sich gleichsam, die Linie noch mehr zu verlängern, weil es über dem Gewölbe des Himmels keinen Gegenstand mehr hat. Die Sache ist also möglich, aber wie sie geschehen solle, das muß jeder für sich wissen. Und dieses macht den Satz zum Heischsatze. Wir werden ihn nun so gebrauchen.

§. 63.

Je weiter der Punkt auf der Erdfläche entfernt ist, desto entfernter und niedriger scheint auch der über ihm liegende Punkt am Himmel. Das erste erhellet daraus, daß die Linien, durch welche man sie bestimmt vertical scheinen, und das andere folgt aus der scheinbaren Gestalt des Himmels, welche ein niedergedrucktes Gewölbe vorstellt. Wir reden hier nur von dem Scheine, denn ob die Linien in der That auch vertical sind, ist eine andere Frage, die ihre Erörterung von der Theorie erwartet. Zu unserer Absicht ist genug, daß sie es zu seyn scheinen, und daß dieser Schein mit dem Auge richtig kann bestimmt werden.

§. 64.

Fig. 8. Es entspricht also jedem Abstande auf der Erdfläche ein ihm eigener Punkt, und eine ihm zugehörige Erhöhung desselben am Himmel. Es sey AC die scheinbare Erdfläche, AB die scheinbare Höhe des Himmels BMNC die Wölbung des Himmels. P und Q das Bild zweyer Punkte auf der Erde, PM und QN zwo scheinbare Verticallinien, so sind M, N die entsprechende Punkte am Himmel. Man ziehe AM, AN so sieht der Zuschauer in A die beyden Punkte M, N unter den Winkeln MAC, NAC, ihre scheinbare Entfernung ist AM, und AN, und AN > AM, NAC < MAC. So viele Punkte auf AC hinter einander liegen, so viele liegen auch auf BC hinter einander, die denselben entsprechen.

§. 65.

Wenn sich die scheinbare Entfernung dieser Punkte mit der Luft nicht, oder wenigstens nicht merklich änderte, so ließe sich ein für allemal eine Tafel verfertigen, welche zu Ausmessung des Abstandes jeder Oerter diente. Denn man dürfte sich nur die Mühe geben, die Winkel MAC für jede ausgemessene Entfernungen der Oerter P durch Versuche zu bestimmen, und diese Tafel würde in jeden andern Fällen dienen. Denn wollte man z. E. den Abstand des Ortes Q finden,

finden, so könnte dieses geschehen, ohne daß man sich von A wegbegäbe. Man würde mit dem Auge aus Q eine Verticallinie in N ziehen, und den Winkel NAC messen. Diesen würde man in der Tafel aufsuchen, und neben demselben hätte man den verlangten Abstand des Ortes C. Diese Methode hätte in unzähligen Fällen einen erwünschten Nutzen, wenn sich die Verhältniß zwischen dem Abstande und dem Winkel zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten nicht merklich, aber doch wenigstens nur auf eine gleichförmige Art änderte. Die Tabelle wäre allgemein, oder sie könnte durch eine leichte Veränderung auf jeden Fall gezogen werden. Es ist wahr, daß sie nur ein bey nahe giebt, allein wie viele Anlässe sind nicht, wo man weiter nichts verlangt.

§. 66.

Ich habe schon errinnert, daß eine solche Tabelle ihre letzte Vollkommenheit von der Theorie des Bildes der Sache in der Luft erwartet. Von dieser sollten wir statt der Tabelle eine allgemeine Formel erhalten, woraus sich jene für jede Umstände berechnen ließe. Allein die Sache ist mehrentheils umgekehrt, und die Versuche müssen uns in der Naturlehre fast allemal die Spur zeigen, wie wir zur Theorie gelangen sollen, und wie die Grundsätze, die wir annehmen, beschaffen seyn müssen. In dieser Absicht werde ich nun die Versuche hersetzen, die ich im November 1758. mit einem meiner Freunde darüber gemacht. Aus Ermanglung der Theorie habe ich keine andere Umstände auswählen können, als diesen, welcher auch vermuthlich der beträchtlichste ist, daß nemlich der Himmel zu der Zeit, da wir die Winkel maaßen, gleichförmig helle wäre, und die Winkel alle innerhalb einer oder zwo Stunden, und daher bey einerley Zustande der Luft gemessen wurden. Man sieht leicht, daß eine Gleichförmigkeit daraus entstehen muß, welche, wo nicht zur Errichtung, doch wenigstens zur Prüfung der Theorie dienen kann. Man hat in der Naturlehre sehr viele Versuche, welche eben deßwegen zu nichts dienen, weil man sie ohne Auswahl der Umstände und auf ein bloßes Gerathewohl hin gemacht hat. Anstatt daß sie zur Errichtung der Theorie dienen könnten und sollten, so stehet ihr Ansehen derselben vielmehr im Wege, weil man doch überhaupt ehender die Theorie als die Versuche verwirft.

§. 67.

Nachdem wir in der Ebene von Chur eine Standlinie von 2460 Churerschuhen angenommen, so maaßen wir vermittelst eines Meßtischgens den Abstand verschiedener Gebäude und Zeichen von dem ersten Stande aus,

aus, welche sämtlich gegen Nord, Nordost und Nordwest lagen, und die ich A, B, C, D, E, F, G nennen will. A ist die Kirche zu Haldenstein, B die Kirche zu Masanz, und C der 2te Standpunkt. An dem Namen der übrigen ist nichts gelegen, weil man aus diesen den Observirort wieder finden kann. Sodann maaßen wir die Winkel, so die Punkte am Himmel, welche über diesen Oertern vertical zu stehen schienen mit dem Horizonte machten. Wir gebrauchten dazu eine Wasserwaage, deren Regel in 40 Theile getheilt war. An dem hintern Ende war ein Linial in gleiche Theile getheilt senkrecht befestigt, und an dem andern Ende eine bewegliche Regel mit Dioptren angemacht. Hiedurch erhielten wir die Tangenten der Winkel in solchen Theilen, davon der Radius 40. hatte. Ungeacht der Mühe, die wir hatten, an dem blauen Gewölbe des Himmels die Punkte so im Sinne zu behalten, daß wir die bewegliche Regel darnach richten konnten, so traf doch unser Augenmaaß ziemlich genau zu, und wir waren höchstens nur in Decimaltheilen von einander unterschieden. Die Maaße selbsten, aus dem Unterschiede das Mittel genommen waren folgende:

Ort

Ort	Abstand				Tangente der Erhöhung.
G	50 Sch.				78, 0
E	770				23, 1
F	2350				18, 0
C	2460				18, 0 ÷
B	6258				10, 9
D	6965				9, 85
A	9226				8, 3.

§ 68.

Der Ort A lag etwas tiefer als der Observirort, C, E, G waren ungefehr in gleicher Ebene, hingegen B und F höher, und D um ein merkliches höher. A und D lagen am Fusse zweyer sehr hoher Gebürge, welche den Himmel am Horizonte bedeckten, hingegen lagen hinter den übrigen Oertern entferntere Berge, welche den Himmel mehr offen ließen, doch hatte C noch am wenigsten offenen Himmel. Man sieht leicht, daß man diese Umstände merken müsse, weil sie einigen Einfluß in das Urtheil des Auges haben können, ungeacht derselbe dennoch nicht merklich ist, wie es aus der Vergleichung dieser Observationen erhellet. Bey der Observation C habe ich das Zeichen ÷ gesetzt, um anzudeuten, daß uns die Observation F, welche mit C einerley Tangente hatte, richtiger schiene, und folglich, wenn der Abstand des Ortes F richtig gemessen worden, die Tangente von C etwas vermindert werden müsse. Die Churer-

schuhe verhalten sich zu den Pariserschuhen wie 25 zu 27.

§. 69.

Diese Observationen habe ich nun so unter einander verglichen: Auf einer geraden Linie habe ich alle Distanzen nach einem angenommenen Maaßstabe als Abscissen aufgetragen, und aus den Punkten Perpendicularen aufgerichtet, welche als Ordinaten dienen sollten. Die Länge dieser Ordinaten habe ich vermittelst der observirten Tangente durch die Winkel bestimmt. Es sey AP eine dieser Abscissen, PM ihre Ordinate, so findet sich diese durch den observirten Winkel MAC. Durch die Ende aller Ordinaten habe ich eine krumme Linie gezogen, und man sieht leicht, daß sie die scheinbare Wölbung des Himmels hätte vorstellen sollen, wenn die mit dem Auge gezogenen Verticallinien in der That vertical wären, und das Bild der Gegenstände A, B, C &c. nicht merklich näher wäre als sie selbsten.

§ 70.

Ungeacht aber diese krumme Linie nicht nur dem scheinbaren Bogen des Himmels nicht ähnlich, sondern im Gegentheile in A am niedrigsten und mit der Abscisse parallel war, sich von da an in die Höhe zog, und bald darauf einen Wendungspunkt hatte, endlich

endlich sich der parallelen Lage wieder näherte, so sahe ich doch, daß sie sich selbsten sehr ähnlich war, ihre Krümmung durch die Enden der Ordinaten in einem ordentlich fortgieng, und die Ordinaten keine Unrichtigkeit machten, welche von merklichen Fehlern in der Observation herrühren müßten, die einige Ordinate D schien um etwas zu kurz, weil sie nicht ganz biß an die natürliche Wendung der krummen Linie reichte.

§. 71.

Fig. 9. Die neunte Figur stellt in kleinem vor, was ich auf einer grössern gethan. Der Observirort ist O, die observirte Distanzen OG, OE, OF, OC, OB, OD, OA. Die Ordinaten Gg, Ee, Ff &c. sind durch die Winkel bestimmt, weil sich jede zu ihrer Abscisse, wie die observirte Tangente zum Radius verhalten muß. Man sieht leicht, daß wenn die krumme Linie die scheinbare Wölbung des Himmels vorstellen solle, alle Punkte, A, D, B, C, F, E, G merklich müssen näher zu O gerückt werden, und OA vielleicht kaum die Größe OG behalten würde.

§. 72.

Nachdem ich die Linie gfa gezogen, so theilte ich die Abscissen von 1000 zu 1000 Schuhen ein, und richtete aus den Theilungspunkten Ordinaten auf. Diese sind in der Figur

Figur punctirt, z. E. OP ist 5000. Schuhe, so dann zog ich aus O die Linien OQ an die Durchschnittspunkte der Ordinaten, und maaß die Erhöhungswinkel QOP aus, welche ich, so viel möglich war, vermittelst ihrer Differenzen gleichförmig machte. Hieraus erwuchs folgende Tabelle.

Abstand des Ortes		Erhöhung des Punkts am Himmel.		
′		°		′
1000	=	= 28	=	36.
2000	=	= 25	=	9.
3000	=	= 22	=	7.
4000	=	= 19	=	35.
5000	=	= 17	=	28.
6000	=	= 15	=	39.
7000	=	= 14	=	5.
8000	=	= 12	=	44.
9000	=	= 11	=	32.
10000	=	= 10	=	28.
11000	=	= 9	=	32.
12000	=	= 8	=	41.

§. 73.

Diese Tabelle, welche durch Einschaltung der Proportionaltheile leicht könnte auf jede 100 Schuhe ausgedehnet werden, würde also diejenige seyn, die zum allgemeinen Maaßstabe der Entfernung diente, wenn die scheinbare Lage des Bildes sich nicht mit dem abwechselnden Zustande der Luft änderte. Man sieht aber

aber leicht, daß eine geringe Veränderung in den scheinbaren Erhöhungen einen beträchtlichen Unterschied in der Entfernung machet. Jene gehet bey Abänderung des Wetters wirklich vor, wie wir es durch wiederholte Versuche gefunden haben, und besonders haben wir bemerket, daß wenn der Himmel mit Wolken umhängt ist, alsdenn unter den verschiedenen Erhöhungen gar keine Gleichförmigkeit wäre, welches von der verschiedenen Höhe der Wolken abzuhängen scheinet.

§. 74.

Was in dieser Tabelle in Absicht auf die Theorie merkwürdig ist, ist die sehr geringe Höhe der Punkte des Himmels, und ihre ebenfalls geringe Abnahme. Ueber einem Gegenstande, der nur 1000 Schuhe entfernt ist, scheinet ein Punkt am Himmel zu stehen, dessen Erhöhung kaum $28\frac{1}{2}$ Gr. über den Horizont ist. Das Gewölbe des hellen Himmels ist unstreitig höher als das Gewölbe, so die Wolken zu machen scheinen. Wenn wir es demnach auch nur eine Stunde hoch schätzten, so müßte der Punkt, so über diesem Objecte ist, doch bey einer deutschen Meile entfernt seyn, ungeacht das Object selbsten nur 1000 Schuhe weg ist. Man sieht also hieraus, was wir oben schon aus andern Erfahrungen hergeleitet haben, wie viel das Bild der Gegenstände, die in der obern Luft sind, dem Auge

Auge näher seyn muß, als die Gegenstände selbsten.

§ 75.

Diese grössere Annäherung ist aber nur bey denen Punkten des Himmels merklicher, die näher bey dem Scheitel sind. So z. E. dem Objecte G, welches nur 50 Schuhe entfernt war, entspricht ein Punkt am Himmel, dessen Erhöhung 62 Gr. 51 M. ist. Setzt man die wahre Höhe dieses Punkts wiederum eine Stunde, so wird dessen Abstand vom Scheitel dennoch über eine halbe Stunde seyn, welches in Vergleichung von den 50 Schuhen viel beträchtlicher ist, als die vorhin gefundene 2 Stunden für 1000 Schuhe. Das widersinnische, so in diesen Sätzen ist, muß seine völlige Aufklärung von der Theorie erwarten, und es scheinet, als wenn die Gründe der Perspective einigen Einfluß darin hätten.

§ 76.

Unter die unzähligen Fälle, wobey man sich mit der blossen Schätzung und Construction durch das Augenmaaß begnügen kann, dienet dasselbige auch da, wo man ein Feld, zumal wenn es weitläuftig ist, in Grund legen will. Denn ausser dem, daß man gewöhnlich sich einen vorläufigen Entwurf des Feldes machet, welches durch obige Construction an dem ersten Standpunkte sehr leicht geschehen kann,

 so

so kommt bey einer genauen Grundlegung sehr viel auf die Lage und Länge der Standlinie an. Je mehr die Triangel, die die Enden der Figur mit der Standlinie machen, dem gleichseitigen näher kommen, desto geringer werden die fast unvermeidlichen Abweichungen, und desto gleicher werden sie durch die ganze Figur vertheilt. Hat man aber nach der vorhin beschriebenen Methode dieselbe nach dem Augenmaaße construirt, so wird die Lage und Länge der Standlinie ohne große Mühe so bestimmt werden können, daß sie die bequemste und sicherste sey. Wer öfters Gelegenheit hat, Felder in Grund zu legen, dem ist an einem geübten Augenmaaße viel gelegen, und er wird die bisher beschriebenen Mittel nicht ohne Vortheil mit Vergnügen ausüben können, weil er dadurch vorläufig finden kann, was für Winkel in seinem Risse vorkommen werden, und wie die Standlinie liegen müsse, damit der geringste Fehler daraus entstehe.

§. 77.

So z. E. wenn man auf dem Felde einen Triangel haben will, dessen eine Seite gegeben, und der beyläuftig gleichseitig sey, so kann es auf folgende Art geschehen, ohne daß man nöthig habe von der Stelle zu weichen. Es
Fig. 3. soll auf der Linie AB ein Triangel ABC aufgestellt oder der Ort des Eckes C gefunden werden, welcher beyläufig gleichseitig sey. Befindet

findet ihr euch in A, so machet den Winkel BAC von 60 Gr., und es ist klar, daß C auf der Linie AC liegen müsse. Ferner machet den Winkel EAB gleichfalls von 60 Gr., und bemerket den Punkt des Horizontes E, wo die Linie AE hintrift. Aus diesem Punkte ziehet mit dem Auge eine gerade Linie durch B und sehet, wo dieselbe die Linie AC durchschneidet, welches in C geschiehet, so habt ihr das gesuchte Eck C des △ ABC, welcher beyläufig gleichseitig seyn wird. Denn da AE und CE parallel sind, und der Winkel EAC = 120° ist, so ist auch ECG = 120°, und folglich BCA = 60°. Da nun BAC = 60°, so ist auch ABC = 60°, daher ist der Triangel gleichseitig.

§. 78.

Kann man den Horizont in E nicht sehen, so macht den Winkel BAC dennoch = 60°. Schauet sodann, welcher Punkt am Himmel über B stehet, und messet seine Erhöhung über den Horizont. Nehmet über der Linie AC den Punkt am Himmel, der eben diese Erhöhung hat, und fället aus demselben eine Verticallinie herunter, so wird sie in den gesuchten Punkt C treffen, und AC = AB, daher auch = BC seyn.

II. Was man in der Figur oder in ihrem Zusatze als bekannt annehmen kann.

§. 79.

Wenn man die Figur, die man ausmessen soll, schlechterdings nach den Grundsätzen der Geometrie betrachtet, so muß man dabey wenigstens eine Linie, und über diß so viele Winkel messen, bis sich dadurch die übrigen durch Constructionen oder durch Rechnung bestimmen lassen. Wir haben schon oben angemerkt, daß das Willkührliche, so die Geometrie hierinn läßt, nicht in Bestimmung der wirklichen Grösse der Linien und Winkel, sondern nur in der Auswahl derjenigen Stücke bestehe, durch welche die übrigen bestimmt werden können, und daß endlich auch diese Auswahl selbsten, theils durch unvermeidliche Hindernisse, theils durch die zu besorgende Unrichtigkeit, theils auch durch eine zu grosse Unbequemlichkeit noch merklich eingeschränkt werde. Weiter bestimmt die Geometrie nichts, und wenn von den Stücken, die nach ihren Forderungen ausgemessen werden müssen, eins oder das andere, ohne daß es wirklich gemessen worden, gleichsam wie zum Voraus bekannt ist, so geschieht dieses nicht durch die Geometrie, sondern es kömmt daher, weil die Figur wirklich in der Welt oder in rerum natura ist. Die Natur leidet

leidet das unbestimmte nicht, sondern sie schränket alle ihre Linien und Winkel so ein, daß sie eben diese und keine andre sind. Und wo der Grund zu dieser Einschränkung allgemein ist, da folgt sie auch einem allgemeinen Gesetze, und wenn man diese Gesetze kennet, so kann man sich allemal, wo sie vorkommen, die Mühe der Ausmessung ersparen. Die Bequemlichkeit, welche eine der Hauptabsichten der practischen Geometrie ist, fordert also, daß man sich dieser Gesetze bediene, und sie gehören unstreitig unter ihre Data.

§ 80.

Ich habe noch nicht gefunden, daß man diese Sache in ihrem wahren Lichte betrachtet, und ihren weitläuftigen Umfang bezeichnet hätte, ungeacht man viele dieser Stücke von den ältesten Zeiten an gebraucht hat. Man hätte sie zusammen nehmen, und in ihre Classen bringen sollen, um den Reichthum dessen, was man in der practischen Geometrie als gegeben annehmen kann, auf einmal zu übersehen, den Vortheil, den ein jedes giebt, und das worinn er bestehet, auf das allgemeinste zu bestimmen, sodann zu sehen, ob noch mehrere Sachen diesen Vortheil geben, ob man denselben nicht auf mehrere Fälle ausdehnen könne, und endlich, ob es nicht noch andere Gesetze in der Natur gebe, wodurch in der Geometrie gewisse Stücke bestimmt werden können.

§. 81.

Nach dieser Vorschrift werde ich gegenwärtige Abhandlung von den Datis der practischen Geometrie einrichten. Ich werde sie anfangs wie in einer Tabelle auf das allgemeinste vorstellen, damit man sehen könne ob ich einige davon vergessen, oder ob noch Lücken übrig bleiben, die man ausfüllen kann. Nachher werde ich jedes besonders betrachten, und untersuchen, wie weit es reicht, worinn das Hauptwerk davon besteht, und wo man es gebrauchen könne, ohne mich jedoch mit demjenigen Gebrauch, den man schon davon gemacht hat, lange aufzuhalten. Besonders werde ich diejenigen Stücke, die eine Aehnlichkeit haben, und in der Ausübung gleiche Dienste thun, zusammen nehmen, und untersuchen, wie weit man jedes gebrauchen kann. Da endlich hiebey die Bequemlichkeit in der Ausübung eine Hauptabsicht ist, so sieht man leicht, daß man in jedem Falle besonders bestimmen müsse, wie ferne man dabey auch die andere Absicht der practischen Geometrie, oder die Genauigkeit der Ausmessung erhalten kann.

§. 82.

Sodann muß ich noch vorläufig eine Redensart erklären, die ich im folgenden öfters gebrauchen werde, und daran sich viele Leser aufhalten könnten. Ich mache nemlich zwischen dem Aufrisse einer Figur, und dem Maaß der

der Linien folgenden Unterscheid. Man erweiset in der Geometrie: daß man vermittelst einer einigen Seite, und der Winkel, den die übrigen Seiten theils unter sich, theils mit den Diagonalen machen, die ganze Figur zeichnen, und alle ihre Seiten ausmessen kann. Auf dem Papier wählt man sich einen Maaßstab, trägt die gegebene Seite davon ab, und bestimmt alle übrigen durch die Winkel. Je nachdem man einen grössern oder kleinern Maaßstab dazu nimmt, wird die Figur grösser oder kleiner, sie bleibt aber sich selbsten ähnlich, und bey der kleinern Figur thut der kleinere Maaßstab eben die Dienste, wie der grössere bey der grössern.

§. 83.

Indem man so verfährt, so bindet man sich an eine gewisse Seite, und diese muß nach dem angenommenen Maaßstabe zuerst gezogen werden. Es ist aber nicht allemal diejenige, aus welcher die Figur am leichtesten construirt wird, und in allen diesen Fällen ist es besser, den Maaßstab nach der Figur zu richten, und folglich diese ohne Maaßstab ganz zu entwerfen. Denn da man jeder Seite, die man in der Construction zum Grunde legt, eine beliebige Länge auf dem Papier geben, und die übriben daraus, vermittelst der Winkel, bestimmen kann, so wird die ganze Figur ohne Maaßstab ausgebildet, und um diesen

diesen zu finden, wird die bekannte Seite in so viele Theile getheilet, als sie wirklich haben solle. Und diesen Vortheil kann man auch auf dem Meßtischgen gebrauchen, wenn man die Länge der Standlinien nicht nach einem willkührlichen Maaßstabe darauf trägt, sondern sie so bestimmt, daß der äusserste Punkt der Figur auch zu äusserst auf dem Meßtischgen zu liegen komme, und folglich die Figur weder grösser noch kleiner werde, als das Meßtischgen selbst ist Jenes verhütet man dadurch, daß man nicht genöthigt werde, Stücke anzusetzen, und dieses muß der Genauigkeit halber verhütet werden, weil es ein Fehler ist, wenn man der Figur auf dem Meßtischgen einen kleinern Raum giebt, als sie hätte haben können. Kleinere Figuren lassen sich nicht so genau ausmessen, als grössere.

§. 84.

Es ist hieraus klar, daß man eine Figur auf das Papier bringen könne, ohne eine einige Linie derselben wirklich auszumessen. Man findet dadurch die Lage und das Verhältniß aller ihrer Theile, aber noch weiß man die Länge der Seiten in einem bekannten Maasse nicht, weil noch der Maaßstab dazu fehlet. Denn da das bekannt angenommene Maaß vollkommen willkührlich ist, so kann man dasselbe aus der Figur nicht finden, sondern es muß nothwendig eine Seite ausgemessen werden,

den, damit man die übrigen auch in Ruthen, Schuhen 2c. bestimmen könne.

§. 85.

Man sieht leicht, daß man dabey nicht an eine gewisse Seite gebunden ist, sondern man mißt diejenige aus, die am bequemsten ist, und wenn man vorzüglich auf die Genauigkeit des Maasses sehen will, so muß diejenige Seite gemessen werden, von welcher man versichert ist, daß sie durch die Winkel am genauesten bestimmt worden. Diß gehört aber mit zur Berechnung der Fehler, die wir erst im folgenden vornehmen werden.

§. 86.

Wenn demnach, wie es in vielen folgenden Fällen vorkommen wird, die ganze Figur so weit bestimmt ist, daß man nur noch eine Seite wirklich ausmessen darf, um die Grösse der übrigen in einem bekannten Maasse zu finden, so werde ich mich des Ausdrucks bedienen, daß man die ganze Figur bestimmt habe, daß sie ganz gegeben sey, daß man alles daran wisse. Denn hat man eine Linie dabey schon wirklich ausgemessen, so ist dieser Ausdruck im engsten Verstande richtig. In den übrigen Fällen muß man immer darunter verstehen, daß man noch den Maaßstab dazu verfertigen, und zu diesem Ende eine Linie wirklich ausmessen müsse. Ich werde mich

mich daher auch des Ausdruckes bedienen: daß nun nichts mehr als der Maaßstab fehle. Denn um diesen zu finden, muß man sich nach den beyden Absichten richten, die wir erst angeführt haben. (§. 85.)

§. 87.

Die Data in der practischen Geometrie fliessen aus einer dreyfachen Quelle. Es sind

I. Gesetze der Natur, dahin gehören

1. Die Bewegung der Erde, und diese giebt uns die Mittagslinie, nebst den Verkürzungen des Penduls in verschiedenen Höhen.
2. Die Figur der Erde, und diese giebt uns die Winkel, den die Objecte in ihrem Mittelpunkte machen, nebst den verschiedenen Circuln auf ihrer Oberfläche.
3. Die Schwere der Körper und ihre Richtung im Fallen. Hievon haben wir verticale und horizontale Linien und Flächen, nebst der Geschwindigkeit der fallenden Körper.
4. Die Richtung des Magneten, diese giebt uns die Lage einer Linie, so statt der Mittagslinie dienen kann.
5. Der Weg des Lichtes, giebt uns überhaupt gerade Linien, insbesondere aber

6. Das

6. Das Licht der Sonne und der Sterne, davon haben wir Linien und Flächen von einer parallelen Lage, und den Schatten der Körper.
7. Die Reflection des Lichtes giebt uns gleiche Winkel.
8. Die *Refraction* des Lichtes in der Luft dienet in grössern Entfernungen, und so bald sie merkbar wird.
9. Die *Refraction* des Lichtes durch erhaben geschliffene Gläser, die *Camera obscura* und die perspectivischen Zeichnungen, nebst den Micrometern bey Fernröhren können zu Bestimmung der Winkel, und zu Entwerfung der Figur gebraucht werden.
10. Objecte, die so gut als unendlich entfernt sind, geben parallele Linien.
11. Die Schwere der Luft durch das Barometer gemessen, mag die Höhe des Ortes geben.
12. Der Schall mißt den Abstand des Ortes, von dem er kömmt, durch die Geschwindigkeit und Zeit.
13. Die Bewegung überhaupt, in so ferne sie gleichförmig ist, giebt den durchlaufenen Raum durch die Zeit und Geschwindigkeit, und proportionale Theile durch die Zeit allein.

II. Wer-

II. Werke der Kunst, und besonders

1. Gebäude, geben verticale und horizontale Linien und Flächen, die mehrentheils rectangular sind.

2. Andere Figuren, die eine kenntliche Regularität haben, als runde Thürme, Wasserbecken 2c.

III. Die Geometrie. Hieher kann man als Data rechnen

1. Alles was man ausmessen kann, ohne sich von der Stelle zu bewegen, besonders aber

2. Punkte, die man als unendlich entfernt ansehen kann, die wir aber schon bey der ersten Classe mitgenommen.

§. 88.

Dieses sind die Stücke, die mir beygefallen. Es wäre zu wünschen, daß noch mehrere dergleichen vorhanden wären, weil sie sämtlich bey der Ausübung viele Mühe ersparen. Es sind allerdings nicht alle von gleicher Wichtigkeit und Schärfe im Gebrauche. Man muß aber ohne dem jedesmal aus den Umständen und Absichten schließen, welche man gebrauchen kann, und wie ferne sie in Ansehung der Genauigkeit zureichen. Ich werde nun die fürnehmste derselben einzeln betrachten, und besonders deutlicher aus einander

ander setzen, worinn ihr wahrer Vortheil bestehe, und wie weit sich ihr Gebrauch ausdehnen lasse. Es ist mir immer vorgekommen, als wenn man diese Untersuchung nachläßiger angestellt, oder sie noch nicht gemacht habe.

III. Die Mittagslinie.

§. 89.

Die Mittagslinie hat auf der ganzen Erdfläche die Eigenschaft, daß sie sich gegen die Pole richtet. Kann man derohalben den Abstand der Pole in Vergleichung mit der Größe der Figur, die man in Grund legen will, als unendlich groß ansehen, so wird die ganze Figur als auf einer horizontalen ebenen Fläche, und alle Mittagslinien, die man auf derselben zieht, als parallel betrachtet. Folgen daraus sind, daß jede Linie der Figur alle Mittagslinien, so man darauf zieht, unter gleichen Winkeln durchschneidet, und daß man folglich vermittelst der Mittagslinien, nicht nur die Lage jeder Linie der Figur bestimmen, und alle Winkel darauf reduciren kann, sondern, daß man auch dadurch die Größe solcher Winkel findet, die man sonst wirklich ausmessen müßte.

§. 90.

Der Vortheil in der Ausübung besteht überhaupt betrachtet darinn, daß an jedem Orte

Orte, wo man sich befindet, und ohne Rücksicht auf andere Oerter eine Mittagslinie kann gezogen werden. Die Mittel, die man gebraucht, um sie auf das genaueste zu ziehen findet man in der Astronomie. Wenn man sie nicht so genau gebraucht, da hat man Mittel aus der Gnomonic. Eine Sonnenuhr, worauf die Zeichen der Ecliptik sind, eine Horizontal und Azimuthaluhr beysammen, die man umdrehen muß, biß beyde Zeiger auf gleiche Stunde und Minuten weisen, und andere dergleichen Sonnenuhren mehr geben die Mittagslinie noch ziemlich genau. Vielleicht ließen sich Uhren auf schiefliegende Flächen zeichnen, welche noch bessere Dienste thäten, der Zeiger möchte nun darauf perpendicular oder vertical stehen. Es kömmt hiebey ein Maximum vor, welches verdient aus den Gründen der Gnomonic untersucht zu werden.

§. 91.

Am schlechtesten geht es mit der Magnetnadel, weil man von der Abänderung in ihrer Abweichung von der Mittagslinie weder an verschiedenen Orten noch zu verschiedener Zeit versichert ist. Ueberdiß sind sie so klein, daß man die Winkel dadurch nicht gar genau abmessen kann. Kömmt es aber wie bey Verfertigung der Landcharten, wo ein Meilweges kaum einen oder etliche Zoll groß ist,

ist, auf so genaue Winkel nicht an, so läßt sie sich allerdings mit Vortheil gebrauchen, nur daß man im Fortgange Acht habe, daß man die Fehler, die daher entstehen können, wieder zu vergleichen und auszubessern suche.

§. 92.

Wenn wir aber hierbey auf das Hauptwerk sehen, so muß man wohl merken, daß die Dienste, so uns die Mittagslinie in der ausübenden Meßkunst thut, nicht daher rühren, weil sie eine Mittagslinie ist, oder sich gegen die Pole richtet, sondern weil die Pole als unendlich entfernt können angesehen werden, und daher so viele Parallellinien entstehen, als man bey Grundlegung der Figur haben will. Man kann dieses leicht daher einsehen, wenn man bedenkt, daß der geometrische Gebrauch der Mittagslinie unter dem Pole völlig aufhört. Und aus gleichem Grunde hört der Gebrauch des Compasses da auf, wo die Richtung der magnetischen Kraft auf den Horizont senkrecht ist. An diesen Orten ist die Nadel gegen alle Richtung gleichgültig.

§. 93.

Da wir also hiedurch deutlicher bestimmt haben, worauf es bey der Mittagslinie in der Hauptsache ankömmt, so ist leicht zu erachten,

achten, daß man den Nutzen derselben so allgemein machen kann als der Grund ist, auf welchem ihr Gebrauch beruht. Man sieht leicht, daß es unzählige Fälle giebt wobey man ausser dem Pol noch andere Punkte als unendlich entfernt ansehen kann. In einem offenen Lande, wo man Gebürge sieht, die 10 und mehr Meilen entfernt sind, muß die Figur ziemlich groß seyn, wenn man ihre Breite, oder auch nur die Abweichung der Oerter, wo man observirt, mit dieser Entfernung in Vergleichung setzen soll. Es giebt auch dabey eine Auswahl von Umständen, wo noch viel nähere Oerter eben den Dienst thun können, und wenn auch ein Fehler daher entstehen sollte, so läßt er sich sehr genau bestimmen, wenn man den Abstand eines solchen Ortes auch nur beyläufig weiß.

§. 94.

Hieraus folgt also, daß wo man ein solches Gebürg oder auch einen sehr entfernten Horizont vor sich hat, und auf demselben einen kenntlichen Punkt wählt, alle Linien die man auf der Figur dahin zieht, als parallel können angesehen werden, und daß folglich diese Parallellinien eben die Dienste thun, den wir bey hellem Wetter von den Mittagslinien, und in denen Umständen, wo die Abweichung des Magnets sich nicht ändert, von dem

dem Compasse erwarten können. Wir werden nachher sehen, wie ferne sie allgemeiner gemacht werden können. Inzwischen werden wir den Namen Mittagslinie beybehalten, weil man leicht sieht, daß wir darunter überhaupt solche Parallellinien verstehen, die man an jedem Orte der Figur ziehen kann.

§. 95.

Der Gebrauch der Mittagslinie bey Ausmessung der Figuren ist bißher sehr eingeschränkt gewesen, und ich habe noch nirgend finden können, daß man das Hauptwerk dabey bemerkt habe. Ueberhaupt erspart sie uns die wirkliche Ausmessung eines Winkels an entfernten Oertern, dahin wir nicht nöthig haben zu gehen, um denselben auszumessen, und es ist nur die Frage, wie man sich diesen Umstand recht zu Nutze machen solle. Da ich hierüber noch wenig aus einander gesetztes gefunden, so werde ich hier die Sache vom Anfange herholen.

§. 96.

Es sey demnach der Ort A, und man habe in B und C seine Abweichung von den Mittagslinien BE, CD oder die Winkel ABE, ACD gemessen, so ist der Winkel BAC, den die beyden Oerter B und C mit A machen, dadurch gefunden. Ver- Fig. 10.

längert AB in D, so ist ADC = ABE, folglich habt ihr in dem Triangel ADC die zween Winkel in D und C, und daher auch den Winkel in A, als welcher mit denselben zusammen genommen 180 Gr. machen muß.

§. 97.

Man sieht leicht, daß wenn ausser A noch mehrere Objecte sind, die Winkel den die zwey Oerter B und C daselbsten machen, mit gleicher Arbeit können gefunden werden.

§. 98.

Wenn die Länge der Linie AB und ihre Abweichung von der Mittagslinie CD gegeben, und ihr observirt an einem jeden Orte, so nicht auf eben der Linie ist, z. E. in E die Abweichung der Linien AE, BF
Fig. 11. von der Mittagslinie EF, so habt ihr in dem △ ABE alle Winkel und alle Seiten. Da ihr die Winkel DCB, AEF, BEF habt, und CD mit EF parallel ist, so traget den Winkel DCB in FEG, und ziehet die Linie GEH, so ist diese mit AB parallel, folglich BEG = ABE = BEF + DCB und HEA = EAB = IEA − DCB. Hieraus läßt sich folglich die Figur construiren.

Anderst.

Sehet AB als eine Chorde eines Bogens an, der doppelt so viele Grade hat als der gemessene

gemessene Winkel AEB, und beschreibt dadurch den Cirkul AEB, so muß E auf dessen Umkreise liegen. Zählet von B in F doppelt so viele Grade als der gleichfalls gemessene Winkel FEB hat, und ziehet FE mit DC parallel, so ist der Durchschnitt E der gesuchte Ort der Observation. Der Beweis ist für sich klar, weil die Bögen AB, BF doppelt so groß sind, als die Winkel am Umkreyße AEB, BEF, und weil EF mit DC parallel seyn muß.

§. 99.

Wenn man demnach in einer Stadt den Abstand und die Abweichung zweener Thürme weiß, so kann man vermittelst dieses Lehrsatzes auf dem Felde finden, wie weit man von beyden weg ist, die Oerter ausgenommen, die mit beyden Thürmen in gerader Linie liegen. Wenn man sich überdiß darauf verlassen könnte, daß alle Kirchen die längere Seiten genau gegen Mittag kehren, so wäre ihre Abweichung so gut als ausgemessen, und man würde in jeder Entfernung, wo sie noch einen ausmeßbaren Winkel macht, die Verhältniß des Abstandes zu der Länge der Seiten finden.

§. 100.

Noch allgemeiner ist der Nutze dieses Lehrsatzes bey Entwerfung ganzer Landschaften.

 Es

Es seyen A, B zwey Dörfer, Schlösser, Kirchthürme 2c. Man reise zwischen denselben in C vorbey, so kann man in E die Abweichung DCB messen. Kommt man sodann in jeden Ort E, und mißt daselbst die Abweichungen AEF, BEF, so hat man die ganze Figur (§. 86.) an welche man im Fortgange noch unzählige andere anhängen kann, weil man immer die neubestimmten Linien, wegen ihrer bekannten Abweichung zum Grunde der folgenden legen kann.

§. 101.

Hat man auf diese Art die Abweichung etlicher entfernten Gebürge, die man in einem ganzen Lande sehen kann, so ist klar, daß man dasselbe in Grund legen könne, wenn man nur dadurch reiset. Das Mittel selbsten wird auf folgende Art noch allgemeiner gemacht.

§. 102.

Setzet ihr reiset in C zwischen den Oertern A, B vorbey und observirt die Abweichung DCB von der Mittagslinie CD. Wenn ihr nun in E und G die Oerter A, B sehet, so könnet ihr ihre Abweichung messen, und folglich G und E auf dem Papire entwerfen. Nun sage ich, daß, wenn man in E den Ort G, und hinwiederum in G den Ort E nicht sieht, man dennoch alle übrigen Oerter, die man in E und G zugleich sieht,

Fig. 12.

z. E. J und K zu Papire bringen könne. Denn da ihr A, B, E, G auf dem Papire habt, so könnet ihr auch die Mittagslinien CD, EF, GH darauf ziehen. Wenn ihr nun in E und G die Abweichung der Linien EK, EJ, GK, GJ observirt, so habt ihr die Winkel KEF, JEF, KGH, JGH, welche ihr auf dem Papire austragen, und dadurch die Lage der Oerter J, K, desgleichen auch ihre Abweichung von der Mittagslinie bestimmen könnet. Es ist klar, daß wenn dieses solche Oerter sind, die ihr im Fortgange auf eurem Wege noch in der Ferne, und auch da, wo ihr A und B aus dem Gesichte verlieret, noch sehen könnet, dieselbe zu Bestimmung der folgenden Oerter aufs neue dienen werden. Setzet ferner, E und G seyn keine solche Oerter, die in eurem Plan erscheinen sollen, so sehet ihr klar, daß sie dennoch zur Zeichnung der Oerter J, K, und wenn ihr wollet, noch unzähliger anderer gedient haben, und daß jeder bequeme Ort auf dem Felde euch diese Dienste thun kann. GE ist eine Standlinie von besonderer Art, und vollkommen willkührlich. An dem einen Stande habt ihr nicht nöthig, euch um den andern umzusehen, und ihr wählet jeden, wo er euch am bequemsten fällt. Genug daß ihr daraus die zwey Oerter A, B sehet, um seine Lage dadurch zu bestimmen.

§. 103.

Kämet ihr an einen dritten Ort L, der entweder in dem Risse müste gezeichnet werden, oder auch nur zu Bestimmung anderer Oerter dienen könnte, und ihr würdet daselbst nur die beyden Oerter J, A sehen, so ziehet auf eurem Risse die Linie J A, und es ist klar, daß ihre Abweichung von der Mittagslinie gegeben ist, weil ihr diese auf dem Papire habt. Observirt ihr nun in L die Abweichung der Oerter J, A von der Mittagslinie, so könnet ihr den Ort L ebenfalls auf den Riß bringen, und ihn, wie die übrigen Oerter gebrauchen.

§. 104.

Hieraus sehet ihr leicht, daß je mehr Oerter schon auf dem Risse sind, desto vielfältiger die Mittel werden, jeden folgenden Ort darauf zu bringen. Es ist auch klar, daß sich die Fehler, die von der Mittagslinie herrühren können, dadurch entdecken lassen, wenn man mehrere Oerter zur Bestimmung des Orts gebraucht, wo man sich befindet.

§. 105.

Ferner ist leicht einzusehen, daß man hiebey viele Linien und Abweichungen im Vorrathe observiren kann. Setzet, ihr hättet bey L angefangen, und daselbst die Abweichung der Oerter I, A, in G und E aber die Abweichung der Oerter J, K, A, B observirt, so ist klar, daß diese

diese Observationen nur vorräthig gewesen wären, und daß ihr noch in C die Abweichung der Linie ACB, oder im Fortgange die Abweichung der Linien JK oder JA hättet observiren müssen.

§. 106.

Man kann hieraus sehen, was die Mittagslinie in der Entwerfung der weitläuftigsten Figuren und ganzer Landschaften zu sagen habe, und wie sehr es zu wünschen wäre, daß man sie an jedem Orte auf eine leichte und genaue Art ziehen könnte. Doch so allgemein dieser Gebrauch ist, so schränkt er sich dabey noch nicht ein. Wir haben bey diesem Verfahren angenommen, daß man um jeden folgenden Orte, wo man sich befindet, wenigstens zwey Objecte noch sehen müsse, deren Abweichung von der Mittagslinie bekannt sey, und daher gesetzt, daß man, wenn man auch an keines von den Oertern J, K, A, B kömmt, dennoch zwischen zweyen, z. E. A, B durchreise, udd in C die Abweichung DCB observire. Es kann aber geschehen, daß man entweder nicht dadurch reiset, oder daß man in C die Oerter A, B nicht sieht. In diesem Falle muß man ein ander Mittel ergreifen, und dieses kann statt haben, ohne daß man sich an eine Standlinie binde.

 §. 107.

§. 107.

Fig. 13. Setzet, es seyn drey Oerter A, B, C, und ihr reiset durch D, E, F. Observiret in D ihre Abweichung von der Mittagslinie DG. Geht sodann weiter, bis ihr die drey Oerter wieder sehet, wenn ihr sie auch aus dem Gesichte verlohren hättet, z. E. in E, und observiret daselbst wiederum die Abweichung derselben von der Mittagslinie EH. Eben dieses thut auch in F. Ihr habt an jedem der drey Stände D, E, F nicht nöthig, auf die andern beyden zu sehen, und könnet jeden wählen, wo er euch am bequemsten fällt. Genug daß ihr an jedem die drey Oerter A, B, C sehet. Ich sage durch die observirten Winkel in D, E, F, lassen sich alle sechs Oerter A, B, C, D, E, F in Grund legen, und daher auch die Abweichung der drey Oerter A, B, C von der Mittagslinie unter sich verglichen, bestimmen.

§. 108.

Um diese Aufgabe, welche eine der schwersten und zugleich eine der schönsten aus der practischen Geometrie ist, durch eine leichte Construction aufzulösen, werde ich eine andere vorausschieben, welche man zwar in vielen geometrischen Schriften aufgelöst findet. Da ich aber eine andere Auflösung davon gebrauche, so werde ich nun den Unterschied zu zeigen beyde hersetzen, und ihnen noch trigonometrische beyfügen.

§. 109

§. 109.

Es seyn demnach drey Oerter A, B, C von gegebener Lage, und man observire in D die beyden Winkel ADB, BDE, die Lage des Ortes D zu finden. Fig. 14

Auflösung.

Sehet die Seiten AB, BC als Chorden von Circulbögen an, die doppelt so groß sind, als die beobachteten Winkel ADB, BDC, und und beschreibt diese Circul, so ist klar, daß der Observirort D auf dem Umkreise eines jeden derselben, und folglich in dem Punkt ihres Durchschnittes liegen muß. Denn der Winkel ADB ist die Helfte des Bogens AB, und der Winkel BDC die Helfte des Bogens BC.

Anders und kürzer.

Es seyn wiederum die drey Oerter A, B, C, Fig. 15 und die observirten Winkel ADB, BDC. Beschreibet wie vorhin auf der Seite AC einen Circul, so daß der Bogen AEC, den sie abschneidet, doppelt so groß sey, als der Winkel ADC, welcher auf dieser Seite steht. Zählet von A gegen E doppelt so viele Grade als der Winkel ADE hat, und zeichnet den Punkt E. Durch B und E ziehet eine gerade Linie BE bis in D, so ist D der Observirort. Denn da vermöge der Construction D nothwendig auf dem Circul AEC liegen muß, so muß auch die Diagonal DB nothwendig

wendig durch E gehen, weil der Bogen AE immer = 2. ADB ist, der Punkt D mag liegen wo er will. Nun habt ihr die zween Punkte B und E, durch welche die Diagonal BD gehen muß, und daher auch gezogen werden kann.

Anders, trigonometrisch.

Fig. 16. Ziehet durch AB und BC die zween Circul ABD, BCD wie in der ersten Auflösung, ihre Mittelpunkte seyn F, H, ziehet D und B mit denselben zusammen, und fället die Perpendicularen FE, HG auf die Chorden AB, BC, so habt ihr die Winkel

$$BHG = BDC \text{ folglich } HBG = 90° - BDC$$
$$BFE = BDA \qquad FBE = 90° - BDA$$

Ziehet ferner durch H, F die Linie HJ, welche auf der Chorde DB senkrecht stehen, und DJ = JB machen wird. Nun ist

$$FBH = ABC - HBG - FBE$$

folglich

$$FBH = ABC + ADC - 180$$

Da ihr nun aus den Chorden AB, BC und ihren Bögen die Halbmesser der Circul BF und BH findet, so habt ihr in dem $\triangle$ FBH die beyden Seiten BF, BH und den Winkel FBH, woraus ihr den Winkel BFH, folgends BFJ, und aus diesem und der Hypothenuse BF den Cathetum BJ = $\frac{1}{2}$ BD und den Winkel FJB finden könnet. Die übrigen Seiten und Winkel finden sich hieraus ohne Mühe.

Anders und kürzer.

Machet die Winkel ADB = a, BDC = b, Fig. 15
ABC = c, DAB = x, so habt ihr BCD = (360 — a — b — c — x). Setzet ferner AB = A, BC = B, BD = z, so ist

$$\sin a : A = \sin x : z$$
$$\sin b : B = \sin(360 - a - b - c - x) : z$$

Schaffet aus diesen zwoen Gleichungen das z weg, so habt ihr

$$\sin(360 - a - b - c - x) : \sin x = A \sin b : B \sin a.$$

folglich durch eine bekannte Verwandlung

$$\text{tang.}\left(\frac{360 - a - b - c}{2}\right) : \text{tang.}\left(\frac{360 - a - b - c - 2x}{2}\right) = (A \sin b + B sa) : (A sb - B sa)$$

Ziehet die gegenüberstehenden Winkel ABC + ADC von 360 Gr. ab, und nehmet von dem Ueberrest die Helfte, diese sey = d, so ist

$$(A \sin b + B \sin a) : (A \sin b - B \sin a) = \text{tang } d : \text{tang } (d - x)$$

Hieraus

Hieraus findet ihr den Winkel DAB, folgends auch BCD, und CAD und ACD, und aus diesen jede Seite AD, BD, CD.

§. 110.

Wir haben diese Auflösungen hier zusammengehäuft, weil die Aufgabe in der practischen Geometrie, und besonders bey Grundlegung ganzer Landschaften von weitläuftigem Nutzen ist. Man kann sich nach der 15ten Figur ein Instrument dazu machen, welches aus dem Circul ADC, und den drey Linialen AB, CB und BD besteht, und wodurch man vermittelst der Winkel BAC, BCA, ADB, DBC die Gestalt des Viereckes ABCD erhält. Der Maaßstab muß hernach dazu gemacht werden. Man schraubt nemlich das Linial DB an dem Umkreise des Circuls z. E. in D an, und giebt ihm eine beliebige Lage z. E. DA, sodann kehret man das Instrument gegen den Ort A, und bemerkt den Punkt A auf dem Circul. Sodann drehet man das Linial gegen die Oerter C und B, und bemerkt die Punkte CE auf dem Umkreise des Circuls. In A und C werden die andern Liniale angeschraubt, und so gelegt, daß die Punkte A, B, C den Triangel, so die drey Oerter ABC, die man vor sich hat, vorstellen, welches dadurch geschehen kann, wenn man von A gegen F doppelt so viele Grade zählt, als der Winkel BCA hat, und hinwiederum von C gegen G doppelt

doppelt so viel als der Winkel BAC hat. Endlich wird das Linial in D ab und in B angeschraubt. Man drehet es sodann auf den Punkt E, und es wird in D den Observirort abschneiden. Uebrigens müssen wir noch anmerken, daß wenn alle vier Oerter in einer geraden Linie oder in einem gleichen Circul liegen, z. E. wenn B auf E fällt, diese Aufgabe aus den Winkeln ADB, BDC alleine nicht aufgelößt werden kann. Man muß in diesem Fall einen andern Observirort annehmen. Der Fall ist aber sehr selten.

§. 111.

Laßt uns nun nach dieser Vorbereitung die Auflösung der vorgelegten Aufgabe (§. 107.) vornehmen. Vermöge des Lehrsatzes (§. 96.) könnet ihr aus den in D, E, und F observirten Abweichungswinkeln, die Winkel in C, B, E finden, den die drey Stände D, E, F daselbst machen. Wir werden sie demnach als bekannt annehmen. Und da die Mittagslinie weiter zu nichts als zu Bestimmung dieser Winkel diente, so werden wir sie nun weglassen, um dadurch die Aufgabe allgemeiner zu machen. Sie lautet demnach also: Fig. 13.

Wenn an 6 Oertern A, B, C, D, E, F die Winkel DAF, DAE, DBF, DBE, DCF, DCE, desgleichen die Winkel ADB, ADC, AEB, AEC, AFB, AFC gegeben, die Lage aller

aller sechs Winkel zu Pappire zu bringen. Ja da wir in der Auflösung noch vier von diesen Winkeln nicht gebrauchen; so wird die Aufgabe noch allgemeiner: Nemlich

Man solle die Lage der sechs Oerter A, B, C, D, E, F aus den Winkeln ADB, ADC, AEB, AEC, AFB, AFC und DBE, DBF finden. Man sieht leicht, daß zu Bestimmung dieser Winkel die Mittagslinie den Dienst thut, daß man nur drey Stände gebraucht. Es können aber die Winkel, die wir hier als bekannt ansehen, besonders bey Grundlegung weitläuftiger Felder und Landschaften, wo man mehrere Stände gebraucht, aus andern Umständen gegeben seyn. Laßt uns nun zur Auflösung schreiten.

Auflösung.

§. 112.

Nehmet die beyden Oerter A, C auf dem Pappire an, so könnet ihr die Linie, so sie zusammenhängt als eine Chorde dreyer Circul
Fig. 17. ansehen, deren Bögen doppelt so groß sind als die drey observirte Winkel CDA, CEA, CFA, ziehet diese drey Circul, und es ist offenbar, daß die drey Oerter D, E, F auf ihrem Umkreyse liegen müssen. Diese drey Circul seyen ADC, AEC, AFC. Zählet von A in d, e, f doppelt so viele Grade als die observirten Winkel ADB, AEB, AFB haben, und zeichnet die Punkte d, e, f, so ist vermöge der zweyten Auflösung der vorigen Aufgabe (§. 109.) klar, daß die Linien, die aus D, E, F in B gezogen werden durch diese drey Punkte gehen müssen, und daß folglich die in B gemessene Winkel DBE, EBF eben diejenigen seyn würden, wenn die drey Oerter D, E, F in d, e, f gelegen hätten. Verlasset demnach die Oerter D, E, F, weil ihre Lage noch nicht gegeben ist, und haltet euch an die drey Punkte d, e, f, deren Lage ihr wirklich auf dem Pappire habt, so wird die völlige Auflösung auf die von der vorhergehenden Aufgabe reducirt. Sehet nemlich die Linie df als eine Chorde an, deren Bogen doppelt soviele Grade hat, als der gemessene oder gegebene Winkel DBF, und beschreibt diesen Cirkul, welches Bdf sey, so ist klar, daß B auf dem Umkreyse dieses Cirkuls liegen müsse. Zählet ferner von d in g doppelt so viele Grade als der Winkel DBE hat, und ziehet durch g und e eine gerade Linie, welche ihr auf beyden Seiten in B und E verlängert, so ist wiederum aus der vorhergehenden Aufgabe klar, daß die beyden Oerter B, E auf dieser Linie, und zwar auf den Durchschnittspuncten B und E liegen müssen. Endlich ziehet aus B durch d und f gerade Linien in D und F, so habt ihr in den Durchschnittspunkten der dazu gehörigen Circul die Lage der Oerter D und F, und daher alle sechs Oerter auf dem Pappire. Wenn

§. 113.

Wenn die Oerter A, B, C in einer geraden Linie liegen, oder wie bey Gebäuden rechte Winkel mit einander machen, so gebraucht man nur zween Stände D, F, um die Punkte d, f zu bestimmen, durch welche man vermittelst des Winkels DBF den Circul dgf ziehet, und dieser wird im ersten Falle die Linie AC, im andern aber die aus A oder B aufgerichtete Perpendicularlinien durchschneiden. Da aber fast immer zween Durchschnittspunkte sind, so muß aus andern Umständen ausgemacht werden, auf welchem derselben der Ort B liege. Eben dieses gilt auch, wenn einer der Winkel BAC, BCA gegeben ist.

§. 114.

Sind in DEF ausser den drey Oertern A, B, C die Abweichungen von mehrern andern ausgemessen worden, so können dieselbe, nachdem diese sechs construirt sind, mit leichter Mühe in den Riß gebracht werden. Es ist für sich klar, daß man hiezu nur zwo Abweichungen gebraucht, und daß folglich, wenn man auch die dritte dabey hat, dieselbe zu Untersuchung der Fehler dienen kann.

§. 115.

Fig. 13. Diese Aufgabe wird noch dadurch allgemeiner, daß unter den 12 Winkeln in A, B, C, D, E, F vier durch die übrigen achte können gefunden werden, welches vermittelst folgender 4 Gleichungen geschieht

$$ADB + DAE = EBD + BEA$$
$$AEB + FAE = AFB + FBE$$
$$BDC + EBD = BEC + ECD$$
$$BEC + FBE = ECF + CFB$$

Doch giebt es hiebey einige Ausnahmen. Denn in diesen Gleichungen kommen die vier mittlern Winkel so an E und B liegen jeder zweymal, hingegen die acht, so an den äußern Punkten A, C, D, F liegen, nur einmal vor. Wenn also jene vier, oder aus diesen solche mangeln, die in eben derselben Gleichung beysammen sind, so können sie durch diese Gleichungen nicht gefunden werden.

§. 116.

Laßt uns noch die analytische Auflösung anbringen. Es seyen die sechs Oerter A, B, Fig. 18. C, D, E, F. Nennet die Winkel und Seiten wie sie in der Figur mit den Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, x — h, y — k und L, M, N, P, Q angezeigt sind; so entstehen folgende sechs Gleichungen

$$\sin a : P = \sin (x + g) : L$$
$$\sin b : Q = \sin (y - k) : L$$
$$\sin c : P = \sin x : M$$
$$\sin d : Q = \sin y : M$$
$$\sin e : P = \sin (x - h) : N$$
$$\sin f : Q = \sin (y + l) : N$$

Aus zwo und zwoen die Seiten L, M, N, weggeschaft, bleibt

$$\frac{P}{\sin a} \sin (x + g) = \frac{Q}{\sin b} \sin (y - k)$$

$$P \sin x : sc = Q \sin y : \sin d$$

$$P. \sin (x - h) : \sin e = Q \sin (y + l) : \sin f$$

folglich

$$Q : P = \frac{\sin b. \sin (x + g)}{\sin a. \sin (y - k)} = \frac{\sin d. \sin x}{\sin c. \sin y}$$

$$= \frac{\sin f. \sin (x - h)}{\sin e. \sin (y + l)}$$

Und hieraus

$$\sin c. \sin y : \sin a. \sin (y - k)$$
$$= \sin d. \sin x : \sin b. \sin (x + g)$$
$$\sin c. \sin y : \sin e. \sin (y + l)$$
$$= \sin d. \sin x : \sin f. \sin (x - h)$$

daher durch eine leichte Verwandlung

$$\sin a. \sin d. \sin k (\cot k - \cot y)$$
$$= \sin b. \sin c. \sin g (\cot g + \cot x)$$
$$\sin d. \sin e. \sin l (\cot l + \cot y)$$
$$= \sin c. \sin f. \sin h (\cot h - \cot x)$$

Hieraus sieht man, daß die Aufgabe vom ersten Grade ist. Werden nun in jedem Fall die sinus und Cotangenten in Zahlen gerechnet, so läßt sich y oder x aus diesen beyden Gleichungen wegschaffen. Oder man findet allgemein

$$\cot x = \frac{sa\, sd\, sl \cos k + se\, sd\, sk \cos l - sc\, sb\, sl \cos g - sf\, sc\, sk \cos h}{sc\, sb\, sl\, sg - sf\, sc\, sk\, sh}$$

Ist

Ist aber der Winkel x = EAB gefunden, so findet man alle übrige durch bloßes addiren und subtrahiren, und folgends auch die Lage und Verhältnisse aller Seiten. Nach der gemeinen Trigonometrie habe ich keine bequeme Auflösung finden können. Es fällt sehr weitläuftig, wenn man in der 17 Figur die Lage der Punkte d, e, f in Absicht auf die Seite AC sucht, und aus denselben die Lage des Ortes B bestimmt.

IV. Entfernte Gegenstände.

§. 117.

Wir haben im vorhergehenden Abschnitte den Gebrauch der Mittagslinie deutlicher aus einander gesetzt, und denselben durch verschiedene merkwürdige Beyspiele erläutert, nach deren Anleitung noch mehrere können ausgedacht werden. Das wesentliche davon gründet sich auf die Eigenschaft, daß die Mittagslinie an jedem Orte kann gezogen werden, und daß man alle auf dem Felde gezogene Mittagslinien als parallel ansehen kann, so lange die Größe des Feldes in Vergleichung mit dem Abstande des Pols der Erde als unmerklich klein kann angesehen werden. Und in so ferne haben wir erinnert, daß auch entfernte Gegenstände unter eben dieser Bedingung statt einer Mittagslinie dienen können. Dieses werden wir nun besonders untersuchen,

 tersuchen,

tersuchen, und zu dem Ende bestimmen, worinn der Vorzug wirklicher Parallelen vor andern Linien, die nicht parallel sind bestehe, und was zu diesen noch hinzukommen müsse, damit man sie eben so wie jene gebrauchen könne.

§. 118.

Parallellinien bleiben immer gleichweit von einander entfernt, und da sie folglich nirgends zusammen laufen, so machen sie auch keinen Winkel, und daher ersparen sie uns die Mühe einen Winkel auszumessen, so bald man sie an jedem beliebigen Orte ziehen kann, wie wir dieses bey der Mittagslinie angenommen haben.

§. 119.

Ferner wenn Parallellinien von einer andern Linie durchschnitten werden, so ist diese gegen jene unter gleichen Winkeln inclinirt, und weiß man die Winkel an der einen, so sind auch die, so sie an den übrigen macht bekannt. Dadurch findet man sich im Stande mit jeden Linien auf dem Felde Parallelen zu ziehen, so bald man ihre Abweichung von einer Linie weiß, deren Lage man an jedem Orte bestimmen kann.

§. 120.

Laßt uns nun setzen man habe in A den
Fig. 19. Winkel BAD und in C die beyden Winkel BCA,

BCA, BCD gemessen, so ist aus obigem (§. 98) klar, daß die ganze Figur könnte zu Pappire gebracht werden, wenn AD mit CD parallel oder der Ort D unendlich entfernt wäre. Denn AD würde auf Ad fallen und der gemessene Winkel BAD wäre = BAd folglich hätte man auch BAE + BCF = CBA, und BAC = ACD — EAB. Da wir aber setzen D sey nicht unendlich entfernt, so bleibt die Figur unbestimmt, und es muß noch ein Datum hinzukommen, wenn man sie bestimmt haben will. Diß kann nun auf verschiedene Weise geschehen.

1°. Wenn man den Winkel in D oder ADC mißt. Denn dadurch findet man

$$CBA = 360^\circ - BAC - BCD - ADC.$$
$$BAC = 180^\circ - BCA - CBA.$$
$$CAD = 180^\circ - ADC - ACD,$$

2°. Wenn man das Verhältniß zwischen zwoen Linien weiß, und in diesem Falle ist das Verhältniß zwischen einer der längern Linien AD, CD und einer Seite des △ CBA bequemer, weil es uns fürnemlich um die Bestimmung dieses △ zu thun ist.

 §. 121.

§. 121.

Aus gleichem Grunde lassen wir auch die übrigen Data, z. E. die Winkel CBA, CAB weg. Denn wenn diese gemessen würden, so könnte man die Seiten BC oder AC als Standlinien ansehen, welches aber wider unsere Absicht wäre, weil wir untersuchen wollen, wie weit man sich entfernter Gegenstände bedienen könne, eine Figur in Grund zu legen, ohne sich an die Standlinie zu binden, oder an jedem folgenden Stande gegen die vorhergehenden, oder jeden andern sich umzusehen. Bey Entwerfung weitläuftiger Felder und ganzer Landschaften verursachen die Standlinien die meiste Beschwerlichkeit.

§. 122.

Wenn der Ort D so weit weg ist, daß der
Fig. 20. Winkel ADC nur wenige Minuten beträgt, und man sieht die Linien AD, CD als parallel an, so bekömmt der Winkel BAD die Lage bAd, und statt des wahren Triangels ABC erhält man den △ bAC, daher werden die beyden Seiten CB, AB um etwas kürzer, als sie seyn sollten. In vielen Fällen kann man sich damit begnügen, wenn es bey Bestimmung dieser Linien auf einen kleinen Unterschied nicht ankömmt. Soll aber der Fehler geringer gemacht werden, so muß man den Abstand des Puncts D wissen. Und es kömmt hiebey die Frage vor, wie ferne man denselben nur

nur ungefehr wissen dörfe. Dahin dienen folgende Betrachtungen.

§. 123.

Alle Instrumente lassen in der Observation der Winkel einen grössern oder kleinern Fehler zu. Die genauen verringern denselben bis auf wenige Secunden, die gemeinen aber, dahin wir vorzüglich das Meßtischgen rechnen, bleiben bey etlichen Minuten. Bey dem Compasse und den Azimuthaluhren ist er leicht noch grösser. Nach der Genauigkeit der Instrumente richtet sich auch die von der Figur, die man entwerfen will, und es ist schon lange eingeführt, daß man in jedem Falle einen Fehler setzet, den man nach Verschiedenheit der Absicht grösser oder kleiner als unmerkbar oder als zuläßig ansieht.

§. 124.

Dieses vorausgesetzt wollen wir den gegenwärtigen Fall umkehren. Es sey dem nach AC eine Standlinie, an deren beyden Enden man die Winkel DAC, DCA ausmißt, um dadurch den △ ACD zu bestimmen. Es ist für sich klar, daß die beyden Seiten desto weniger genau seyn werden, je kleiner die Standlinie AC, je ungleicher die beyden Winkel CAD und ACD, und je ungewisser das Instrument ist, dessen man sich zu Ausmessung der Winkel in A und C bedient hat. Nehmet

met demnach den Fehler an, dem das Instrument unterworfen seyn kann. Z. E. 2 Minuten. Machet jeden der Winkel DAC, DCA um diesen Fehler grösser, und wiederum jeden um denselben kleiner, und berechnet die Länge CD oder AD, und nehmet den Unterschied der beyden Producte, so wird dieser Unterschied anzeigen, wie ferne die Länge CD ungewiß ist. Es wird sich nemlich der grössere Abstand zum kleinern verhalten, wie die Tangente des Winkels in D, wenn ihr ihn um den doppelten Fehler vergrössert zu seiner Tangente, wenn ihr ihn um eben so viel verkleinert, und daher, weil der Winkel sehr klein ist, wie die Winkel selbsten. Setzet z. E. den Winkel in D, der durch die Ausmessung in A und C herauskömmt, sey ein Grad, und der Fehler bey dem Instrumente könne sich auf 2 Minuten belaufen, so kann der Winkel D bis auf 64 Minuten grösser, oder bis auf 56 Minuten kleiner seyn, folglich ist die Länge der Seiten CD, CA um den 7ten Theil ungewiß. Wäre der Winkel D nur 20 Minuten berechnet worden, so wäre die Ungewißheit wie 24 zu 16 folglich wie 3 zu 2.

§. 125.

Wir haben hier die gröste Ungewißheit berechnet, und müssen daher zu unserer Absicht nur die Helfte davon als das Mittel annehmen. Wenn wir demnach den Fall wieder

umkehren, so können wir zu Bestimmung des △ ABC die Länge CD oder CA als zureichend genau ansehen, wenn wir sie so groß annehmen, daß ihre Länge zwischen die erst angegebenen Schranken fällt.

§. 126.

Ueberdiß hängt die Grösse des Winkels D, wenn wir die Linie AD zum Grunde legen, nicht von der Seite AC, sondern von der Perpendicularlinie AE ab. Je kleiner also der Winkel ACE ist, desto unbestimmter kann die Länge CD bey gleichem Fehler seyn. Hat man demnach die Wahl, entweder den Ort D, oder die Linie AC, oder beyde nach Belieben anzunehmen, so ist klar, daß man den Fehler völlig verhüten wird, wenn man die Puncte A, C, D in gerader Linie annimmt. Dadurch erhält man wieder alle Vortheile der Parallellinien, weil eine jede Linie sich selbsten parallel ist. Wir werden nun diese vorläufige Betrachtungen auf verschiedene besondere Fälle anwenden, und dabey von dem leichtern zu den schwerern fortgehen.

I. Fall.

§. 127.

Wenn zwey entfernte Objecte so liegen, daß die Linie, die durch dieselbe gezogen wird, durch das Feld geht, so man ausmessen und

und in Grund legen will, und beyde können auf dem Felde gesehen werden. Dieser Fall kömmt sehr häufig vor, und es giebt nicht leicht ein offenes Feld, wo man nicht dergleichen Obiecte finden sollte. Die Eigenschaft, die wir hier gebrauchen, ist diese: daß wenn man sich auf dem Felde in gerader Linie mit diesen Objecten befindet, dieselbe einander bedecken, und hinwiederum, wenn sie vor einander stehen, so befindet man sich mit ihnen in gerader Linie. Sind beyde aufrechtstehend, so ist es sehr leicht jeden Punct zu finden, wo die Ecken derselben einander zu bedecken scheinen. In den übrigen Fällen mag ein Senkbley, so man vor sich herunter hängen läßt, zur Bestimmung dieser Puncte dienen. Das eine Object mag nahe bey dem Felde seyn, das andere aber ist desto besser, je weiter es entfernt ist. Die Spitze eines entfernten Gebürges oder die Ecke eines Meilenweit entlegenen Thurms sind dazu die dienlichsten.

§. 128.

Da wir setzen, daß man diese Objecte auf dem Felde sehen könne, so nehmen wir auch den Vortheil an, der daraus herfleußt: Daß man nemlich durch dieses Mittel eine durch das ganze Feld gehende gerade Linie, so gut als gezogen habe, und sich auf jeden Punct derselben stellen könne. Diesen

Diesen Vortheil werden wir nun zu gebrauchen suchen: Es seyen demnach die beyden Objecte A, B, und die Linie ABG gehe zugleich durch dieselbe und durch das auszumessende Feld. Nehmet auf demselben zween Puncte oder ausgesteckte Zeichen D, C, welche die bequemsten scheinen, und diese seyen DC, und suchet den Punct E, welcher in dem Durchschnitte der Linien AB, CD ist. An dergleichen Puncten kann es euch nicht fehlen, wenn das Feld viele Ecken oder kenntliche Zeichen hat, und wenn es auch hieran fehlte, so dürftet ihr solche selbsten wählen, und gerade auf der Linie AB anfangen, ein Zeichen auszustecken. Observiret in E den Winkel DEA, oder bringet die Linien DE, EA auf das Meßtischgen, und überdiß so viele andere, als ihr in E Ecken oder Oerter des Feldes sehet, die in den Grundriß eingetragen werden müssen. Gehet sodann auf der Linie AB weiter in das Feld, z. E. in F. Stellet daselbst euer Meßtischgen auf diese Linie, und richtet die auf demselben gezogene Linie EA wieder nach dem entferntesten Objecte A, damit das Meßtischgen seine behörige Lage bekomme. Fig. 2

§. 129.

Da ihr die Linie DE auf demselben gezogen habt, so ziehet auf dieser den Punct D, weil ihr eine Linie nothwendig annehmen müsset. Leget das Linial mit den Dioptren an an diesen Punct und zielet nach D, so wird es euch auf der Linie AG den Standpunct F abschneiden. An diesen leget das Linial an, und zielet nach den übrigen Ecken der Figur, gegen die ihr in E gezielet habt, so werdet ihr diese Ecken z. E. C durch die Durchschnittspuncte der Linien FC, EC auf dem Meßtischgen bekommen.

§. 130.

Kommen in F noch solche Ecken zum Vorschein, die ihr in E nicht gesehen, so ziehet Linien nach denselben, und verfüget euch auf der Linie AE weiter, z. E. in G. Richtet daselbst das Meßtischgen wiederum nach dem Object A, um nach denen Eckenlinien zu ziehen, deren Lage noch nicht bestimmt ist, z. E. die Linie GH in das Eck H, in welches ihr aus E die Linie EH gezogen.

§. 131.

Zieht sich euer Feld gegen L herunter, so daß ihr die Linie AB wegen der allzuspitzen Winkel nicht mehr wohl gebrauchen könnet, so wählet zwey andere entfernte Objecte K, J von eben der Eigenschaft wie A, B. Suchet den Punct M, wo beyde Linien AB, KJ einander durchschneiden. Richtet daselbst euer Meßtischgen nach A, um ihm seine Stellung zu geben. Wenn ihr nun in M eine der schon gezeichneten Ecken des Feldes z. E. H sehet, so

so legt das Linial auf dem Meßtischen an diesen Punct, und zielet nach eben demselben auf dem Felde, so könnet ihr die Linie HK ziehen, und folgends der Ort M bestimmen, wo ihr euch befindet. Legt an denselben das Linial an, und zielet nach dem entferntern Objecte K, so könnet ihr die Linie MK ziehen und sie gegen L verlängern. Diese wird auch im Fortgange eben die Dienste thun, welchen die Linie AB gethan. Die Bedingung, die in der ganzen Arbeit vorausgesetzt wird, ist, daß ihr auf jedem angenommenen Puncte der Linie AB, oder KJ noch eine Ecke oder Gegenstand des Feldes sehet, welchen ihr schon auf dem Meßtischgen habt. Wenn ihr das Feld nicht genug kennet, so ist es nützlich dergleichen Objecte in Vorrath auf den Riß zu bringen, wenn sie auch schon nicht dazu gehören. Sie dienen nicht nur, wenn etwa eins fehlen sollte, sondern auch zur Entdeckung der Fehler die sich bey so vielen Winkeln eräugnen und häufen könnten.

§. 132.

Es ist leicht zu erachten, daß wenn das Feld noch weitläuftiger ist, und sich noch mehr in die Krümme zieht, die Linie JK wieder verlassen, und andere dafür angenommeu werden können. Die Auswechslung geschieht auf eben die Art, wie wir es in Ansehung der Linie JK gezeigt haben. Ich habe nicht nöthig zu zu erinnern, daß man auf diese Art, um eine Figur, z. E. um eine Höhe oder Wald herum messen kann, wo nicht alle Ecken auf einmal in das Gesicht fallen. Man muß aber die Stände so wählen, daß man jede Ecke an zweyen Ständen, und an jedem Stande eine schon im Risse gezeichnete Ecke sieht. Jenes ist nothwendig, weil man sonst Umwege gebrauchen müßte, um die Ecke in Riß zu bringen. Dieses aber kann wegbleiben, wenn man nach der vorigen Anmerkung (§. 131.) andere Objecte die zur Seite liegen im Vorrathe auf den Riß bringt.

II. Fall.

§. 133.

Wir haben bisher angenommen, daß man genau auf den Linien AB, JK bleibe, welches auch, so lange keine Hinderniß vorfällt, allerdings leicht geschehen kann. Weicht man nnr so wenig davon ab, daß der Unterschied auf dem Meßtischgen nicht kann bemerkt werden, welches öfters von der Stellung des Meßtischgens herrühren kann, so ist für sich klar, daß der Fehler nichts zu achten ist, und sich unter die übrigen kleinen Fehler vermengt, die man auf eine andere Art zusammen genommen untersuchen kann. Die übrige Abweichungen zerfällen sich in zwo Classen.
Fig. 20. Es sey AD die Linie, auf welcher man das

das Meßtischgen stellen sollte, und E der Punct, wo es wirklich gestellt wird, so ist die Abweichung AE, und diese sollte auf dem Risse sichtbar und folglich beträchtlich seyn.

§. 134.

Man ziehe ED, und D sey der entferntere Gegenstand. Nun ist die Abweichung AE entweder so groß, daß der Winkel ADE beträchtlich wird, und auf dem Meßtischgen kann gezeichnet werden, oder sie ist kleiner und der Winkel ADE bleibt unmerklich, und kleiner als daß ihn das Meßtischgen angeben könnte, wenn man ihn in D observirte. In diesem letztern Falle kann man noch immer die Linien AD, ED als parallel ansehen. Aber die Bestimmung des Punctes, wo das Meßtischgen steht, wird geändert.

§ 135.

Setzet der Punct sey g. Da bey dieser Fig. 21.
Voraussetzung die aus G und g in das entferntere Object A gezogenen Linien noch so gut als parallel bleiben, so könnet ihr die auf dem Meßtischgen gezogene Linie nach A richten. Sehet sodann nach zwo Ecken, die ihr schon auf dem Riße habt, z. E. D, C. Leget auf dem Meßtischgen an die ihnen entsprechenden Puncte das Linial an, und zielet nach den Ecken D, C, so könnet ihr die Linien Dg, Cg ziehen, und folglich die Lage des

des Orts g wo ihr observiret, bestimmen. Ist diese gefunden, so gebraucht sie, wie vorhin den Punct G, statt dessen wir setzen, daß ihr euch ausserhalb der Linie AB in g befindet. Ueberhaupt so lange ihr euch von der Linie AB nicht so weit entfernet, daß die Abweichung der Winkel in A merklich wird, so bleiben euch alle Vortheile, die wir im vorhergehenden Abschnitte von der Mittagslinie gewiesen haben, und die wir hier nicht wiederholen wollen. Es ist leicht zu erachten, daß die Abweichung sehr merklich seyn kann, wenn der Ort A ein 10 und mehr Meilen weit entferntes Gebürge ist. Auf 10 Meilen betragen 60 Schuh Abweichung kaum eine Minute in dem Winkel bey A.

III. Fall.

§. 136.

Wenn die Abweichung den Winkel bey dem entferntern Objecte merklich machet. Es sey die Abweichung wiederum gG. Hier ist klar, daß das Meßtischgen eine merklich falsche Lage haben würde, wenn ihr die auf demselben gezogene Linie FE in g nach A richtetet, und die Lage würde um den Winkel gAG fehlen, den wir hier zwar merklich aber doch nicht über etliche Grade groß setzen.

§. 137.

Wenn in diesem Falle drey Ecken z. E. D, C, H schon wirklich auf dem Meßtischgen stehen. Die man in g sehen kann, so ist das Mittel allgemein, und von der Größe des Winkels gAG unabhängig. Denn es ist klar daß man durch die Aufgabe (§. 100.) die Lage des Puncts g durch die Winkel finden kann, welche die drey Ecken D, C, H in G machen. Ist hiedurch der Punct g auf dem Risse, so ziehet man die Linie gD, und richtet sie nach der Ecke D, und das Meßtischgen hat seine behörige Lage.

§. 138.

Siehet man in g nur 2 Oerter D, C, so kann man den Winkel DgC messen und daher durch D und C einen Circul ziehen, in dessen Umkreyse der Punct g liegen muß. Kann man nun dessen Abstand von der Linie AB wirklich ausmessen, so ziehet man auf dem Risse mit AB eine Parallele, welche den gezogenen Circul durchschneidet, und in dem einen Durchschnitte wird g liegen. Man kann aber aus den übrigen Umständen leicht bestimmen, auf welchem von beyden er wirklich liegt. Der schwerere Fall ist, wenn der Circul die Linie AG an zwey sehr nahen Orten durchschneidet. Uebrigens sieht man auch hier, daß es nützlich ist, wenn man Objecte in Vorrath auf das Meßtischgen gebracht hat.

§. 139.

Das Meßtischgen muß in allen Ständen diejenige Lage haben, daß alle darauf gezogene Linien, mit denjenigen parallel bleiben, die sie vorstellen, daher bleibt auch die Linie FE auf demselben der Linie AB parallel, wenn man gleich von derselben abweicht. Hieraus ergiebt sich noch ein Mittel das Meßtischgen in g in seine wahre Lage zu bringen, wenn man weiß, wie vielmal weiter der Ort A von g weg ist als der Ort B, zum voraus gesetzt, daß man A und B in g sehe. Hier nehmen wir nun an, daß der Winkel gAG nur ein oder zween Grade sey.

§. 140.

Fig. 22. Es seyen A, B die zwey entfernten Objecte, ABG die Linie, so dadurch geht, g der Stand, wo man observirt, gG seine Abweichung. Ziehet gN mit GA parallel, so stellt gN die Lage des Meßtischgens vor, und gA wäre die falsche Lage. In g sehet ihr B und A nach den Linien gB, gA, und könnt den Winkel BgA ausmessen. Nun ist der Winkel AgN = gAG, und um diesen muß der Winkel BgA vergrössert werden, wenn das Meßtischgen seine wahre Lage haben soll. Da beyde sehr klein sind, so verhalten sie sich wie ihre Tangenten BP, PN. Da nun BN = gG, so ist

$$BP : BN = BP : gG = AB : AG,$$

und

$$BP : PN = BA : BG = BgP : PgN.$$

folglich findet ihr aus der bekannten Verhältnis zwischen BA, BG und dem gemessenen Winkel BgP den Winkel PgN, welcher der Unterschied zwischen der falschen und wahren Lage des Meßtischgens in g ist. Daher könnet ihr ihm dadurch seine wahre Lage in g geben, und vermittelst zweyer Ecken D, C die Lage des Puncts g eben so wie (§. 135.) durch die Linien Dg, Cg bestimmen.

§. 141.

Sind die Winkel BgA, gAG sehr klein, und nur von wenigen Minuten, so ist genug, wenn man nur beyläuftig weiß, wie vielmal A von g weiter weg ist als B.

IV. Fall.

§. 142.

Wenn man auf der Linie AB alle Ecken des Feldes und über dem Felde hinaus einen sehr entferneten Horizont sieht. In diesem Falle kann man das Feld vermittelst einer bloßen Meßkette in Grund legen. Es sey die Linie AB, auf welcher man vermittelst der beyden Objecte A und B immer gerade fortgehen kann. Die Ecken des Feldes seyen C, D, E, F, G &c. Wählet auf dem Fig. 23.

Horizonte, so über dem Felde hinaus liegt, zwey andere Objecte, welche von der Linie BA ungefehr 60 und 120 Grade abstehen, damit ihr solche △ bekommen möget, die bey nahe oder vollkommen gleichseitig sind, und wobey folglich die Fehler am sichersten vermieden werden. Gegen diese Objecte richten sich die punctirten Linien der Figur, welche parallel seyn werden, sobald die Objecte als unendlich entfernt angesehen werden können.

§. 142.

Indem ihr nun auf der Linie AB gegen H, I, K &c. gehet, so bemerket jeden Punkt, wo ihr jedes der Ecken C, D, E &c. in gerader Linie mit den beyden gewählten Objecten sehet. Der Anfang sey in H, wo ihr das erste Eck C vor dem hintern Objecte nach der Linie HC liegen sehet. Schlaget die Meßkette an H an, und strecket sie in P, und stecket in P einen Stab ein. Gehet in p., wo ihr den Stab P vor dem andern Objecte nach der Linie pP sehet. Messet sodann die drey Seiten HP, pP, pH genau aus, so habt ihr auch die Winkel PHp, PpH, und wisset wie viel die beyden Objecte am Horizonte von der Linie AB, auf welcher ihr fortgehet. Sind diese Objecte so gut als unendlich entfernt, so wird diese Abweichung auf der ganzen Linie Hm einerley seyn, wie wir es hier annehmen. Die

Die Prüfung und Verbesserung werden wir nachher angeben.

§. 144.

Lasset nun die Kette von H angefangen, in einem fort umschlagen, und zählen, wie vielmal sie umgeschlagen worden, damit ihr den Abstand eines jeden der Puncte J, h, K, i, k, L, M, l, m &c. von dem ersten Punct H finden könnet, welches geschieht, wenn man jedesmal, wenn die Kette über einem dieser Puncte liegt, die Zahl der ganzen Umschläge, und den Ueberschuß an Ruthen, Schuhen und Zollen abzählt.

§. 145.

Hiedurch erlanget ihr die Lage zwoer Ecken der Triangel Hch, JDi, KEk, LFl, MGm &c, und könnet, wenn ihr über den Abstand der zusammen gehörenden Puncte H, h, I, i, K, k, L, l, M, m von dem ersten Puncte H Register haltet, zu Hause nach einem beliebigen Maaßstabe auftragen. Da ferner alle diese △ dem ausgemessenen HPh ähnlich sind, so dörft ihr nur aus jeden dieser Puncte mit den beyden Seiten pP, PH Parallellinien ziehen, und ihr Durchschnitt wird euch die Lage der Ecken C, D, E, F, G angeben.

§. 146.

Um nun zu finden, ob diese Linien wirklich parallel angenommen werden können, so setzet der Punct m sey der letzte. Schlaget daselbsten die Meßkette auf die Linie mG, so gegen das vordere Object geht, z. E. bis in Q, und stecket daselbst einen Stab ein. Gehet von m gegen g zurücke, bis ihr den Stab Q mit dem hintern Objecte in gerader Linie sehet. Diese sey qQ. Messet die drey Seiten mQ, mq, Qq genau aus, so habt ihr wiederum die Abweichungswinkel Qmq und Qqm. Findet ihr nun daß Qmq von PpH und Qqm von PHp so wenig verschieden ist, daß der Unterschied als unmerklich kann angesehen werden, so könnet ihr bey den Parallellinien bleiben, weil in diesem Falle die beyden gewählten Objecte in der That als unendlich entfernt können angesehen werden.

§. 147.

Sind aber diese Winkel merklich verschieden, so hat die ganze Länge Hm zu dem Abstande des einen oder beyder dieser Objecte eine merkliche Verhältniß, und die Linien können nicht mehr als parallel angesehen werden. Die Arbeit aber ist deswegen nicht vergebens, sondern nur um etwas weitläuftiger. Denn da muß durch die Winkel Qmq, PpH und Qqm, PHp der Abstand und die Lage beyder Objecte gefunden werden, und dadurch erlangt ihr zween Puncte, in welche die Linien, so wir vorhin als parallel setzten, zusammenlaufen. Die Winkel in h, I, i, K, k, L, l, M

M, welche wir gleich gesetzt haben, werden nun nach und nach geändert, und ihre Grösse wird am füglichsten durch Rechnung gefunden, wenn ihr nicht die Figur, wegen des großen Abstandes der Objecte sehr ins kleine ziehen wollet.

§. 148.

Da man diese Rechnung von selbsten einsehen, und mittelst der Trigonometrie zum Ende bringen kann, so werden wir uns hier dabey nicht aufhalten. Man sieht übrigens, daß man an statt so entfernter Objecte auch nähere annehmen kann. Allein die entferntere sind in allewege vorzüglicher, weil die Linien CH, ch, DJ, Di &c. dabey immer eine solche Lage behalten, daß die Durchschnittspuncte C, D, E, F, G genauer bestimmt werden. Bey nähern Objecten würden sich die blinden Linien je länger je schiefer und daher auch desto unsicherer durchschneiden, oder man müßte im Fortgange andere Objecte wählen.

§. 149.

Geht die Linie AB mitten durch die Figur, so habt ihr Ecken, welche auf beyden Seiten derselben liegen. Ungeacht ihr in diesem Falle einerley Objecte behalten könntet, so ist es doch ungleich mühsamer, die Puncte auf einer Linie zu bestimmen, welche mit den Ecken und den Objecten in gerader Linie sind, wenn die

die Ecken auf der einen und die Objecte auf der andern Seite liegen. Daher ist es bequemer, wenn ihr auch auf der andern Seite der Linie AB, zwey Objecte am Horizonte wählet, und damit auf erst beschriebene Weise verfahret. Endlich ist leicht einzusehen, daß die Bedingung, daß ihr immer genau auf der Linie AB bleibt, eine der nothwendigsten ist, weil die blinden Linien alle eine schiefe Lage gegen dieselbe haben.

§. 150.

Ferner ist klar, daß die ganze Figur genauer bestimmt wird, je näher die Linie AB an den Ecken C, D, E, F, G vorbey geht. Alle △ werden dadurch kleiner, und daher auch schärfer bestimmt, und die Fehler, so von den Winkeln herrühren, desto unmerklicher.

§. 151.

Zöge sich das Feld in die Krümme herunter, so kann die Linie AB, nebst den beyden
Fig. 21. Objecten abgeändert werden. Es ist klar, daß man hiebey den Punct M wissen muß, wo sich beyde Linien durchschneiden, und daß man den Winkel, den sie mit einander machen, eben so finden kann, wie wir die Win-
Fig. 23. kel in den △ HPp, mQq gefunden haben. Ist die Neigung beyder Linien schief, so verfährt man sicherer, wenn man den spitzen Winkel mißt. Endlich haben wir hier angenommen,

nommen, daß man die beyden Objecte auf der ganzen Linie Hm sehen könne. Ist dieses nicht, so muß man Hülfspuncte annehmen. So kann man gleich in H anfangen, an dem Horizonte noch mehrere Objecte zu wählen, und die Winkel, so sie in H und m mit der Linie AB machen, auf gleiche Art ausmessen. Sind diese Winkel von 60 Gr. merklicher unterschieden, so sind sie auch in Ansehung der Genauigkeit nicht so gut, weil schiefere △ dadurch entstehen. Sie müssen also nur zur Noth gebraucht werden. Die andern Hülfsmittel verschieben wir hier in folgenden.

V. Fall.

§. 152.

Es sey wiederum die Linie AB, auf welcher man die Objecte B, A und die Ecken C, D, E, F, G, H &c. aber über denselben hinaus Fig. 24
keinen Horizont oder keine entfernte Gegenstände sehe, so kann man wiederum die Figur mittelst der Linie AF und der Meßkette, wiewohl auf eine weitläuftigere Art in Grund legen, davon ich nur die Möglichkeit anzeigen werde.

§. 153.

Wählet euch demnach zwischen der Linie AF und den Ecken CH, die Gegenstände c, d,

 e, f.

c, f, g &c. so daß jedes derselben ungefehr halb so weit als die Ecken von der Linie AF entfernt sey, und daß sie eben so von einander zerstreut liegen wie die Ecken selbst. Finden sich keine Gegenstände, so lasset daselbst Zeichen ausstecken.

§. 154.

Von diesen Zeichen muß nun die Lage der beyden ersten c, d bestimmt werden. Machet mit (Ec) den Anfang, wo ihr die dritte Ecke E mit c in gerader Linie sehet, und von da an lasset wie vorhin die Meßkette gegen F umschlagen. Im Fortgange bemerket auf AF alle Puncte, wo die aus den Ecken der Figur durch die Zeichen c, d, e, f, g gezogenen Linien, die Linie AF durchschneiden unter folgenden Bedingungen:

1.° Die erste Ecke C hat nur zwo, die zweyte drey, und die folgenden vier Linien.

2.° Durch das erste Zeichen c gehen 3, durch die folgenden aber 4 Linien.

3.° Von diesen 4 Linien haben wir 2 in der Figur blind gelassen, und diese dienen um die Lage des Zeichens, die übrigen beyden um die Lage einer folgenden Ecke zu bestimmen.

§. 155.

Aus diesen Bedingungen erklärt sich die Figur selbsten.

1.° Die Lage der beyden Zeichen c, d, wird durch Ausmessung der Seiten von zweyen △ bestimmt, davon die Basis auf AF liegt und die beyden andern Seiten in c und d zusammen laufen.

2.° Durch diese Lage habt ihr die Ecken C, D, und E, und die punctirten Linien, so aus D und E gezogen sind, vermittelst der Puncte De, Ee, Ef, und daher auch die Lage des Puncts e.

3.° Durch die Puncte d, e, habt ihr die Lage des Puncts F durch die Linien Fd, Fe, und die punctirten Linien so in F zusammen kommen, könnet ihr gleichfalls ziehen. Eine davon giebt euch der Durchschnitt f, daher habt ihr auch die Lage dieses Zeichens.

§. 156.

Auf gleiche Art lassen sich die übrigen Ecken der Zeichen eines um das andere bestimmen, wenn alle Puncte auf der Linie AF durch die wirkliche Ausmessung ihres Abstandes von Ee gegeben sind. Bey der Ausmessung selbsten muß man darauf sehen, daß man keinen dieser Puncte weglasse. Diß geschieht am füglichsten, wenn man die Zeichen und Ecken numerirt, und Register darüber hält. So z. E. gehören

Zum Zeichen	c	die Ecken	C, D, E
	d	= =	C, D, E, F
	e	= =	D, E, F, G
	f	= =	E, F, G, H
	&c.		&c.

Woraus man leicht sieht, wie die Ecken nach einander abwechslen. Zu jedem Zeichen gehört ein neues Eck, nebst den drey vorhergehenden.

§. 157.

Ich habe diese Aufgabe hier angebracht, weil sie auf einer andern Seite betrachtet etwas besonderes hat. Die zween von den Triangeln, deren Ecken in d und c und deren verlängerten Seiten in C und D zusammen stoßen, haben wir deßwegen angenommen, damit die Lage der Puncte d und c dadurch bestimmt würde, und überhaupt sieht man leicht, daß die ganze Figur construirt werden kann, wenn die Lage von vier derer Linien gegeben ist, welche durch die Zeichen oder durch die Ecken der Figur gezogen worden. Dieser Umstand macht, daß man von denen Linien, die in C zusammen laufen nur 2 und von diesen, so in D zusammen treffen nur drey nöthig hat. Und eben so wenig gebraucht man für die letzten Ecken H, G, weil da diejenigen überflüßig werden, so man sonst zur Bestimmung der Zeichen e, f, g &c. gebraucht hatte.

§. 158.

§. 158.

Die Lage von vier Linien, oder die Winkel, welche sie mit AF machen, sind so nothwendig, daß wenn man auch durch c und g noch Linien in F und G, desgleichen aus H, G, D, C noch andere durch e, d, f gezogen hätte, die Figur dennoch nicht hätte können construirt werden. Was aber hiebey merkwürdig scheinet, ist dieses, daß wenn man die beyden Puncte d und c nach Gefallen annimmt, und die Figur eben so construirt, als wenn ihre Lage richtig angenommen wäre, alle Durchschnitte ordentlich eintreffen, und daß man dadurch statt des geometrischen Grundrisses einen perspectivischen Aufriß bekommt der die Linie AF zur Grundlinie hat, dessen Horizont mit derselben parallel ist, aber auf welchem man weder seine Lage, noch den Augenpunct noch die Distanz des Auges weiß, und diese Stücke nur alsdenn finden kann, wenn die Lage von 4 Linien, oder die Winkel so sie unter sich oder mit der Linie AF machen, bekannt sind.

§. 159.

Setzet ABCD sey das Feld oder dessen Grundriß. Verlängert seine Seiten und Diagonalen bis an die Linie EH, Wenn ihr nun von der Figur nichts anders wisset als die Abschnitte H, G, M, F, E so kann dennoch Fig. 25.

die

die Figur perspectivisch entworfen werden. Nehmet z. E. die Linie MK, und auf derselben die Puncte a, c nach Belieben an, welche das Bild von A, C seyn sollen. Ziehet die Linien Hc, Fa, Gab, Ebc, welche sich in b und d durchschneiden, und abcd wird der perspectivische Entwurf von ABCD seyn, desgleichen wird die Diagonal ca verlängert, in eben den Punct M treffen, in welchen die Diagonal CA läuft.

§. 160.

Wenn nebst den Puncten A, B, C, D noch unzählige andere auf dem Grundrisse sind, so werden sie sich auf gleiche Art perspectivisch zeichnen, und mit den Puncten a, b, c, d zusammen hängen lassen, aber noch ohne Horizont, ohne Augenpunct, und ohne Abstand des Auges von der Tafel. Setzet ihr nun ABCD sey ein Parallelogrammum, so dürft ihr nur in seinem Bilde die Seiten verlängern, bis sie sich durchschneiden, welches in I und L geschieht, und die Linie IL wird der Horizont und mit HE als der Grundlinie parallel seyn. Den Beweis hievon kann man aus den Grundsätzen und Regeln, die ich in der Anweisung jeden perspectivischen Aufriß ohne Grundriß zu verfertigen, vorgetragen, leicht herleiten. HE ist die Grundlinie, weil sie mit der Grundfläche einerley geometrischen Maaßstab hat.

hat. Der Horizont ist mit derselben nothwendig parallel, und muß sich da befinden, wo solche Linien, die auf der Grundfläche parallel sind, auf dem perspectivischen Risse zusammenlaufen. Die übrigen Mittel den Horizont, den Augenpunct und den Abstand des Auges zu bestimmen, finden sich in erstbesagtem Werke in dem Abschnitte von den umgekehrten Aufgaben der Perspective.

§. 161.

Uebrigens achte ich nicht, daß die Aufgabe, die wir hier angebracht haben, in der practischen Geometrie oft vorkomme. Wenn die Strassen in einem Lande in gerader Linie fortgiengen, und man auf denselben, die umliegenden Berge, Dörfer, Schlösser ꝛc. unverhindert sehen könnte, so ließe sich dadurch ihre Lage mit Hülfe eines Schrittzählers im Durchreisen zureichend genau bestimmen, um eine Land-Charte davon zu machen. Es gienge ebenfalls noch an, wenn man die Wendung des Weges, besonders, wenn er sich lange Stücke durch in die Gräde zöge, bey jedem Ecke ausmessen wollte. In der Ausübung, wo so mancherley Hindernisse vorfallen können, ist es immer nützlich, mehrere Mittel in Vorrath zu haben, und die practische Geometrie hat besonders nöthig durch die Untersuchung derselben bereichert zu werden.

V. Ver-

V. Verticale Linien und Flächen.

§. 162.

Verticallinien sind der Erdfläche, oder vielmehr auf der Fläche des stehenden Wassers senkrecht. So lange man die Erde vollkommen sphärisch geglaubt hat, hat man auch annehmen können, daß sie im Centro der Erde zusammen laufen. Nachdem man aber dieselbe abgeplattet befunden, so hat man die Verticallinien angefangen für das anzusehen, was sie wirklich sind, nemlich für Halbmesser der Krümmungskreyse der Mittagscircul. Der Unterschied beträgt fast in allen Fällen der practischen Geometrie eine Kleinigkeit, die man nur da zu achten hat, wo Verticallinien durch sehr entfernte Puncte der Erdfläche gezogen werden. Wir werden demnach bey der ersten Hypothese bleiben, so lange es nicht nöthig ist, auf den Unterschied zu sehen.

§. 163.

Diese Linien haben unstreitig in der ausübenden Meßkunst merkliche Vorzüge vor der Mittagslinie, allein ihr Gebrauch ist dagegen viel eingeschränkter. Die Vorzüge, die sie haben, gründen sich auf den Hydrostatischen Satz, daß die mittlere Richtung der Kräfte, die auf eine flüßige Fläche drücken, auf dieser Fläche aller Orten senkrecht seyn. Diese Kräfte sind die Schwere und

und die Bewegung der Erde, und aus beyden wird die Krümmung der Mittagscircul der Erde bestimmt.

§. 164.

Hiedurch hat man ein gedoppeltes Mittel Vertical- und Horizontallinien zu ziehen, die man aller Orten gebrauchen kann. Das erste ist der wagrechte Stand der Fläche des Wassers, und überhaupt der flüßigen Cörper. Diese Fläche ist aller Orten horizontal, und aller Orten sind die Verticallinien auf derselben senkrecht. Das andere ist die Richtung der fallenden und hangenden Cörper, und diese ist aller Orten gegen die horitontale Fläche senkrecht.

§. 165.

Da ferner die verticale Linien sämtlich im Mittelpuncte der Erde zusammen treffen, dieser Punct aber bey 860 Meilen von der Erdfläche entfernt ist, so kann man sie in den meisten Fällen der practischen Geometrie als parallel ansehen, und wo diß nicht zuläßig ist, da kann man den Winkel bestimmen, unter welchem sie sich durchschneiden. In so weit haben also die Verticallinien mit den Mittagslinien gemeinsame Vortheile, daß man dieselbe aller Orten ziehen, und dadurch zu Parallellinien gelangen kann, welche uns in jedem Falle einen oder mehrere Winkel ersparen,

sparen, wie wir dieses oben schon gewiesen haben.

§ 166.

Allein die Vortheile der Verticallinien sind in vielen Absichten merklicher. Einmal kann man sie leichter und genauer ziehen als die Mittagslinie, welche man nur mit mehrerer Arbeit, mit Verlust der Zeit und nur bey hellem Wetter genau ziehen kann, und wobey man horizontale Linien und Flächen oder verticale Linien gebrauchen muß. Sodann wird der Gebrauch der Mittagslinie desto eingeschränkter, je mehr man gegen die Pole rückt, und unter den Polen hört er vollends auf, weil alle in diesen Puncten zusammen laufen. Hingegen bleibt der Mittelpunct der Erde von ihrer Fläche aller Orten fast gleich entfernt, und der Unterschied beträgt eine Kleinigkeit, die sich durch die Halbmesser der Krümmung der Mittagscircul bestimmen läßt, hier aber nicht in Betrachtung gezogen wird. Dieser Umstand macht den Gebrauch der Verticallinien auf der ganzen Erdfläche allgemein. Endlich dienen dieselben aller Orten zu Bestimmung der Horizontalfläche, und aus gleichem Grunde zur Bestimmung der Lage einer jeden andern Fläche.

§. 167.

Dieses sind zusammen genommen und überhaupt betrachtet, die Vortheile, die wir von

von den Verticallinien haben, und die man suchen muß recht brauchbar zu machen. Allein ihr Gebrauch ist eingeschränkter, als der von von der Mittagslinie. Die Parallellinien, die sie uns so genau geben, sind auf verticalen Flächen, und auf diesen haben wir eben nicht viel auszumessen Wirkliche Verticalflächen beut uns die Natur wenige oder gar keine an, und die wir haben, sind die Werke der Baukunst, welche aber aus guten Gründen nicht vollkommen vertical sind.

§. 168.

Man hat daher den Gebrauch der Verticallinien auf die bloße Ausmessung der Höhe der Gegenstände eingeschränkt, und hierin geben sie uns alle Vortheile, die man von einem rechtwinklichten Triangel haben kann, von welchem man die Lage der beyden kürzern Seiten ohne Ausmessung weiß, und daher weiter nichts als die Lage der längsten Seite zu bestimmen hat, welches allemal durch die Ausmessung eines der an ihr liegenden Winkel geschehen kann. Da man den rechten Winkel ohnehin weiß, so hat man durch einen der andern Winkel, und eine Seite die übrigen 3 Stücke desselben. Hierin besteht der ganze Vortheil, den uns die Verticallinien geben.

 §. 169.

§. 169.

Da in der Ausübung die Ausmessung der Höhen der Oerter, viel seltener vorkommt, als die Ausmessung horizontaler Linien, so ist klar, daß dieser Vortheil gemeinnütziger wird, wenn man ihn auf diese Seite wendet, und in dem erst beschriebenen Triangel die Länge der aufrechtstehenden Linie zum Maaße der liegenden gebraucht. Ist aber diese, wie es fast allezeit geschieht, vielmahl länger als jene, so ist leicht zu erachten, daß die beyden spitzen Winkel sehr ungleich werden, und daß sich ein kleiner Fehler, so man in Messung derselben begeht, auf die ganze Länge der Linie ausdehnt, daher fordert der Gebrauch dieses Mittels die gröste Schärfe in der Ausmessung der Höhe und der Winkel. Sodann sind die meisten Fälle so beschaffen, daß man sich mit einem einigen △ nicht aushelfen kann, weil die wirkliche Ausmessung einer Seite desselben, unmöglich wird. Gebraucht man aber zween Stände, so wird gefordert, daß selbige in gleicher Horizontalfläche liegen, und dieses macht die Arbeit wieder schwerer und ungewisser. Endlich kömmt bey einem allzugroßen Abstande die Refraction des Lichts in der Luft hinzu, welche wiederum besonders muß bestimmt werden.

§. 170.

So wechslen die Umstände ab. Die Mittagslinie läßt sich schwerer genau bestimmen, aber wenn sie einmal gezogen ist, kann man sie treflich gebrauchen. Die Verticallinie giebt sich leicht und genau, hingegen häufen sich die Hindernisse bey ihrem Gebrauche. Was wir, um dieselben aus dem Wege zu räumen, thun können, ist, daß wir annehmen, die Winkel können so genau gemessen werden, als es die Umstände erfordern. Die Genauigkeit der Instrumente, die man heutiges Tages hat, lassen diese Voraussetzung als die erträglichste zu, und mit Hülfe des Micrometers an Fernröhren, werden auch sehr kleine Winkel noch zureichend genau können ausgemessen werden, und die Schätzung des Fehlers, den sie noch verursachen können, bestimmt sich in vielen Umständen so, daß wir der Wahrheit näher kommen können.

§. 171.

Es sey nun AB ein aufrecht stehendes Object oder eine Verticallinie, und man befinde sich in C, so kann man daselbst nicht nur die Horizontallinie CA ziehen, auf welcher AB senkrecht steht, sondern da man in C ebenfalls Verticallinien auf AC aufrichten kann, z. E. ab, so hat man dadurch den ganzen △ ABC ins kleine gebracht, und was man in abC im kleinen ausmißt, ist so gut als in dem großen ABC ausgemessen. Es ist ferner klar, daß die Redensart, in C die Höhe des Objects B auszumessen, schlechterdings beziehungswei- Fig. 26.

se muß genommen werden, weil C höher oder tiefer liegen kann. Wenn man demnach die Höhe AB zum Maaße annähme, um dadurch die Entfernung AC vermittelst des Winkels BCA zu bestimmen, so muß man versichert seyn, daß A und C in gleicher Horizontalfläche liegen, und dieses ist schwer zu bestimmen, so bald man den Punct A in C nicht sieht, wie es gemeiniglich geschieht.

§. 172.

Wenn man hiebey weiter nichts sucht, als die Länge der Linie AC, so ist das Mittel in allen denen Fällen leichte, wo BD eine wirkliche Verticalfläche ist, die über die andern Objecte empor steht. Hohe Thürme in einer Stadt, und Gebäude die auf Anhöhen liegen, haben diese Eigenschaft. Man nehme daher nicht die ganze Höhe BA sondern nur den kenntlichen Theil BD an, so lassen sich in C die Linien CA, CD, CB und ab ziehen, und die beyden △ CAD, CDB werden in Cad, Cdb im kleinen vorgebildet. Da in A immer ein rechter Winkel ist, so hat man durch die ausgemessenen Winkel ACD, ACB auch die Winkel ADC, ABC und folglich mittelst der Linie BD genug Stücke, um alle 3 Linien AC, DC, BC zu bestimmen.

§. 173

Wenn in diesem Falle die Winkel ACD, ACB sehr groß sind, so werden nicht nur diese 3 Linien, sondern auch AD und AB, und folglich die Erhöhung der Puncte B und D genau bestimmt. Wir nennen hier genau, wenn der Fehler, so zu besorgen ist, in Vergleichung mit dem Ganzen sehr geringe wird. Daher, wenn AC vielmal länger ist als AB, so wird ein gleicher Fehler, den man bey Ausmessung der Winkel in C begeht, die Verhältniß der Linien AD, AB merklicher ändern, als die Verhältniß der falschgemessenen Linie AC zur wahren, zum vorausgesetzt, daß der Winkel BCD, welcher der Unterschied zwischen den gemessenen BCA, DCA ist, richtig sey, wie er dann fast immer richtiger ist. Denn die beyden Winkel ACD, ACB hängen nicht nur von der Eintheilung des Instruments, sondern auch von seiner Stellung, der Winkel BCD aber allein von der Eintheilung des Instruments ab, und dieser kann, zumal wenn er klein ist, mittelst des Micrometers sehr genau gemessen werden, weil wir annehmen, daß man die Linie BD in C sehe. Ferner sind die Winkel DCA, BCA der Stralenbrechung unterworfen, so bald der Abstand AC merklich groß ist. Ungeacht man aber in C nach einer gleichen Horizontallinie schaut, und folglich immer auf den Punct A trift, wenn die Entfernung und Höhe des Orts C einerley bleibt, so hat man dadurch keinen andern Fehler zu besorgen, als daß man nach den drey Linien CA, CD, CB, die in diesem Fall eine

eine merkbare Krümmung haben, die ganze Linie AB höher sieht, als sie wirklich ist, und daher ihre Erhöhung über den Ort C nicht anderst genau bestimmen kann, als daß man die nunmehr auch merkbare Krümmung der Erde und die Stralenbrechung mit in die Rechnung zieht. Hingegen werden die Winkel DCA, BCD durch die Stralenbrechung nicht geändert, wie ich es in dem Tractate *Les proprietés remarquables de la route de la lumiere par les airs* für die irrdischen Gegenstände bewiesen habe. Dieser Umstand macht also, daß man den Winkel BCD auch deßwegen genauer weiß.

§. 174.

Ist der ganze Winkel BCA nur ein oder etliche Grade, wie dieses bey grössern Entfernungen nothwendig statt hat, so ist der Winkel BCD alleine zureichend, um die Entfernung AC durch BD zu bestimmen. Denn da die Linien CD, CB hier als Secanten von sehr kleinen Winkeln können angesehen werden, so ist aus der Trigonometrie klar, daß sie sehr wenig von einander unterschieden sind. So z. E. wenn BCA von 3 Grad ist, so ist BC ungefehr um $\frac{1}{700}$ grösser als CA. Es ist klar, daß man damit zufrieden seyn kann, wenn der Winkel BCD nicht mehr als um einen so kleinen Theil fehlet. Ist BCA nur 1 Grad, so ist BC kaum um den 6600ten Theil grösser als

als AC, um desto mehr kann jene für diese genommen werden, weil ein gleicher Fehler in dem Winkel DCB nun eine noch merklichere Verhältnis hat.

§. 175.

In diesen Fällen kann man DBC als einen rechten Winkel ansehen, und dieses muß desto allgemeiner angehen, je näher D bey A ist. Da nun der Winkel DCA auch in denen Fällen nur ein oder zween Grade seyn kann, wo der Winkel BCA von vielen Graden ist, so sieht man, wie weit sich unsere Voraussetzung erstreckt, wenn wir uns mit der Linie BD und dem Winkel BCD begnügen. In allen diesen Fällen ist DC die Cotangente des Winkels BCD, wenn man BD als den Halbmesser ansieht. Ueberhaupt, so lange der Fehler, der aus dieser Hypothese entsteht, vielmal kleiner ist, als der, den man von dem ausgemessenen Winkel BCD zu befahren hat, wird diese Hypothese nothwendig zuläßig seyn.

§. 176.

Wenn BD beständig ist, und D nicht auf A fällt, so ist auf der Linie AC irgendwo ein Punct, in welchem der Winkel BCD am grössten ist. Denn es ist klar, daß dieser Winkel =0 wird, wenn C auf A fällt, und wenn es unendlich entfernt wird. Eben dieses gilt

auch,

auch, wenn gleich AC auf AB nicht rechtwinklicht ist. Laßt uns demnach diese Aufgabe allgemeiner auflösen, weil sie besondere Umstände hat. Es mache demnach AB mit AC einen beliebigen Winkel. Auf AB sey die Linie BD abgeschnitten. Und es ist die Frage, wo auf der Linie AC der Punct C liege, in welchem der Winkel BCD unter allen der gröste sey.

Fig. 27.

§. 177.

Setzet C sey dieser Punct. Nehmet auf gleicher Linie den Punct c, dem C unendlich nahe, und zieht die Linien Bc, Dc, so muß nach der Natur des grösten und kleinsten der Winkel BCD = BcD seyn. Da nun diese beyden Winkel auf gleicher Linie BD stehen, so ist nothwendig, daß die vier Puncte B, D, C, c in dem Umkreise eines Circuls liegen, und weil die Chorde Cc unendlich klein ist, so muß dieser Circul die Linie AC in C berühren. Dieser Circul, welcher durch diese Eigenschaft bereits construirt werden kann, sey BDC. Da nun die beyden Winkel ABC und AC auf gleicher Chorde DC stehen, so sind sie einander gleich, und aus einem ähnlichen Grunde ist auch ADC = ACB, folglich sind die beyden Triangel ACD, ABC einander ähnlich, daher

$$AD : AC = AC : AB$$

folglich ist die Distanz AC die mittlere Proportional zwischen den beyden gegebenen Linien AD und AB. Und da sie hiedurch ohne den Winkel BAC bestimmt wird, so folgt daraus, daß auf jeden Linien, so aus A gezogen werden können, der Punct C, in welchem BD unter dem grösten Winkel erscheint, von A gleich entfernt sey, und daß folglich dieselbe sämtlich um A herum in einem Circul liegen, dessen Mittelpunct A, und der Halbmesser die mittlere Proportionalzahl zwischen AD und AB ist.

§. 178.

Dieser Circul sey CE, ziehet die Linie CE, so habt ihr

$$AE = AC$$

folglich

$$AD : AE = AE : AB$$

Daher auch

$$AD : AE = DE : EB$$

Nun ist

$$AD : AE = AD : AC = DC : CB$$

folglich

$$DC : CB = DE : EB$$

Daher wird der Winkel DCB durch CE in zween gleiche Theile getheilt.

§. 179.

Ferner ist der Winkel

$$ACB = ACD + DCB$$

$$DCA = ABC$$

folglich

folglich
ACB = ABC + DCB = 180° — ABC — BAC
daher
BAC = 180° — 2 ABC — DCB
folglich lassen sich aus zween Winkeln die übrigen finden.

§. 180.

Wenn BAC = 90° ist, so ist
2 ABC = 90° — DCB
und
ADC = 90° — ABC.

§. 181.

Könnte man demnach ohne Mühe den Ort C finden, wo der Winkel BCD am grösten ist, welches mittelst der Camera obscura geschehen kann, so würde man aus dem Winkel BAC und dem grösten BCD die Verhältniß zwischen AD, AB AC finden. Die grösten Winkel haben die Eigenschaft, daß man sie sehr genau finden kann, wenn man auch den Punct C nicht genau weiß, weil sie sich sehr wenig ändern, wenn auch die Linie AC sich ziemlich stark in ihrer Länge verändert. Um desto leichter können sie genau gemessen werden.

§. 182.

Wenn BD sehr klein ist, so ist AC von AD und AB sehr wenig verschieden, und der Unter-

schied verschwindet vollends, wenn BD = 0 wird. Laßt uns nun diesen Fall umkehren, und den Winkel DCB als einen kleinen Fehler ansehen, den man bey Ausmessung des Winkels DCA oder BCA begehe. Diesen Fehler wollen wir von beständiger Grösse setzen. Es entsteht also die Frage, wo man auf der Linie AC seyn müsse, um die Linie AB vermittelst der Winkel BAC und BCA am genauesten auszumessen, wenn der Fehler nur auf den letztern fällt, und von beständiger Grösse ist. Da der Winkel BCD bey gleichem Fehler der Linie BD, in C am grösten ist, so ist offenbar auch in C der Fehler DB bey gleichem Fehler im Winkel am kleinesten, und folglich wird auf der Standlinie AC der gesuchte zweyte Stand C da seyn, wo AC die mittlere Proportionale zwischen AB und AD ist. Man sieht zugleich hieraus, daß die Standlinie AC eine gleiche Länge behält, der Winkel EAC mag grösser oder kleiner seyn, daß aber hingegen der Fehler DB zugleich mit dem Winkel DAC wächst.

§. 183.

Wenn wir annehmen, der Winkel BCD und bey nähern Gegenständen der Winkel DCA werden genau gemessen, so kann man durch die Linie BD den Abstand AC finden, oder durch diesen jene. Denn es ist überhaupt Fig. 26.
AC :

$$AC : BD = (\cos ACB. \cos DCA) : \sin BCD.$$

Hat man aber nur die Winkel BCD, DCA, so findet man auch nur die Verhältniß zwischen AC und BD, und diese mag in vielen Fällen dienlich seyn, besonders, wenn man vermittelst der Linie BD mehrere Abstände unter sich vergleichen, und dadurch andere Linien und Figuren bestimmen will. So z. E. wenn man näher gegen A in E ist, und mißt die Winkel DEA, BED, so findet man, ohne BD zu wissen, wie sich AE, zu AC verhalte; Mißt man nun eine der Linien AE, AC, EC, BD aus, so hat man auch alle übrige. Und es ist hier nicht nöthig, daß E und C vollkommen auf gleicher Fläche seyn. Die Verhältniß zwischen den Linien BD, AE, AC bleibt einerley, wenn auch ein merklicher Unterschied zwischen der Höhe von E und C ist; Und ebenfalls bleibt sie einerley, wenn auch A, E und C nicht in gerader Linie liegen. Hingegen verändert sich in diesen Umständen die Länge von EC, so bald die drey Puncte A, E, C merklich von einer geraden Linie abweichen, es mag nun seitwärts oder in die Höhe, oder schief hinauf geschehen, so muß man einen der Winkel wissen, den zween derselben in dem dritten machen. Ist aber die Abweichung von der geraden Linie nur einen oder zween Grade, so

so wird sich EC zu den meisten Absichten noch zureichend genau bestimmen lassen, wenn man die Linie AEC als vollkommen gerade ansieht. Hingegen, wenn man nicht nur die Länge EC, sondern auch die würkliche Lage der Puncte A, E, C suchet, so muß der Winkel gemessen werden, wenn er auch in der ersten Absicht nichts zu achten wäre. Die Genauigkeit muß immer aus den Absichten und Umständen bestimmt werden, die man in jedem Falle vor sich hat.

§. 184.

Da man also vermittelst der Verticallinien die Verhältnisse zwischen horizontalen Linien finden kann, so entstehen hiebey sehr viele Aufgaben, je nachdem man andere Umstände zusammenpaaret. Von diesen werde ich nun einige hier anbringen.

§. 185.

Befindet man sich mit zweyen verticalen Objecten BD, bd, in gerader Linie in C und c, und mißt die Winkel BCD, BcD, BCA, BcA, bCd, bCa, bcd, bca, so läßt sich die ganze Figur zu Pappire bringen. Nehmet AC an, und richtet AB perpendicular auf, so geben euch die Winkel BCA, BCD die beyden Puncte B, D. Verlängert AC gegen a, und durch die Winkel BcA, DcA oder durch ihre Complemente cBA, cDA habt ihr den Punct c. Fig. 28.

Aus

Aus den beyden Puncten C, c könnet ihr durch die übrigen 4 Winkel die Linien Cb, cb, Cd, cd ziehen, und aus b eine senkrechte Linie auf Aa fällen. Diese soll durch d gehen, und hiedurch läßt sich die Richtigkeit der Observation prüfen. Eben dieses wird durch Rechnung gefunden. Durch die Formel des §. 183. habt ihr die Verhältnisse zwischen AC und Ac, desgleichen zwischen Ca und ca. Setzet AC=1, so findet ihr Ac und folglich auch Cc. Nun ist Cc dem Unterschiede der Zahlen proportional, wodurch ihr die Verhältniß zwischen Ca und ca ausdrückt. Folglich verhält sich dieser Unterschied zu Cc, wie die grössere Zahl zu Ca, und wie die kleinere zu ca.

§. 186.

Es ist hiebey nicht nöthig, daß C und c in gleicher Höhe seyn, weil die Linien AC, Ac, Cc, Ca, ca überhaupt nur den horizontalen Abstand der Puncte A, C, c, a vorstellen. Hingegen müssen diese Puncte in einer gleichen Verticalfläche liegen, oder wenigstens davon nur unmerklich abweichen. Endlich wenn man auf Aa ausser C, c noch mehrere Stände annimmt, so werden diese noch zu genauerer Bestimmung der Fehler dienen, weil je zween und zween Stände unter sich können verglichen werden.

§. 187.

§. 187.

Liegen aber die beyden Stände C, c nicht in gleicher Verticalfläche mit A und a, so kann man dennoch durch eben die Winkel die Verhältnisse zwischen AC und Ac, desgleichen zwischen Ca und ca finden. Aber man muß noch andere Data haben, um die Figur zu Papire zu bringen. Und es ist klar, daß hieraus so viele Aufgaben entstehen, als man diese Data abwechseln kann. Wir wollen hievon nur etliche angeben. Die leichtesten sind wenn man die Verhältniß zwischen BD und bd und überdiß noch einen horizontalen Winkel weiß, welchen zween von den Puncten A, C, c, a in dem dritten machen. Denn aus der Verhältniß zwischen BD und bd, und den in C und c gemessenen Verticalwinkeln findet man die Verhältnisse zwischen allen vier Abständen AC, Ac, CA, ca, und der horizontale Winkel giebt ihre Lage durch eine leichte Construction. Wenn von den Puncten A, C, c, a drey in gerader Linie liegen, und man mißt überdiß noch den horizontalen Winkel, welchen der vierte Punct in einem der drey erstern mit dieser Linie macht. Setzet die Lage der vier Puncte sey A, C, c, a. Aus den verticalen Winkeln habt ihr die Verhältnisse zwischen AC, Ac, und zwischen Ca, ca. Habt ihr nun einen der Winkel in C oder c gemessen, so findet ihr den andern leicht. Denn die Sinus dieser Fig. 29.

J Winkel

Winkel verhalten sich wie die gegenüberstehenden Seiten Ca, ca. Da nun die Verhältniß zwischen diesen Seiten bekannt ist, so findet ihr aus dem Sinu des gemessenen Winkels den Sinum des andern, und folgends den Winkel selbst. Beyde geben sodann die Lage des Puncts a.

§. 188.

Ist der Winkel AaC, oder Aac, oder Cac oder aAC gemessen worden, so sind die Auflösungen verschieden.

1.° **Für den Winkel** Cac. Setzet Ca $=1$, so findet ihr ca durch die gegebene Verhältniß zwischen Ca und ca. Da ihr nun in dem △ Cac zwo Seiten und den zwischen liegenden Winkel habt, so findet ihr auch die Seite Cc, und einen jeden der Winkel C, c. Diese Winkel geben die Lage des Puncts a. Und die Seite Cc giebt CA vermittelst der Verhältniß zwischen AC und Ac. Denn der Unterschied der Zahlen, wodurch diese Verhältniß ausgedruckt wird, verhält sich zu Cc, wie die kleinere Zahl zu CA, oder wie die grössere zu cA.

2.° **Für den Winkel** AaC. Setzet denselben $=a$, den Winkel Aac $=x$, cAa $=y$, so habt ihr

$$AC : \sin a = Ca : \sin y$$
$$Ac : \sin x = ac : \sin y$$

folglich

folglich wenn y weggeschaft wird

$$Ca . \sin a : AC = ca . \sin x : Ac$$

und daher

$$\frac{AC}{Ac} : \frac{aC}{ac} = \sin a : \sin x$$

Nun aber sind AC : Ac und aC : ac die gegebenen Verhältnisse, daher wird durch diese Proportion der Winkel Aac aus dem Winkel AaC, oder hinwiederum dieser aus jenem gefunden. Da ihr nun hiedurch auch den Winkel Cac findet, so ist die Auflösung auf die vorige gebracht.

3.° **Für den Winkel** Aac. Wenn ihr denselben $=x$, und den Winkel AaC $=a$ nennet, so habt ihr die erstgefundene Formel, und das übrige ist wie im zweyten Falle.

4.° **Für den Winkel** aAC. Setzet AC $=1$, so habt ihr Ac durch die gegebene Verhältniß. Es sey demnach Ac $=b$, der gemessene Winkel aAC $=a$, die Linie Aa $=x$ so ist

$$aC^2 = 1 + x^2 - 2x \cos a$$
$$ac^2 = b^2 + x^2 - 2xb \cos a$$

folglich

$$aC^2 : ac^2 = (1 + x^2 - 2x . \cos a) : (b^2 + x^2 - 2b x . \cos a)$$

Da nun die Verhältniß zwischen aC und ac gegeben ist, so setzet aC : ac $= 1 : n$, und ihr habt

$n^2 +$

$$n^2 + n^2x^2 - 2nx\cos a = b^2 + x^2 - 2bx\cos a.$$

$$x^2 + \frac{2\cos a\,(n-b)}{1-nn}.x = n^2 - b^2$$

welche Gleichung die Linie Aa giebt, und zugleich zeigt, daß zween Fälle möglich sind, und daher aus andern Umständen erörtert werden muß, welcher davon der wirklich vorhandene sey.

§. 189.

Alle diese Fälle lassen sich auf eine gleiche Art construiren. Es seyn die vier Oerter Fig. 30. A, C, c, a. Nehmet AC an, und durch die gegebene Verhältniß findet ihr Ac, und folgends Cc. Da ihr auch die Verhältniß Ca : ca wisset, so machet

$$(Ca + ca) : Ca = Cc : CG.$$

oder wie die Summe der Zahlen, dadurch die Verhältniß ausgedruckt wird zu der grössern derselben, also Cc zu CG. Hiedurch findet ihr den Punct G. Ferner

$$(Ca - ca) : Ca = Cc : CF$$

oder wie die Differenz eben dieser Zahlen zu der grössern, also Cc zu CF. Auf GF als auf einem Diameter beschreibet den halben Circul GaF auf der Seite, auf welcher der Punct a liegt, und dieser wird irgendwo in dem Umkreise dieses halben Cirkuls liegen.

§. 190.

Um nun den Punct zu finden, wo er liegt, so gebrauchet den ausgemessenen horizontalen Winkel.

1.° Ist einer der Winkel in c, C, A gemessen worden, den die Linien ac, aC, aA mit AC machen, so dörft ihr ihn nur an den gegebenen Punct c, C oder A auf AC setzen, und die Linie ca, Ca oder Aa ziehen. Wenn diese Linie den halben Circul an zween Orten durchschneidet, so sind zween Fälle möglich, weil der Punct a in beyden Durchschnitten liegen kann, welches hier bey den Linien Aa und Ca geschieht.

2.° Wenn der Winkel Cac gemessen worden, so sehet Cc als eine Chorde eines Circulbogens an, welcher doppelt so viele Grade hat, und construiret denselben. Dieser Circul Cca, wird den halben Circul in den gesuchten Punct a durchschneiden.

3.° Eben so werdet ihr den Punct a finden, wenn einer der Winkel AaC, Aac gemessen worden, nur daß in dem ersten Falle zween Durchschnitte möglich sind und daher der wahre aus andern Umständen bestimmt werden muß.

§. 191.

Wenn von den vier Puncten A, C, c, a drey nicht in gerader Linie liegen, so muß man zween Winkel messen, und diese können wieder auf sehr viele Arten combinirt werden. Es seyen die vier Puncte A, C, c, a Fig 31. und die Verhältnisse zwischen AC, Ac und zwischen aC, ac werden als gegeben angenommen.

men. Da wir uns mit den zween Ständen in C, c begnügen wollen, so werden wir hier drey allgemeine Fälle haben, weil man die beyden Stände mit einander verwechseln kann. Und diese Fälle lassen sich noch auf zweene bringen, weil man bey dem dritten die Verhältnisse nicht nöthig hat.

§. 192.

Denn da wir setzen, daß man in C und c die beyden Oerter A, a sehen müsse, so kann man 1.° in C und c die Winkel ACa, Aca messen, ohne daß man an dem einen Stande nöthig habe, nach dem andern zu sehen, welches in der Ausübung allemal ein Vortheil ist, weil man sich dabey an die Stände nicht binden darf. 2.° Ist C ein solcher Ort, den man in jedem andern Stande sehen kann, so kann man sich begnügen das Meßtischgen, oder das Instrument, womit man horizontale Winkel mißt in c mitzunehmen, und da mißt man die beyden Winkel CcA, Aca, und diese sind zureichend. Endlich wenn man an jedem der beyden Stände C, c den andern sehen kann, und hat in beyden das Instrument zu Ausmessung der horizontalen Winkel, so hindert nichts, das man nicht alle 4 Winkel ACc, aCc, AcC, acC sollte messen können, dadurch aber wird die Linie Cc in aller Form zur Standlinie, und die Verhältnisse werden überflüßig. Wir bleiben demnach bey den beyden ersten Fällen, und werden sie nun auflösen.

§. 193.

Sind demnach die beyden Winkel ACa, Aca gemessen worden, so nennet ACa $=$ a, Aca $=$ b, und Aa $=$ z. und es ist

$$zz = AC^2 + Ca^2 - 2\,AC.\,aC.\,\cos a$$
$$zz = Ac^2 + ac^2 - 2\,Ac.\,ac.\,\cos b$$

Hiedurch wird z abgeschaft. Setzet ferner wegen der gegebenen Verhältnisse

$$Ac = n.\,AC$$
$$ac = m.\,aC$$

so habt ihr

$$AC^2 + aC^2 - 2AC.aC.\cos a = n^2.\,AC^2 + m^2.aC^2 - 2\,n.m.aC.AC\cos b$$

Da ihr nun AC annehmen könnet, so setzet AC $= 1$, aC $= x$, so ist

$$1 + x^2 - 2\,x.\cos a = n^2 + m^2x^2 - 2\,n\,m\,x.\,\cos b.$$

Diese Gleichung giebt die Linie aC, und zeigt zugleich, daß wiederum zween Fälle möglich sind, von welchen der wahre aus andern Umständen erkannt werden muß.

§. 194.

Wenn die beyden Winkel ACc, aCc gemessen worden. Die Sinus der Winkel ACc, AcC verhalten sich wie die gegenüber stehenden Seiten Ac, AC, folgends sind sie in gegebener Verhältniß, und der Winkel AcC wird durch den Winkel ACc gefunden. Auf

 gleiche

gleiche Art findet ihr den Winkel acC durch den Winkel aCc, weil die Verhältniß zwischen ihren gegenüberstehenden Seiten aC, ac gegeben ist. Hiedurch habt ihr alle Winkel, und wenn eine Seite z. E. Cc angenommen wird, alle übrigen Seiten.

§ 195.

Bey allen diesen Auflösungen sieht man, daß noch der Maaßstab fehlet, und daher, um diesen zu haben, jedesmal eine Linie wirklich ausgemessen seyn muß. Da wir ferner alle angenommene Verhältnisse auf die Winkel BCD, BCA &c. gründen, so ist klar, daß selbige desto genauer gemessen werden müssen, je kleiner sie sind. Wir haben dieses gleich Anfangs zum Grunde gelegt, und wegen der Genauigkeit der Instrumente, und besonders der Fernröhren so mit Micrometern versehen, lassen sich diese Aufgaben und die folgenden weit ausdehnen, und besonders bey Grundlegung ganzer Provinzen, mit Vortheile gebrauchen, wo man fast immer zween und mehrere Thürme sieht, und dadurch jeden Stand, wo andere Winkel auszumessen sind, bestimmen kann. Man kann auch dergleichen verticale Objecte selbsten sich verschaffen, wenn man auf Anhöhen Stämme von Bäumen aufrichten läßt, und an denselben kenntliche Zeichen B, D befestiget. Ueberdiß sind alle diese Aufgaben so beschaffen, daß man dadurch die

Fig. 28.

die horizontalen Entfernungen der Oerter und Stände findet, wenn sie auch nicht in gleicher Horizontalfläche liegen, welches man sonst in ähnlichen Aufgaben annimmt.

§. 196.

Wie man in diesen letztern Fällen, die wir betrachtet haben, in zween Ständen C, c, die Lage aller 4 Oerter A, C, c, a, findet, so ist klar, daß wenn man noch mehrere Stände annimmt, in welchen man die verticalen Objecte A, a siehet, durch diese Aufgaben immer zween und zween Stände mit einemmale zu Papire gebracht werden. Eben so, wenn man im Fortgange zu den Objecten A, a noch andere nimmt, und sie nach und nach abändert, so kann man durch dieses Mittel dieselben sämtlich zu Papire bringen, und mittelst der observirten horizontalen Winkel, welche jede andere Oerter in zween Ständen C, c mit den Linien CA, cA oder ca, Ca machen, dieselbigen gleichfalls in den Riß eintragen. Der Hauptvortheil besteht darinn, daß man sich in keinem Stande um die andere umsehen darf, wenn man nur in zween und zween, zwey gleiche verticale Objecte sieht.

Fig. 31.

§. 197.

Wenn man auf einer Verticalfläche die Höhe DC und die horizontale Breite CB oder wenigstens die Verhältniß zwischen beyden

Fig. 32.

weiß, und sodann in A den horizontalen Winkel CAB und die Winkel mißt, den die Linien AE, AD mit dem Horizonte machen, so findet man in beyden Fällen die Lage des Standes A, in Absicht auf die Grundlinie CB, und die Verhältniß zwischen allen Linien, im ersten Fall aber das wirkliche Maaß derselben. Nehmet ED nach dem wirklichen Maaße oder willkührlich an, so findet ihr den horizontalen Abstand AC durch die Formel des §. 183. Durch die Verhältniß zwischen ED und CB findet ihr auch CB, folglich habt ihr in dem horizontalen Triangel ABC die zwo Seiten AC, CB und den Winkel CAB. Nun ist

$$CB : \sin CAB = AC : \sin CBA$$

Hiedurch wird folglich auch der Winkel in B, und hieraus der in C, folgends die Lage des Standes A in Absicht auf die Grundlinie CB gefunden. Die übrigen Linien lassen sich hieraus im wahren oder im angenommenen Maaße bestimmen.

§. 198.

Da wir annehmen, daß man auch sehr kleine Winkel genau messen könne, und überdiß die horizontalen Winkel einerley gefunden werden, der Observirstand A mag höher oder niedriger seyn, als CB, so wird die Aufgabe hiedurch sehr allgemein. Uebrigens müssen allemal die Linien ED, CB so genau gemessen werden als die Winkel, und besonders bey kleinen Winkeln bis auf sehr kleine Theile, weil der Fehler mit dem Abstande AC sich vergrössert.

§. 199.

Die Lage des Standes A läßt sich schwerer genau bestimmen, wenn der Winkel CAB klein, und die beyden Winkel ACB, ABC sehr wenig von einander unterschieden sind. Kann man demnach den Stand A nach Belieben annehmen, so ist es besser, wenn derselbe nicht gerade vor der Seite CB gewählt wird, sondern daß die Winkel in C und B merklich ungleich werden.

§. 200.

Ist der Stand so nahe, daß wenn man auch die Winkel FAB, GAB mißt, dieselben merklich kleiner oder grösser sind, als die Winkel EAC, DAC, und man setzet ED = FG, so hat man den horizontalen Winkel CAB nicht nöthig, und die Linien CB, ED sind zureichend, um die Lage des Standes A zu bestimmen. Denn man findet dadurch die beyden Seiten AC, AB, (§. 183.) und da man die dritte CB schon weiß, so ist der ganze Triangel ABC und daher das übrige alles gegeben. Mißt man den Winkel CAB dennoch, so wird er zur Prüfung der Fehler dienen.

§. 201.

§. 201.

In DE befinde sich ein aufrechtstehendes Object, vermittelst dessen man, wie in den vorhergehenden Fällen die Verhältniß zwischen den Linien DB, DC, DA, welche der Abstand der drey Stationen A, B, C sind, findet. Wenn nun die Seiten des △ ABC ausgemessen werden, so kann man die Lage des Orts D in Absicht auf den △ ABC finden. Fig. 33.

§. 202.

Verlängert die eine Seite AB des △ ABC, wenn es nöthig ist, und fället die Perpendicular CF aus der Ecke C darauf. Es sey der gesuchte Ort in D, und die Linien DA, DB, DC gezogen, deren Verhältniß gegeben ist. Fället gleichfalls die Perpendicular DEG und und ziehet CG mit FE parallel. Da die Linien AB, BF, FC, EG bekannt sind, so nennet $FC = EG = 2a$, $BF = b$, $AF = c$, $DE = y - a$, $DG = y + a$, $FE = CG = x$, so ist Fig. 34.

$$CD^2 = x^2 + (y+a)^2$$
$$BD^2 = (x+b)^2 + (y-a)^2$$
$$AD^2 = (x+c)^2 + (y-a)^2$$

Da ferner die Verhältniß zwischen CD, BD, AD gegeben ist, so setzet

$$CD^2 = BD.^2\, m$$
$$CD^2 = AD.^2\, n$$

Hieraus

Hieraus wird

$$x^2 + (y+a)^2 = m(x+b)^2 + m(y-a)^2 = n(x+c)^2 + n(y-a)^2$$

folglich

$$0 = \frac{2mbx + mbb - 2ay(m+1)}{m-1} + x^2 + y^2 + a^2$$

$$0 = \frac{2ncx + ncc - 2ay(n+1)}{n-1} + x^2 + y^2 + a^2$$

Hieraus ferner

$$x\left(\frac{2mb}{m-1} - \frac{2nc}{n-1}\right) = \frac{ncc}{n-1} - \frac{mbb}{m-1} + 2ay\left(\frac{m+1}{m-1} - \frac{n+1}{n-1}\right)$$

oder

$$y = \frac{mbb(n-1) - ncc(m-1)}{4a(n-m)} + \frac{mb(n-1) - nc(m-1)}{2a(n-m(}.x$$

Wird der Werth von y, den diese Gleichung giebt, in einer der beyden vorhergehenden gesetzt, so kömmt man auf eine Quadratgleichung, in welcher nur noch x ist, und folglich gefunden werden kann. Man sieht zugleich hieraus, daß diese Aufgabe einen doppelten Werth giebt, und dabey folglich zween Fälle möglich sind, davon der wahre aus andern Umständen jedesmal bestimmt werden muß.

§. 203.

Man kann die Auflösung auf eine leichte Art construiren. Verlängert zwo Seiten des Fig. 35.
△ ABC,

△ ABC, z. E. AB und CB gegen die Ecke welche dem Punct D näher liegt. Machet sodann

$$(AD + DB) : DB = AB : BF$$
$$(AD - DB) : DB = AB : BG$$

und

$$(CD + DB) : DB = CB : BH$$
$$(CD - DB) : DB = CB : BI$$

welches geschehen kann, weil AD, BD, CD hier nur die Zahlen vorstellen, durch welche die Verhältnisse zwischen diesen Linien ausgedruckt werden. Da nun hiedurch die Puncte F, G, H, I gefunden werden, so beschreibt auf FG und HI als auf Diametern die zween Circul FDG, HDI, welche sich in D und d durchschneiden, und einer dieser Durchschnitte wird der gesuchte Ort seyn, welches aber aus den übrigen Umständen muß ausgemacht werden.

§. 204.

Nach der Methode, die wir oben angegeben haben, findet man die Verhältniß zwischen dem horizontalen Abstande der Ecken A, B, C, von dem verticalen Objecte D. Wird demnach auch der horizontale Abstand dieser Ecken unter einander gemessen, so ist nicht vonnöthen, daß sie weder unter sich noch mit dem Orte D in gleicher Horizontalfläche liegen, und hiedurch wird der Gebrauch dieser Aufgabe allgemeiner.

§. 205.

§. 205.

Die Objecte, welche über der Erdfläche erhoben sind, sind fast alle so niedrig, daß man sie in einer mäßigen Entfernung unter einem sehr kleinen Winkel sieht, und die meisten Berge fordern dazu höchstens einige Meilen Weges. Wir können uns dieses Umstandes in sehr vielen Fällen bedienen, um die verschiedenen Höhen der darauf befindlichen Objecte unter einander zu vergleichen. So z. E. wenn man den Berg AB in der Entfernung D sieht, und der Winkel BDA nur von etlichen Graden ist, so werden die Höhen BE, CF den Winkeln BDA, CDA desto genauer proportional seyn, je stärker sich die vordere Fläche des Berges AB in die Höhe zieht, oder je grösser der Winkel BAE ist. Der Fehler, den man hiebey zuläßt, besteht darinn, daß man die Linien BD, CD, AD einander gleich setzt. Diesen Fehler kann man noch überdiß vermindern, wenn man auch den Winkel BAE nur beyläufig weiß. Doch muß man, wenn man ihn nur nach dem Augenmaaße schätzen will, dasjenige dabey beobachten, was wir oben von dem Bilde der in der Luft erhabenen Objecte und besonders von den Gipfeln der Berge gesagt haben. Fig. 36.

§. 206.

Wenn man sich aber so weit von dem Berge entfernt, so ist natürlich, daß man auch die

die Winkel in D sehr genau messen müsse. Ein Fernglaß mit dem Micrometer thut hierinn die sichersten Dienste. Setzet, daß man damit noch eine Secunde messen könne, so läßt sich ein Grad in 3600. Theile theilen. Es ist klar, daß dadurch die Winkel in D so genau gemessen werden können, als man es verlangen kann, und daß folglich die Fehler allein von dem angenommenen Winkel BAE herrühren. Diese aber lassen sich in jedem Falle so weit schätzen, daß man dabey sehen kann, ob sie in den daraus geschlossenen Höhen BE, CF auf eine beträchtliche Art fehle. Man findet zwar dadurch nur die Verhältnisse zwischen den verschiedenen Höhen, und eine davon muß sodann wirklich gemessen werden. So ist auch klar, daß D ungefehr in gleicher Höhe mit dem Berge BA seyn müsse, welches aber bey sehr großen Entfernungen ohne hin statt hat, weil diese machen, daß die Linien BD, AD keine merkliche Neigung gegen den Horizont haben.

VI. Die Sonne und ihr Schatten.

§. 107.

In so ferne uns die Sonne zur Ziehung der Mittagslinie dienet, haben wir sie bereits betrachtet, und werden nun sehen, was ihr Schatten in der practischen Geometrie dienen

dienen kann, um dessen Gebrauch allgemeiner zu machen.

§. 208.

Die Gründe, worauf wir hier bauen werden, um die Hauptsache zu entwickeln, sind diese: daß die Sonne als unendlich entfernt angesehen werden könne, und ihre Stralen in gerader Linie fortgehen. Hiedurch gelangen wir wieder zu Parallellinien, von welchen wir bey jedem Schatten zween Puncte haben, nemlich den Punct an dem Objecte welches den Schatten wirft, und den auf dem Objecte, auf welches derselbe fällt: An jedem Orte, wo die Sonne zu gleicher Zeit scheinet, kann man mit diesen Linien Parallelen ziehen, und dadurch ihre Lage bestimmen. Wenn man also noch andere Linien oder Winkel dazu nimmt, so fällt man auf verschiedene Aufgaben, wie dadurch die Lage der Objecte bestimmt wird. Die bekannteste derselben, und die wir hier übergehen werden, ist die, wo man aus der horizontalen Länge des Schattens eines aufrechtstehenden Objectes, und aus dem Schatten eines angenommenen Maaßes die Höhe bey jenem findet.

§. 209.

Ueberhaupt giebt der Gebrauch des Schattens bey geometrischen Ausmessungen keine sehr große Schärfe, und daher dient derselbe, wo man etwas nur beyläufig bestimmen will. Die erste und fürnehmste Hinderniß ist der Halbschatten, welcher mit der Entfernung zunimmt und ungewisser wird. Sodann macht die Bewegung der Sonne, daß man wo mehrere Schatten zu observiren sind, dieselben auf einmal bemerken, oder die Zeit der Observation mit in die Rechnung ziehen muß.

§. 210.

Dieses vorausgesetzt, daß man nicht die gröste Schärfe suche, werden wir nun verschiedene Aufgaben vortragen, und dabey sehen, wie ferne die Sonne die Ausmessung verschiedener Winkel ersparen, und statt eines zweyten Standes dienen könne.

§. 211.

Es sey demnach AB ein erhabenes Object, und B werfe seinen Schatten in C, so ist
Fig. 37. BC die Richtung der Lichtstralen, und AC die horizontale Richtung des Schattens, und der Winkel BCA ist die Höhe der Sonne, welche ihr zu gleicher Zeit ausmessen könnet. Befindet ihr euch nun in D, so messet den Winkel ADC, und indem ihr auf dem Meßtischgen oder auf jeder horizontalen Fläche einen Stab DE aufrichtet, so zeichnet zu gleicher Zeit wenn der Schatten von B in C fällt,

C fällt,

C fällt, die Strecke des Schattens DF, welchen der Stab von sich wirft, so ist EF wiederum die Richtung der Lichtstralen, und folglich in BC parallel, in gleichem ist DF mit AC parallel. Daher ist auch CDF = DCA. Wenn ihr demnach die beyden Winkel ADC, CDF und die Höhe der Sonne oder den Winkel EFD ausmesset, so wird sich die ganze Figur construiren lassen.

§. 212.

Denn in der Pyramide BADC, habt ihr auf der Grundfläche ACD die zween Winkel in D und C. Wenn ihr derohalben DC annehmet, so läßt sich AC und AD finden. Auf diesen beyden Linien ist AB senkrecht aufgerichtet, folglich BAC = BAD = 90.° Da ihr nun AC gefunden habt, und der Winkel BCA der Sonnenhöhe gleich ist, so findet ihr auch AB, und durch AB und AC den Winkel ADB.

§. 213.

Wenn ihr die Höhe der Sonne nicht gemessen hättet, sondern den Winkel ADB, und die Direction des Schattens DF nebst den Winkeln ADC, DCF, so würdet ihr wiederum aus der angenommen Seite DC die Seiten AD, AC, und durch AD und ADB die Höhe AB, aus dieser und AC den Winkel BCA und folgends die Höhe der Sonne finden.

§. 214.

Wiederum wenn ihr nur die Höhe der Sonne, und die Winkel BDA, ADC messet, so gebraucht ihr die Strecke des Schattens nicht. Nehmet AB an, so findet ihr AC durch die Höhe der Sonne oder den Winkel BCA, ingleichen AD durch den Winkel BDA. In dem △ ADC habt ihr nun zwo Seiten AC, AD und den Winkel ADC, hieraus findet ihr die beyden andern Winkel und die dritte Seite DC. Das sicherste ist alle Stücke zu messen, weil sie zur Untersuchung der Fehler dienen. Und da übrigens noch der Maaßstab fehlet, so muß eine Seite wirklich ausgemessen werden. Die bequemste und öfters die einige, welche sich in der That ausmessen läßt, ist DC, und diese kann man hier als eine Standlinie ansehen.

§. 215.

Wir haben hiebey angenommen, daß A, C, D in gleicher Horizontalfläche liegen, welches eben nicht allezeit geschieht. Ist B die Spitze eines Thurmes, so kann ihr Schatten an ein gegenüberstehendes Haus oder auf ein Dach fallen, und wenn B der Gipfel eines Berges ist, so fällt sein Schatten fast immer auf gegenüberliegende Berge oder unebene Flächen. Da man D und A allezeit horizontal machen kann, so kömmt die Schwürigkeit nur bey C vor, und diese kann auf eine gedoppelte Art gehoben werden.

§. 216.

Einmal, wenn man nur die Höhe des Puncts B über A oder D suchet. Setzet z. E. C sey höher als D, und die aus D gezogene Horizontallinie Dc falle in c, ziehet cb mit CB parallel und aus A in c eine gerade Linie, so ist nun AcD der horizontalliegende Triangel, und der Schatten, welcher in c fallen würde, käme von dem Punct b her. Wenn ihr demnach wiederum die Winkel ADc, cDF nebst dem ADB messet, so nehmet Dc als den horizontalen Abstand des Orts C an, und ihr findet wie vorhin die Seite AD durch Dc, cDA und AcD = cDF. Ferner findet ihr aus AD und ADB die Höhe AB, welche mußte gefunden werden. Der horizontale Abstand Dc muß endlich ausgemessen werden, um alle Linien in einem bekannten Maaße zu haben.

§. 217.

Wollet ihr auch die Höhe Cc finden, so dörft ihr nur die Höhe der Sonne dazu nehmen. Denn da ihr AC bereits gefunden, so werdet ihr dadurch und durch den Winkel bcA die Höhe Ab finden. Ziehet diese von AB ab, so bleibt bB = cC, welches zu finden war.

§. 218.

Wenn ihr überdiß die Winkel CDc und BDC ausmesset, so werden selbige zu Untersuchung der Fehler dienen, welche hier fürnehmlich von dem Halbschatten herrühren. Ist die Höhe BA einmal bekannt, so kann man den Schatten C, wo er auch hinfällt, und so lange er in A gesehen wird, zur Bestimmung der Lage dieser Oerter, und ihrer Höhe gebrauchen, ohne sich von A wegzubegeben. Es ist für sich klar, daß diese Aufgabe in bergichten Ländern, zumal wenn es hohe und steile Gebürge sind, vorzüglich brauchbar ist. Wie man die Höhe der Sonne und die Strecke des Schattens aus der Zeit finden, und daher alles auf die Winkel ADC oder ADc und BDA reduciren könne, ist aus der Astronomie bekannt.

§. 219.

Wirkliche Verticalflächen, z. E. die Wände der Gebäude geben uns noch ein ander Mittel das Licht und den Schatten der Sonne zu gebrauchen, wenn wir annehmen, daß man die Zeit genau bestimmen könne, wenn das Sonnenlicht anfängt oder aufhört diese Flächen zu bescheinen. Denn in diesem Fall ist die Sonne in denselben in gerader Linie, und wo ihr euch befindet, könnet ihr zu gleicher Zeit einen Stab aufrecht stellen, und die

Strecke des Schattens wird mit diesen Flächen eine parallele Lage haben.

§. 220.

Es stehe demnach auf AB eine verticale Fläche, und in eben der Zeit, wenn die Sonne anfängt oder aufhört diese Fläche zu bescheinen, zeiget ihr in C die Strecke des Schattens, CD oder CE, so ist ED mit AB parallel. Messet sodann die Winkel ACB, BCD, so habt ihr ABC = BCD und BAC = ACB, folglich die Lage des △ ACB. Ist demnach AB bekannt oder ausgemessen, so findet ihr auch AC und BC. Der Winkel ACB muß desto genauer gemessen werden, je kleiner er ist, und in eben diesem Falle muß man auch die Länge AB sehr genau wissen, weil man daraus die längern Linien AC, BC bestimmen soll. Fig. 30.

§. 221.

Will man auf diese Art einen Tag auf einem hohen Thurme in einer Stadt zubringen, auf welchem man die Seiten der Häuser sieht, so wird man durch dieses Mittel einen großen Theil der Stadt noch ziemlich genau in Grund legen können, weil sich immer ein △ an den andern anhängen läßt. Die Höhe des Thurms giebt die Standlinie. Das schwürigste dabey ist die genaue Bestimmung der Zeit, wenn die Seiten anfangen oder aufhören im Schatten zu seyn.

 §. 222.

§. 222.

Die tägliche Bewegung der Sonne macht, daß man sich, ohne vom Orte zu weichen, alle Tage mit der Sonne und mit denen Objecten die gegen Morgen, Mittag und Abend liegen, in gerader Linie befinden kann. Ein Faden, den man mit einem Gewichte beschwert vor sich herunter hängen läßt, mag zur genauesten Bestimmung dienen. Observirt man die Zeit eben so genau, wenn dieses geschieht, oder man zeichnet auf einer horizontalen Fläche die Strecke des Schattens vom Faden, so weiß man alle Azimuthalwinkel dieser Objecte. Und ist der Observirort ein Fenster, durch welches man das umliegende Feld sieht, so kann man nach Bequemlichkeit diese Winkel bestimmen. Thut man dieses ebenfalls an einem der observirten Oerter, so ergiebt sich dadurch die Lage aller dieser Objecte sehr genau.

§. 223.

Will man die Arbeit kürzer machen, so kann man des Nachts, besonders beym Mondscheine, die Zeit observiren, wenn bekannte Sterne über jedem Objecte stehen oder beyde von dem hangenden Faden bedeckt werden. Nimmt man mehrere Sterne zu Hülfe, so wird wenig Zeit von einer Observation zur andern verfließen. Aus der Zeit werden die Azimuthalwinkel der observirten Objecte bestimmt.

VII.

VII. Das reflectirte Licht.

§. 224.

Die Reflexion des Lichtes giebt uns zween gleiche Winkel, weil dasselbe unter eben dem Winkel zurück geworfen wird, unter dem es einfällt. Diese Eigenschaft hat zu einer bekannten Aufgabe Anlaß gegeben, da man ohne einen Winkel zu messen, die Höhe eines Objectes finden kann. Es sey in C eine horizontalliegende Fläche, welche das Licht zurückwirft, dergleichen die Fläche des stille stehenden Wassers von Natur ist. Das Auge sey in B und sehe in C das erhabene Object E durch den reflectirten Stral ECB. ACD sey die Horizontallinie, so ist der Winkel BCA = ECD. Aus B und E ziehe man BA und ED senkrecht auf AD, so sind die △ ABC, CDE einander ähnlich. Man mißt AB, AC, CD, und schließt Fig. 39.

$$AC : AB = CD : DE.$$

und dadurch findet man ED.

§. 225.

Es scheinet daß zween Umstände verhindert haben, diese Aufgabe abzukürzen, und die Ausmessung der 3 Linien BA, AC, CD auf eine einige zu bringen. Einmal, weil man dabey die Ausmessung der Winkel ersparen wollte, sodann, weil man gemeiniglich AC, CB

 sehr

sehr klein, und nur deswegen annimmt, damit man die Verhältniß zwischen diesen beyden Linien finden, und daraus die Verhältniß zwischen CD und DE schliessen könne. Fallen diese beyde Umstände weg, so ist auch nicht nöthig, die Aufgabe so enge einzuschränken.

§ 226.

Verlängert BA und EC bis in b, so ist Ab = AB, und AbC = ABC. Werden demnach die beyden Winkel ABC und CBE gemessen, so ist es eben so viel als wenn bBE und BbE gemessen worden wären. Bb = 2BA wird demnach zur Standlinie, und desto vortheilhafter, weil sie doppelt so lang ist als BA. Hat also bB zu AD eine beträchtliche Verhältniß, daß der Winkel BEb von etlichen Graden wird, so läßt sich die ganze Figur sehr genau construiren, weil man die Winkel in B genau ausmessen kann, und die ganze Schwürigkeit kömmt auf die Wasserfläche C an, weil diese sehr stille und breit seyn muß. Das erste wird erfodert, damit man das Bild deutlich und genau sehe, und das letztere ist nothwendig, weil sich das Wasser in einem engern Gefäße entweder in der Mitte oder am Rande in die Höhe zieht, und daher seine Fläche unebener macht.

§. 227.

Nimmt man demnach Bb an, so hat man in dem △ BEb, die Winkel bBE, BbE = BCA, und

und die zwischen liegende Seite. Hieraus findet man den Winkel BEb, und folgends auch bE. Mittelst bE und dem Winkel BbE hat man die Perpendicular, welche aus E auf die Linie bB gezogen wird, und welche = AD ist, deßgleichen den Abstand dieser Perpendicular von b, welcher = DE + bA ist. Da man nun bA = $\frac{1}{2}$ bB weiß, so findet man die gesuchte Höhe DE in eben dem Maaße, in welchem Bb angenommen worden. Daher ist die Verhältniß zwischen allen Linien der Figur gegeben, und wird eine derselben wirklich ausgemessen, so lassen sich alle übrige bestimmen. Ein stehend Wasser, so zwischen Bergen oder andern erhabenen Objecten liegt, dienet auf diese Art zu Ausmessung ihrer Höhen, und man darf hiezu nur ihr Bild im Wasser von einer einigen Höhe herunter sehen.

§. 228.

Aus dieser Aufgabe sehen wir, daß die Reflexion des Lichtes die Ausmessung der Winkel an einem zweyten Stande erspart, und diesen zweyten Stand doppelt weiter entfernt. Die Bequemlichkeit, die man hievon hat, wäre groß genug, daß man sie auch bey Ausmessung horizontaler Winkel wünschen sollte. Es sind mir hierüber folgende Mittel eingefallen, welche ich kurz angeben werde, um die Möglichkeit davon zu zeigen, weil ich nicht glaube, daß

daß man sie anderst als zur Belustigung gebrauchen werde.

§. 229.

So lange der Spiegel in C horizontal liegt, darf man nicht besorgt seyn, aus jedem Stande B eine Perpendicularlinie auf die Fläche AC zu ziehen, weil diese zugleich vertical ist, und daher genau gezogen werden kann. Setzt man aber die Figur stelle ein ebenliegendes Feld vor, so muß der Spiegel in C aufrecht stehen, und da wird es schwerer die Perpendicular BA aus dem Stande B auf die verlängerte Fläche des Spiegels in C zu ziehen. Das leichteste Mittel hiezu giebt der Spiegel selbsten. Wenn ihr in B seyd, so lasset den Spiegel umdrehen, bis ihr euch selbst darinn sehet, und die Linie BC wird auf der Fläche desselben perpendicular seyn. Diese Lage des Spiegels sey Cc, die Lage desselben, wenn ihr nach eben der Linie BC das Object A sehet, sey wie vorhin Cd, so ist leicht zu beweisen, daß der Winkel cCd, um den sich der Spiegel gewendet dem Winkel CBA, welchen ihr hättet messen sollen, gleich ist. Denn ihr habt

$$BCA + BCc + cCd = 180°$$
$$BCc = 90°$$

folglich

$$BCA + cCd = 90°$$

nun ist

$$BCA + ABC = 90°$$

folglich

$$ABC = cCd.$$

§. 230.

Um also den Winkel cCd, statt des Winkels ABC auszumessen, ist klar, daß man auf einem Meßtischgen einen großen Circul beschreiben, denselben in seine Grade eintheilen, in dessen Mittelpunct eine Axe perpendicular aufrichten, und den Spiegel an dieser Axe so anmachen müsse, daß man ihn daran herumdrehen kann. An dem Spiegel selbsten wird ein Zeiger angemacht, welcher im herumdrehen an dem Circul die Grade anzeige.

§. 231.

Der Anfang im Zählen wird immer in c gemacht, weil die Winkel cCd müssen gemessen werden, indem ihr die Winkel EBC messet, denn es ist klar, daß ihr in B bleiben, und den Spiegel C könnet umdrehen lassen, bis ihr alle Objecte, welche ihr in den Riß bringen wollet, in demselben sehet.

§. 232.

Die Linie BC bleibt hiebey von beständiger Größe, allein die Standlinie, welche Bb ist, ist veränderlich. Doch kann man auch BC als die Standlinie ansehen, dieselbe aufs Papir bringen, um C einen Circul ziehen, und auf diesem alle Lagen des Spiegels zeichnen.

nen. Die Reflexionswinkel werden den Einfallswinkeln, die sich hiedurch auf dem Papire bestimmen, und die Winkel EBC der observirten gleich gemacht, so werden sich alle Durchschnitte ergeben. Man sieht auch, daß diese Durchschnitte in eben denen Fällen ungewisser werden, in welchen sie bey zween wirklichen Ständen sind, wenn nemlich der Stand B, der Spiegel und das Object bey nahe in gerader Linie liegen.

§. 233.

Das andere Mittel kann die Mühe des Umdrehens ersparen, in der That aber wie das erste für nichts anders als eine bloße Curiosität gelten Es sey Cc ein aufrechtstehender cylindrischer
Fig. 40. oder ein gröster horizontaler Circul eines sphärischen erhabenen Spiegels, der in seine Grade eingetheilt sey. Der Stand sey in B, und das Object in E. Wenn ihr euch nun selbsten auf dem Punct C, das Object E aber auf c sehet, welches bey grössern Entfernungen mit einem Fernrohr geschehen muß, so zählet die Grade auf Cc, und messet den Winkel EBC, und die Lage der Puncte B, C, E kann dadurch bestimmt werden. Es ist für sich klar, daß der Spiegel Cc eine ansehnliche Größe haben müsse. Uebrigens wenn das Object E nicht sehr kenntlich ist, so wird es sich schwer auf dem Spiegel in der Entfernung BC finden lassen. Die übrigen Schwürigkeiten übergehen wir bey diesen beyden Mitteln, weil sie niemals im Ernste

Ernste werden gebraucht werden. In der Geometrie thut man vieles aus bloßer Lust, und dazu mag das gesagte genug seyn. Es würde sich übrigens dennoch der Mühe lohnen, brauchbare Mittel zu suchen, oder auch diese brauchbarer zu machen, damit man die zween gleiche Winkel, welche die Reflexion des Lichtes so genau giebt, in der practischen Geometrie vortheilhafter und allgemeiner nutzen könne.

VIII. Die Brechung des Lichtes.

§. 234.

Die Brechung des Lichtes in durchsichtigen Mitteln hat eben so wie die Zurückwerfung desselben ihre genaue Gesetze, ich habe aber nicht finden können, daß sie zur Zeit noch in der ausübenden Meßkunst von großem Nutzen wäre, in so ferne man schlechterdings durch dieselbe den Abstand der Cörper bestimmen solle. Sonsten dienen allerdings die Fernröhren zu genauer Ausmessung der Winkel, es sey, daß man sie an Quadranten und andern Instrumenten gebraucht, oder sich mit dem Micrometer begnügt, und eben so muß die Brechung des Lichtes in der Luft gebraucht werden, um die Höhe sehr entfernter Objecte, und wenn man die gröste Schärfe sucht, auch ihre horizontale Lage genau zu bestimmen. §. 235.

§. 235.

Man hat zwar schon längsten die Camera obscura und die Fernröhre gebrauchen wollen, um den Abstand näherer Objecte zu bestimmen, weil man wußte, daß das Bild, so vom Objectivglase gemacht wird, weiter von demselben hinweg ist, je näher das Object liegt. Was dieser Einfall vorzügliches an sich hat ist die Umkehrung einer der ersten Aufgaben aus der *Dioptric*. Ungeacht aber diese Umkehrung hier von keinem großen Gebrauche ist, so hat sie, wie fast alle umgekehrte Aufgaben etwas schönes und unerwartetes, und ich erinnere dieses hier nur deßwegen, weil in der gesammten Mathematic noch ungemein viele Aufgaben zurück bleiben, die mit großem Vortheile umgekehrt werden könnten. Diese Umkehrung, welche in der Verwechslung der gegebenen und gesuchten Stücke besteht, kann bey allen algebraischen Gleichungen, und überhaupt bey allen denen Stücken statt haben, welche eine bestimmte Verhältniß unter einander haben, und überhaupt ist sie eine der reichsten Quellen zu neuen und unerwarteten Einfällen und Entdeckungen, wie ich es an einem andern Orte ausführlich zeigen werde.

§. 236.

Die gegenwärtige umgekehrte Aufgabe ist vielmehr sinnreich als brauchbar. Ich werde dabey

dabey einen einigen Satz beweisen, welcher ihre Aehnlichkeit mit einer bekannten geometrischen Aufgabe zeiget. Es sey die Focaldistanz der Linse $= f$, die Distanz des Objectes $= d$, die Distanz des Bildes $= b$, so ist nach dioptrischen Gründen

$$b = fd : (d - f)$$

und

$$d = bf : (b - f)$$

§. 237.

Ziehet AC auf AF senkrecht, und machet AE = AB = f. Erfüllet das Quadrat ABDE, und machet AF = b, ziehet aus F durch D eine Linie in C, so habt ihr Fig. 41.

$$FE : ED = FA : BC$$

$$(b - f) : f = b : d$$

folglich ist

$$BC = d.$$

§ 238.

Wenn man demnach in der Camera obscura das Bild da auffängt, wo man es am deutlichsten sieht, und man mißt dessen Abstand von der Linse, und nimmt an, daß man diesen Abstand vollkommen genau finden könne, so wird man daraus, und aus der Focaldistanz der Linse den Abstand des Objectes nicht genauer finden, als wenn man die Entfernung AC aus der Höhe AF, welche dem Abstande des Bildes gleich ist, und dem Winkel AFC

 oder

oder BDC suchen wollte. Denn ED ist der Focaldistanz und FE dem Unterschied zwischen derselben und dem Abstande des Bildes AF gleich. Da nun AE mehrentheils nur von etlichen Schuhen ist, so ist leicht zu erachten, wie wenig eine so kleine Standlinie zu Bestimmung der entferntern Objecte C dienen könne. Da noch überdiß hier angenommen wird, daß man den Abstand des Bildes aus bloßer Betrachtung seiner größten Deutlichkeit genau finden könne, und dazu fehlt noch sehr viel. Uebrigens kann der hier erwiesene Lehrsatz von der Aehnlichkeit beyder Ausmessungen als eine leicht in die Augen fallende Construction der dioptrischen Formeln

$$b = fd : (d - f)$$
$$d = fb : (b - f)$$

angesehen werden.

§. 239.

Die Camera obscura zeigt uns den perspectischen Aufriß der Objecte, die sich in derselben abmahlen, und in so ferne mag sie uns bessere Dienste thun, wenn man diesen Aufriß genau nachzeichnet. Es kömmt hiebey auf die umgekehrten Aufgaben der Perspective an, die ich oben schon angeführt habe (§. 160.) weil man aus dem perspectivischen Aufrisse den Grundriß heraus bringen soll. Diese Aufgabe habe ich in angezogenem

zogenem Tractate abgehandelt, und die Auflösungen in den vornehmsten möglichen Fällen gegeben, zu welchen man noch leicht andere finden kann, wenn man aus dem Perspectivischen Aufrisse andere und andere Data combinirt. Ich werde mich also damit nicht aufhalten, sondern nur dieses erinnern, daß man hier den Augenpunct, den Abstand des Auges, die Horizontallinie und den Winkelmesser wie von selbsten hat, und folglich diese Stücke nicht erst aus dem müssen gesucht werden, was man in dem Perspectivischen Aufrisse als gegeben annehmen kann. Wir setzen nemlich die Axe der Linse sey horizontal, und stehe auf der Tafel perpendicular welche das Bild auffängt. So wird der Punct, wo sie aufsteht, der Augenpunct, und die horizontale Linie, die dadurch gezogen wird, der Horizont des Gemähldes, und endlich der Abstand der Linse von der Tafel der Abstand des Auges seyn. Und hiedurch werden die Mittel, den Grundriß heraus zu bringen, leichter.

§. 240.

Noch einen Dienst kann uns die Camera obscura thun, welcher wegen seiner Bequemlichkeit vorzüglich ist. Man lasse sich eine machen, die man zusammen legen, und bey sich führen kann. Die Tafel sey auf der Axe der Linse senkrecht, und durch den Punct wo sie hinfällt, ziehe man eine gerade Linie. Der Abstand der Linse wird als ein Halbmesser angesehen, und auf die gezogene Linie der Tafel trage man die Tangenten der Winkel auf. Den Abstand der Objecte setzen wir hier als unendlich entfernt. Für die, so beträchtlich nahe sind, muß man eine Correction vornehmen. Wenn ihr nun einen Winkel oder mehrere messen wollet, so kehret die Camera obscura dergestalt gegen die beyden Objecte, welche den Winkel machen, daß sie beyde auf die eingetheilte Linie zu liegen kommen. Zählet wie viel Grade zwischen beyden liegen, so werdet ihr den gesuchten Winkel haben. Es ist klar, daß der Winkel nicht leicht über 40 Grad seyn darf. Und ist er grösser, so muß er vorher in zween andere zerfällt werden, welches vermittelst eines zwischenliegenden Objectes geschieht. Die Winkel sind die, so die Objecte mitten in der Linse machen. Sie werden desto genauer, je grösser die Focaldistanz der Linse ist, weil diese hier als ein Halbmesser des Circuls angesehen wird. Muß die Linse wegen der Nähe der Objecte weiter ausgezogen werden, so wird der Halbmesser grösser, und hieraus ergiebt sich die Correction der Winkel, von welcher wir eben gesagt haben. Man hätte auch die Linie auf der Tafel in gleiche Theile theilen können, von welchen die Focaldistanz der Linse 1000 hat, und diese Theile wären bey entfernten

ten Objecten Tangenten der Winkel gewesen. Für nähere Objecte hätte man sie durch den vergrösserten Abstand der Linse dividiren müssen, um sie zu Tangenten zu machen. Da aber diese Fälle seltener sind, so ist das Auftragen der wirklichen Winkel, davon jeder an die Stelle seiner Tangente gesetzt wird, viel bequemer, weil die Fälle häufiger sind, und keine Reduction oder Nachschlagen in den Tabellen gebrauchen. Es ist für sich klar, daß man auch beydes thun kann.

§. 241.

Die Betrachtung der Stralenbrechung in der Luft, übergehe ich hier ganz, weil ich sie an einem andern Orte bereits umständlich abgehandelt habe. (§. 173.) Und aus gleichem Grunde findet der Gebrauch des Barometers bey Ausmessung der Höhen der Oerter hier auch nicht statt.

VIIII. Die Bewegung.

§. 242.

Wenn es an dem ist, daß unsere Begriffe vom Abstande der Objecte nicht vom Auge, sondern vom Gefühl und von der Bewegung ihren Ursprung haben (§. 20. seqq.), so sollte man vermuthen, daß die Bewegung uns bey der Ausmessung der Entfernung und Lage der Gegenstände noch mehrere Dienste thun könne.

ne. Allein sie sind zur Zeit noch sehr eingeschränkt, wenn wir sie bey irrdischen Objecten gebrauchen wollen, und man kann sagen, daß man dabey am Himmel glücklicher gewesen, als auf der Erde. In der That hat die ganze Astronomie bey dem angefangen, was wir am Himmel sehen, und daher bloß bey der scheinbaren Bewegung der Sterne, und dadurch hat man es endlich dahin gebracht, daß man ihre wahre Bewegung und daraus ihre Lage für jede Zeit zum voraus bestimmen kann, und diese Bestimmung nunmehr nach und nach auf die Cometen, und in spätern Weltaltern auch auf die sogenannten Fixsterne erstrecken wird, weil kein Zweifel ist, daß diese nicht auch ihren Ort unter einander ändern sollten.

§. 243.

Wenn wir hierinn bey irrdischen Gegenständen nicht so glücklich sind, so fehlt es nicht an den allgemeinen Gesetzen der Bewegung, die in der Mechanik zureichend entwickelt sind, sondern an genugsamen Anlässen und an der Anwendung derselben auf besondere Fälle. Wir können dieses durch leichte Betrachtungen erweisen. Denn erstlich, wenn wir die Bewegung geradlinicht, und ihre Geschwindigkeit einförmig setzen, so ist nichts leichter als aus der Zeit und der Geschwindigkeit auf den durchlaufenen Raum zu schließen, weil die

die Zeit mit der Geschwindigkeit multiplicirt den Raum giebt. Und weiß man von der Geschwindigkeit nur dieses, daß sie gleichförmig sey, so kann man dennoch den Raum mit der Zeit proportioniren, und die Verhältniß zwischen jeden Theilen des Raumes finden.

§. 244.

Allein wenn wir die Anlässe aufsuchen, wo dieser einfache Fall vorkommt, so werden wir sehr wenige finden, die zur Ausmessung einer Länge oder eines Abstandes dienen könnten. Der einige Fall, wo die Geschwindigkeit wirklich sehr gleichförmig ist, ist die Bewegung des Schalles in der Luft. Da derselbe in Zeit von einer Secunde ungefehr 1140 Pariserschuhe durchläuft, so wird er bey 20 Secunden gebrauchen, um eine deutsche Meile zu durchlaufen. Man kann ihn also da gegebrauchen, wo es auf 1000 Schuhe mehr oder minder nicht ankömmt, und wo man den Anfang weiß, wenn er entsteht, damit man mittelst eines Penduls das Secunden schlägt, die verflossene Zeit bemerken könne. Folglich

1.° Bey dem Echo, wenn man selbst einen Schall erregt, und die Zeit mißt, in welcher das Echo antwortet. Die Zeit in Secunden und auf 20 Secunden eine Meile gerechnet, giebt den doppelten Abstand des Ortes, welches den Schall zurück schlägt. In diesem Falle wird der

Fehler, welcher von der Abzählung der Secunden herrührt, um die Helfte geringer, hingegen bleibt der, so von der Veränderlichkeit in der Geschwindigkeit des Schalles entsteht.

2.° Bey Ungewittern. Da der Blitz und der Knall des Donners zu gleicher Zeit entstehen, das Licht aber sich hier so gut als unendlich geschwinde bewegt, so zählt man die Secunden, die inzwischen verfliessen, bis man den Schall hört, und man findet dadurch den Abstand des Ungewitters, wenn man wie vorhin 20 Secunden auf eine Meile rechnet.

3.° Bey Lösung des Geschützes. Da hat es eben die Bewandniß, weil man das Feuer in gleichem Augenblick sieht, wenn das Stück gelößt wird, so zählt man wieder die Secunden, die verfließen, bis man den Knall hört, und findet dadurch den Abstand. Dieses Mittels können sich die Schiffe bedienen, um ihren Abstand von einander zu finden, da sie ohnedem einander Zeichen geben.

§. 245.

Die Bewegung der Erde, da sie sich in 24 Stunden um ihre Axe drehet, giebt die meisten Mittel an, deren man sich bedient, um den Unterschied der geographischen Länge der Städte, und überhaupt jeder Puncte von der

der Erdfläche zu finden, weil sie den Unterschied der Zeit verursacht, wenn an Orten, die verschiedene Länge haben, Mittag ist. An jedem Orte wird die Uhr nach dem Mittage desselben gerichtet, und wenn zween Observatoren ein Phänomenon in einem Augenblicke, und diesen Augenblick auf ihrer Uhr bemerken, so giebt der Unterschied der Uhren den Unterschied der geographischen Länge. Solche Phänomena hat man bißher nur am Himmel gesucht, und erst seit kurzen haben die französischen Akademiker angefangen, das Licht von entzündetem Pulver hiezu zu gebrauchen, weil man es des Nachts in sehr grossen Entfernungen sehen kann, wenn es auf einem hohen Berge angezündet wird.

§. 246.

Vielleicht liessen sich zumal in ebenen Ländern die Ungewitter dazu gebrauchen. Da hiebey ein einiger beträchtlicher Zweifel vorkömmt, so werde ich denselben in sein Licht setzen, und sodann auch die Bequemlichkeit dieser Methode und die Umstände anführen, bey welchen man sie gebrauchen könnte. Allenfalls ist es leicht Proben davon zu machen, und die Vortheile, so die Geographie davon hätte, sind groß genug, dazu aufzumuntern.

§. 247.

Einmal lassen sich fast alle Sommerblitze am äusersten Horizont sehen, wo man keinen Knall

Knall mehr hört, und es ist vermuthlich, daß man in diesen Fällen nur das reflectirte Licht des Blitzes sieht. Laßt uns setzen die Höhe des Orts, wo der Blitz entsteht, sey eine halbe Stunde oder 5000 Schuhe. Es ist klar, daß er höher und niedriger seyn kann. Sieht man denselben nun in der Horizontallinie, so läßt sich hiedurch der Abstand desselben nach einer Regel finden, die ich in den *Routes de la lumière par les airs* gegeben habe. Die Quadratwurzel von 5000 ist bey nahe 70. Sieht man diese Zahl als Minuten eines Grades an, so drückt sie die scheinbare Vertiefung des Meerhorizontes aus, wenn er in einer Höhe von 5000 Schuhen gesehen wird. (§. 120. L. cit.) daher ist sie hier =70′. Sie verhält sich aber zum Abstande des Horizontes wie 6 zu 7 (§. 119. loc. cit.) folglich ist dieser Abstand bey nahe 82 Minuten, oder bey $20\frac{1}{2}$ Meilen. Und so weit würde man in einem ebenen Lande den Blitz zu Nacht noch sehen, wenn er in einer Höhe von 5000 Schuhen erzeugt wird. Ist sein Erzeugungsort höher oder niedriger, so wird diese Weite in Verhältniß der Quadratwurzel seiner Höhe grösser oder kleiner. Es ist nicht zu vermuthen, daß man das reflectirte Licht noch um vielmal weiter sehe.

§. 248.

Hieraus folgt, daß zwey Observatoria, welche einen gleichen Blitz in der Höhe von 5000

5000 Schuhen noch sehen, bey 40 Meilen von einander entfernt seyn können. Liegt demnach das eine gegen Osten das andere gegen Westen, so beträgt der Unterschied der Zeit, wenn beyde unter dem Aequator liegen 5′ 20,″ in Europa unter der Polhöhe von 48° 12′, wo ein Grad des Parallelcirculs nur $\frac{2}{3}$ von einem Grade des Aequators hat, wird dieser Unterschied um die Helfte grösser, und wächst folglich auf 8 Minuten. Da man aber auf beyden Observatoriis den Blitz in gleichem Augenblicke sieht, so ist klar, daß sich dieser Unterschied mittelst wohlgerichteter Penduluhren sehr genau bestimmen liesse. Eben dieses gienge noch an, wenn auch die beyden Observatoria einander viel näher wären. Wir haben hier unter den grösten Entfernungen die Mittlere bestimmt. Es ist aber immer besser, wenn sie einander Ost- und westwerts liegen.

§. 249.

Es hat hingegen hiebey nichts zu sagen, wo das Ungewitter entsteht, oder ob es sich von einem Orte an den andern zieht. Denn da wir den entstandenen Blitz nur als ein Zeichen ansehen, das an beyden Orten in einem Augenblicke observirt wird, so dienet uns dieser Augenblick allein, um auf den Uhren die Zeit zu bemerken, und den Unterschied davon zu bestimmen. Da es ferner in einer Nacht

Nacht unzähligemal blitzen kann, so lassen sich eben so viele Observationen machen, und unter einander vergleichen.

§. 250.

Diese Vergleichung bestimmt ferner die Zeiten, welche mit einander verglichen werden, weil die Blitze sehr ungleich, und bald geschwinder bald langsamer auf einander folgen. Wenn daher jeder Observator die Minuten und Secunden aufzeichnet, die er bey jedem Blitze an seiner Uhr bemerkt, und man hält die beyden Columnen gegen einander, so müssen die Zeiten mit einander verglichen werden, die einen gleichen Unterschied geben, und es ist fast unmöglich, daß diese Vergleichung auf mehr als einerley Art geschehen könnte, weil es zum voraus setzte, daß von jedem Blitze zum folgenden genau eben so viele Secunden verfließen sollten, und dieses wird sich wohl niemals zutragen.

§. 251.

Um hievon ein leichtes Beyspiel zu geben, so setzet, der eine Observator habe auf seiner Uhr folgende Minuten gefunden, 8, 10, 13, 17, 20, 21, 22, 25, 29. Und der andere in gleicher Stunde folgende 13, 14, 16, 18, 21, 25, 28, 29, 31. Wir geben diese Zahlen Kürze halber nur in Minuten. Nehmet die Unterschiede zwischen jeden zwey auf einander

ander folgenden Zahlen, so habt ihr von der ersten Reyhe 2, 3, 4, 3, 1, 2, 3, 4. von der andern Reyhe 1, 2, 2, 3, 4, 3, 1, 2. Diese beyden Reyhen von Unterschieden müßten einander gleich seyn, wenn beyde Observatoren bey gleichem Blitze angefangen hätten. Da dieses aber nicht ist, so muß man sie so verschieben, daß die ähnliche Zahlen über einander zu stehn kommen, und es ist klar, daß es nur auf folgende Art angeht:

		2	3	4	3	1	2	3	4
1	2	2	3	4	3	1	2		

Woraus man sieht, daß der andere Observator um zween Blitze zu früh angefangen, und folglich die observirten Minuten selbst so stehen müssen:

		8	10	13	17	20	21	22	25	29
13	14	16	18	21	25	28	29	31		

Zieht man nun die obern von den untern ab, so giebt der Unterschied bey allen 8 Minuten, und so groß muß nothwendig der Unterschied der Zeit seyn.

§. 252.

Wenn man diesen Unterschied ohne dem schon beyläuftig, z. E. aus den Landcharten weiß, so ist offenbar, daß diese Vergleichung dadurch noch merklich abgekürzt wird.

§. 253.

§. 253.

Da es sich zutragen kann, daß zwey und mehrere Ungewitter zugleich am Himmel sind, so giebt es dabey folgende Fälle:

1° Wenn die Observatoria sehr entlegen sind, so kann es geschehen, daß der eine Observator das eine, der andere aber das andere observirt. In diesem Fall ist es physikalisch unmöglich, daß die erst beschriebene Vergleichung angehen sollte, weil man setzen müßte, daß die Blitze am ersten Orte denjenigen, so am andern beobachtet werden, sämtlich und der Ordnung nach um gleich viel Minuten und Secunden vorgehen oder folgen. Man kann zweifeln, ob dieses in der Natur möglich sey. Ueberdiß müssen die Ungewitter dem westlichen Observator ostwerts, und dem östlichen westwerts, oder in gleicher Linie mit ihnen liegen. Denn weichen sie auf verschiedenen Seiten ab, so läßt sich der Unterschied bald erkennen.

2°. Wenn beyde Observatoren beyde Ungewitter sehen. Liegen dieselben in verschiedenen Gegenden, so lassen sie sich unterscheiden, und folglich kommt es auf den vorigen Fall an. Liegen sie aber zwischen den Observatoren, und in gleicher Linie mit ihnen, so wird das eine höher über den Horizont gehen, als das andere, und das höhere ist dem Observator näher, welches ebenfalls statt hat, wenn er von dem einen den Donner hört, vom andern aber nicht, oder viel schwächer und später. Denn man kann auch dieses Mittel zu Hülfe nehmen. Das schwerste ist, wenn man keinen Unterschied finden sollte, welches aber nicht glaublich, oder wenigstens seltener ist. Doch auch in diesem Fall hat es nichts zu sagen, und die Zeit kann unter einander observirt werden. Denn da es, wie wir schon erinnert haben, auf den Ort des Ungewitters nicht ankömmt, so wird jeder Blitz, den beyde Observatoren sehen, ihnen den Augenblick bestimmen, wenn sie auf ihrer Uhr die Zeit bemerken sollen, und die Vergleichung wird wie vorhin angestellt.

3°. Sieht der eine Observator beyde, der andere aber nur ein Ungewitter, die sich nicht sollten unterscheiden lassen, so wird jener ungleich mehr Observationen haben, als dieser, wenn beyde keinen Blitz unbemerkt vorbey lassen. In diesem Fall geht die Vergleichung nicht wohl anders an, als wenn man den Unterschied der Länge beyder Oerter ohnedem schon beyläufig weiß. Denn dadurch lassen sich aus des erstern Observationen sehr viele wegschaffen, und man behält nur die wahren und zweifelhaften. Hiedurch wird die Vergleichung

gleichung erleichtert, ungeacht sie noch allezeit mühsam bleibt.

§. 254.

Man sieht hieraus, daß man bey solchen Observationen jede Umstände mitnehmen müsse, und wo es am schlimmsten geht, da ist das einige Uebel dabey, daß man vergebens observirt hat, und die Observation zu einer andern Zeit wiederholen muß, die dazu bequemer ist. Da ich die Gelegenheit nicht habe, hievon wirkliche Proben zu machen, so kann ich auch die Vorsichtigkeiten, so die Erfahrung noch lehren würde, nicht vorsehen, und lasse es also bey dem Angeben bewenden, wobey ich eben noch keine Unmöglichkeit einsehe. So viel ist gewiß, daß wenn man die Probe machte, und dadurch diese Methode wenigstens zur Verbesserung der Landcharten zureichend richtig fände, dieselbe um desto allgemeiner werden könnte, da nicht leicht eine Stadt ist, wo nicht jemand wäre, der die Observation anstellen, und sie mit denen aus den nahe gelegenen Städten vergleichen könnte. Die Probe würde auch zugleich zeigen, ob der Bliß in der That in einem Augenblicke sich über den Himmel ausbreitet, oder ob eine oder mehr Secunden dabey verfließen.

§. 255.

Da man bey Bestimmung der geographischen Länge der Oerter, die Erscheinungen am

am Himmel, das Licht des entzündeten Pulvers (§. 246.) und nach dieser letzten Methode das Licht des Blitzes nur deßwegen gebraucht, damit man an beyden Oertern in einem gleichen Augenblicke die Zeit auf der Uhr, und dadurch ihren Unterschied finden könne, so läßt sich ein Mittel gedenken, welches besonders in den Nordländern eben diese Dienste thun kann, und noch allgemeiner zu gebrauchen wäre. Die Frage kömmt darauf an, ob bey dem Nordlichte sich solche plötzliche Veränderungen, wo nicht allemal, doch zuweilen äussern, die man an sehr entlegenen Orten als eben dieselben erkennen kann? Wenn dieses ist, so leistet dasselbe zur Bestimmung der Länge viel allgemeinere Dienste. Denn da dieses Licht nach Hrn. von Mairan Berechnung gemeiniglich 120 Meilen hoch ist, so ist unstreitig, daß man dasselbe weit herum sehen könne. Und hat es kennbare Phänomena, besonders solche, die in einem Augenblick entstehen, so läßt sich, wie vorhin, der Unterschied der Zeit, und daraus der Unterschied der Länge der Oerter bestimmen. Folgen mehrere solche Erscheinungen auf einander, so kommen bey der Vergleichung, wenn sie auch nicht anders zu unterscheiden wären, eben die Fälle vor, die wir vorhin bey den Ungewittern aus einander gesetzt haben.

§. 256.

Die übrigen Bewegungen, die wir auf der Erde sehen, sind so ordentlich nicht, daß wir Zeit, Raum und Geschwindigkeit mit einander auf eine leichte und sichere Art vergleichen, und daraus die grössern den Abstand und die Lage des durchlaufenen Raumes bestimmen könnten. Zu einer beyläuftigen Ausmessung des Weges, den wir selbsten durchwandeln, gebrauchen wir die Abzählung der Schritte, und man hat Instrumente oder Schrittzähler ausgedacht, wodurch wir der Mühe des Zählens überhoben werden; Und eben so ist man auf Räder, Schubkärren ꝛc. gefallen, um den durchlaufenen Weg durch den Umlauf der Räder zu messen. Sie reichen aber zur genauen Bestimmung nicht zu, und sind zu weitläuftig, wenn man die auszumessende Länge nur ungefehr wissen will.

§. 257.

Zur Belustigung giebt es Anlässe folgendes Mittel zu gebrauchen. Man befinde
Fig. 42. sich in A, wo man auf dem Felde eine Straße BCD und auf derselben einen Menschen gehen oder fahren sieht. Am bequemsten ist es, wenn man ihn zu seinem Fenster hinaus sehen kann. Indem er von B nach D geht, zähle man seine Schritte, und wenn er von B in C, und von C in D eine gewisse Anzahl gemacht,

macht, so messe man die beyden Winkel BAC, BAD, welches am füglichsten geschieht, wenn in B, C, D oder auf den Linien BA, CA, DA kennbare Objecte sind, weil man dadurch im Zählen nicht gehindert wird. Da man nun die Linien BC, CD in Schritten weiß, so wird die Lage des Puncts A, und die Länge der Linien BA, CA, DA durch die Aufgabe des §. 109. construirt und gefunden. Man setzt hiebey der Weg von B bis in D gehe gerade fort. Die Winkel in A müssen eine ziemliche Größe haben. Beym Fahren zählt man den Umlauf der Räder, und es ist klar, daß man bey grössern Entfernungen Ferngläser zu Hülfe nehmen, oder den Weg durch die Zeit bestimmen müsse.

§. 258.

Ist BD der Weg eines Schiffes, und man befindet sich in A am Ufer, so müsten die Theile BC, CD der Zeit proportional gemacht werden. Da man aber die Geschwindigkeit des Schiffes nicht weiß, so wird man hiedurch die Figur zeichnen können, aber noch keinen Maaßstab dazu haben.

§. 259.

Wenn aber auf dem Meere zwey Schiffe, Fig. 43.
das eine nach der Richtung AD, das andere nach einer andern Richtung ad fährt, und auf A mißt man die Winkel aAD, bBD, bCD, dDA,

dDA, welche das andere Schiff in 4 Zeiten mit der Richtungslinie AD macht, und die Zeit wenn man in A, B, C, D ist, wird bey jeder Observation bestimmt, so läßt sich aus der Zeit und der Geschwindigkeit des Schiffes die Linie AD eintheilen, und aus den observirten Winkeln können die Linien Aa, Bb, Cc, Dd gezogen werden. Da man nun hier annimmt, daß die Theile ac, bc, cd eben die Verhältnis wie AB, BC, CD haben, so läßt sich ad construiren, und daher wird auf dem Schiffe A der Weg und der Abstand des andern Schiffes a bestimmt.

§. 260.

Es kömmt diese Aufgabe bey Bestimmung des Laufes und des Abstandes der Cometen vor, wenn man die durchlaufenen Bögen so klein nimmt, daß man sie als gerade Linien ansehen kann. Man muß nemlich vier Linien von gegebener Lage so durchschneiden, daß die abgeschnittene Theile der Linie, die man durch selbige zieht, eine gegebene Verhältniß haben. Die Auflösung und Construction dieser Aufgabe hat Newton gegeben.

IX. Viereckichte Figuren.

§. 261.

Wir haben bereits angemerkt, daß es ein Vortheil ist, wenn man in Ausmessung und Grundlegung der Felder an dem einen Stande nicht nöthig hat, sich um den andern umzusehen, und zugleich gezeigt, was die Mittagslinie, entfernte Gegenstände, erhabene Objecte, und die Reflexion des Lichtes dabey thun können. Die Aufgabe des §. 109. die wir schon hin und wieder gebraucht haben, gehöret auch dahin, weil man vermittelst derselben, die Lage eines jeden Standes in Absicht auf einen gegebenen Triangel findet, dessen drey Ecken man in dem angenommenen Stande sehen kann. Wenn man die Aufgabe des § 201. noch dazu nimmt, so sind es die einigen, oder wenigstens die zwo brauchbarsten, die in Absicht auf einen △ vorkommen können. Und die, so man aus den Stücken, so in beyden als gegeben, angenommen werden, combinirt, kommen nicht leicht vor, als wo man die eine oder die andere von den beyden angezogenen Aufgaben selbsten anwenden kann.

§. 262.

Hingegen giebt es weit mehrere Fälle, wenn man viereckichte Figuren, oder überhaupt vier Objecte, und ihre verschiedene Verhältnisse zu einem und mehrern Ständen, in der Absicht betrachtet, daß jeder Stand für sich allein bestehe, und man bey keinem an den andern gebunden sey, immer vorausgesetzt, daß man eben die vier Objecte an jedem Stande sehen könne.

§. 263.

Es ist leicht zu erachten, daß man desto mehr Stände annehmen müsse, je weniger von der Lage dieser vier Objecte bekannt ist. Denn ist diese Lage völlig bekannt, so gebraucht man eines dieser Objecte nicht, und die Lage eines jeden angenommenen Standes kann vermittelst der drey übrigen gefunden werden. (§. 109.)

§. 264.

Sodann ist klar, daß wir hier die Sache umkehren, und da man sonsten die Stände nur gebraucht, um eine Figur in Grund zu legen, so sehen wir sie hier so gut als die Objecte selbsten, und ihre Bestimmung als eine Hauptabsicht an. Bey Grundlegung weitläuftiger Felder und ganzer Länder ist sie es in der That, weil man dabey immer andere Stände gebraucht, und die Sache es öfters nicht zuläßt, diese an solchen Oertern zu nehmen, die man bey den vorigen hätte sehen, oder wie zum voraus wählen können. Ueberdiß kann auch der Stand ein solcher Ort seyn, welcher in den Riß muß eingetragen werden. In der Ausübung muß man auf alle Fälle ausgerüstet seyn.

§. 265.

Es sey nun ABCD ein Rectangel, und
Fig. 44. man messe in einem beliebigen Stande E die Winkel

Winkel AEB, BEC, CED welchen seine vier Ecken daselbst machen, so läßt sich die Verhältnis und Lage aller Linien gegen einander bestimmen. Ziehet aus E die Perpendicular EFG, so habt ihr

$$FH : BG = FI : CG$$

folglich

$$FH : AF = FI : FD.$$

Und wenn ihr EF als einen Halbmesser ansehet, so ist

$$\tang HEF : \tang AEF = \tang FEI : \tang FED$$

Nennet daher

$$FEH = x \quad AEH = a$$
$$HEI = c$$
$$IED = b$$

so ist

$$\tang(a+x) : \tang x = \tang(b+c-x) : \tang(c-x)$$

folglich durch eine leichte Verwandlung

$$\sin(a+2x) : \sin a = \sin(b+2c-2x) : \sin b$$

oder

$$\sin(a+2x) : \sin(b+2c-2x) = \sin a : \sin b$$

daher durch eine andere Verwandlung

$$\tang\frac{a+b+2c}{2} : \tang\frac{a-b-2c+4x}{2}$$
$$= \tang\frac{a+b}{2} : \tang\frac{a-b}{2}$$

 und

Stande gemessenen Winkel begnügen will. Die Aufgabe selbst ist demnach folgende.

§. 270.

Es seyen 4 Objecte, A, B, C, D, welche
Fig. 45. man sämtlich an den 4 Ständen E, F, G, H sieht, und an denselben die Winkel mißt den die 4 Objecte an jedem Stande machen. Die Frage ist nun, die Lage aller 8 Puncte A, B, C, D, E, F, G, H zu bestimmen. Man sieht leicht, daß diese Aufgabe mit derjenigen, so wir oben (§. 107. seqq.) angebracht, in Absicht auf den Gebrauch der Mittagslinie eine Aehnlichkeit hat, und in dieselbe verwandelt wird, so bald man setzt, daß eines der vier Objecte A, B, C, D unendlich entfernt sey. Sie kann auf eben die Art gebraucht werden, und hat den Vortheil, daß man an keinem der 4 Stände nöthig hat, sich um den andern umzusehen. Daher dient sie besonders bey Grundlegung ganzer Provinzen. Die Stände E, F, G, H können so gar zu Schiffe seyn, und man wird die am Gestade liegende Objecte und Vorgebürge in Grund legen können. Es ist fürnemlich nur um eine schickliche Auflösung zu thun. Ich habe deren verschiedene versucht, die mehrentheils auf eine Gleichung vom 8ten oder 16ten Grad führten. Diese werde ich eben nicht hersetzen, sondern diejenige, wodurch man auf eine Gleichung kömmt, die nur vom 2ten Grade

ist

ist, und woraus zugleich erhellen wird, wie die Gleichungen vom 16ten Grade dabey möglich sind, ohne daß sie einem unschicklichen Calcul zugeschrieben werden können.

§. 271.

Um nicht gleich Anfangs alle 4 Stände in die Rechnung zu ziehen, sondern die Gleichung zu finden, auf welche jeder besonders führt, so seyen die vier Objecte A, B, C, D, Fig. 46.
der eine Stand E. Man lege die Linie BC zum Grunde, und ziehe durch ABC, desgleichen auch durch BCD zween Circul, und sodann die Linien AC, BD, ac, ab, $\delta\beta$, $\delta\gamma$: so hat man nach einer sehr bekannten Eigenschaft des Circuls folgende Analogien:

$$Ea : ab = EB : BA$$
$$Ea : ac = EC : CA$$
$$E\delta : \delta\gamma = EC : CD$$
$$E\delta : \delta\beta = EB : BD.$$

Daher

$$Ea = \frac{ab \,.\, EB}{AB} = \frac{ac \,.\, EC}{AC}$$

$$E\delta = \frac{\delta\gamma \,.\, EC}{CD} = \frac{\delta\beta \,.\, EB}{BD}$$

Und aus diesen

$$\frac{EB}{EC} = \frac{ac \,.\, AB}{ab \,.\, AC} = \frac{\delta\gamma \,.\, BD}{\delta\beta \,.\, CD}$$

§. 272.

§. 272.

Man nenne nun die Winkel

$$AEB = f \quad ABF = \omega \quad DCG = \phi$$
$$BEC = g \quad ACB = \nu \quad DBC = \mu$$
$$CED = h$$

so ist

$$AB : AC = \sin\nu : \sin\omega$$
$$ac : ab = \sin(\omega - f - g) : \sin(\nu - f)$$
$$BD : CD = \sin\phi : \sin\mu$$
$$\delta\gamma : \delta\beta = \sin(\mu - h) : \sin(\phi - h - g)$$

Werden diese Werthe in der letzten Gleichung des vorhergehenden § gesetzt, so ist

$$\frac{\sin\nu \,.\, \sin(\omega - f - g)}{\sin(\;- f) \,.\, \sin\omega} = \frac{\sin\phi \,.\, \sin(\mu - h)}{\sin(\phi - h - g) \,.\, \sin\mu}$$

Diese Gleichung wird nun durch bekannte trigonometrische Verwandlungen leicht in folgende aufgelöst.

$$\frac{\cos(f+g) - \sin(f+g)\cot\omega}{\cos f - \sin f \,.\, \cot\nu}$$
$$= \frac{\cos h - \sin h \,.\, \cot\mu}{\cos(h+g) - \sin(h+g)\cot\phi}$$

§. 273.

Man nenne nun

$$BC = 1, \quad AF = P, \quad DG = R$$
$$FB = Q, \quad CG = S$$

so

so ist

$$\cot\omega = Q : P \qquad \cot\phi = S : R$$
$$\cot\nu = (Q+1) : P \qquad \cot\mu = (S+1) : R$$

Diese Werthe in der letzten Gleichung des §. 272. substituirt, geben

$$\frac{P.\cos(f+g) - Q.\sin(f+g)}{P\cos f - (Q+1)\sin f}$$
$$= \frac{R\cos h - (S+1)\sin h}{R\cos(h+g) - (S)\sin(h+g)}$$

§ 274.

Hieraus erhält man nun

$$\begin{aligned} 0 = &+ QS\sin(f+g)\sin(g+h) \\ &- QR\sin(f+g)\cos(g+h) \\ &- PS.\cos(f+g)\sin(g+h) \\ &+ PR\cos(f+g)\cos(g+h) \\ &- QS.\sin f.\sin h \quad + QR\sin f.\cos h. \\ &+ PS\cos f.\sin h \quad - PR\cos f.\cos h \\ &- Q\sin f.\sin h \quad - S\sin f.\sin h \\ &+ P\cos f\sin h \quad + R\sin f.\cos h \\ &- \sin f.\sin h \end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt sich nun in folgende zusammen ziehen

$$0 = (QS - PR)\sin g.\sin(f+g+h) - (PS+QR)\sin g.\cos(f+g+h)$$
$$+ R\sin f.\cos h + P\cos f.\sin h - (Q+S+1)\sin f.\sin h.$$

Da nun jeder Stand eine solche Gleichung gibt, so lassen sich aus 4 solchen Gleichungen die Werthe QS—PR, PS+QR, R, P,

$P, (Q+S+1)$ und daraus P, Q, R, S bestimmen.

§. 275.

Dieses läßt sich nun aber füglicher in einem Beyspiele zeigen. Es seyen demnach
Fig. 47. die 4 Objecte A, B, C, D, die 4 Stände E, F, G, H, welche wir hier mit Vorbedacht anderst als in der 45 Figur nehmen, damit man sehe, wie die Winkel genommen werden müssen. Diese seyen

Erster	Zweyter
f = AEB = + 22°. 30′	AFB = + 63°. 48′
g = BEC = + 60. 44	BFC = + 107. 38
h = CED = − 18. 40	CFD = − 42. 20
f+g h = AED = + 64. 34	AFD = + 129. 6

Dritter	Vierter Stand.
AGB = + 66°. 20′	AHB = + 31°. 30′
BGC = + 205. 58	BHC = + 277. 52
CGD = − 70. 38	CHD = − 32. 56
AGD = + 201. 40	AHD = + 275. 26.

Nun ist §. (274.)

$$Q+S+1 = P.\,\frac{\cos f.\,\sin h}{\sin f.\,\sin h} + R\,\frac{\sin f.\,\cos.\,h}{\sin f \sin h}$$

$$-(PS+QR)$$

$$-(PS+QR)\,\frac{\sin g.\,\cos(f+g+h)}{\sin f.\,\sin h}$$

$$+(QS-PR)\,\frac{\sin g.\ \sin(f+g+h)}{\sin f.\,\sin h} -$$

Hieraus erhält man für alle 4 Stände

$$\begin{array}{l}
Q+S+1 = 2,4142\,P - 2,9600\,R + 3,0587\,(PS+QR) - 6,4320\,(QS-RP) \\
\qquad 0,4921\,P - 1,0977 \cdot - 0,9947 \cdots - 1,2240 \cdots \\
\qquad 0,4383\,P - 0,3515 \cdot + 0,4709 \cdots - 0,1871 \cdots \\
\qquad 1,6318\,P - 1,5438 \cdot - 0,3907 \cdots - 3,4653 \cdots
\end{array}$$

Werden diese Gleichungen von der ersten abgezogen, so ist

$$\begin{array}{l}
0 = 1,9221\,P. - 1,8623\,R + 4,0534\,(PS+QR) - 5,2080\,(QS-RP) \\
\ \ = 1,9759 \cdot - 2,6085 \cdot + 2,5878 \cdots - 6,2449 \cdots \\
\ \ = 0,7824 \cdot - 1,4162 \cdot + 3,4494 \cdots - 2,9667 \cdots
\end{array}$$

Werden hier die Coefficienten durch den von dem letzten Gliede jeder Gleichung getheilt, so erhält man

$$\begin{array}{l}
0 = 0,3691\,P - 0,3576\,R + 0,7783\,(PS+QR) - (QS-PR) \\
\ \ = 0,3164 \cdot - 0,4177 \cdot + 0,4144 \cdots - \cdots \\
\ \ = 0,2637 \cdot - 0,4774 \cdot + 1,1627 \cdots - \cdots
\end{array}$$

Zieht man hier wiederum von der ersten Gleichung ab, so bleibt

$$\begin{array}{l}
0 = 0,0527\,P + 0,0601\,R + 0,3639\,(PS+QR) \\
0 = 0,1054 \cdot + 0,1198 \cdot - 0,3844 \cdots
\end{array}$$

und hieraus

$$\begin{array}{l}
0 = 0,1448\,P + 0,1652\,R + (PS+QR) \\
\ \ = 0,2742 \cdot + 0,3117 \cdot - \cdots
\end{array}$$

Werden diese zwo Gleichungen addirt, so ist

$$0 = 0,4190\,P + 0,4769\,R$$

Demnach

Demnach erhält man, wenn man stufenweise zurück geht, folgende 4 Gleichungen

$$1^\circ. \quad R = -0,8786.\ P.$$
$$2^\circ. \quad PS + QR = -0,0003.\ P.$$
$$3^\circ. \quad QS - RP = +0,6831.\ P.$$
$$4^\circ. \quad Q + S + 1 = +0,6202.\ P.$$

§. 276.

Auf solche 4 Gleichungen verfällt man in jeden Beyspielen. Man sieht daraus, daß (Fig. 46.) sowohl DG als GF in Verhältniß von AF ist, und folglich die Linie AD mit BC einen Winkel macht, welcher eben derselbe bleibt, ungeachtet, wie wir bald sehen werden, AF zweyerley Werthe hat. Um aber diese zu finden, so erhalten wir aus den letzten vier Gleichungen folgende

$$5.^\circ \quad S - 0,8786\,Q = -0,0003 \qquad \text{(No. 1. 2.)}$$
$$6.^\circ \quad S + Q = -1 + 0,6202\,P. \qquad \text{(No. 4.)}$$

$$7.^\circ \quad 1,8786\,Q = -0,9997 + 0,6202\,P \qquad \text{(No. 5. 6.)}$$

$$8.^\circ \quad Q = -0,5321 + 0,3301\,P \qquad \text{(No. 7.)}$$
$$9.^\circ \quad S = -0,4679 + 0,2901\,P \qquad \text{(No. 6. 8.)}$$

$$10^\circ \quad QS = +0,2490 - 0,3088\,P + 0,0957\,P^2 \qquad \text{(No. 8. 9.)}$$
$$11^\circ \quad QS = +0,6831\,P - 0,8786\,P^2 \qquad \text{(No. 1. 3.)}$$

$$12^\circ \quad 0 = +0,2490 - 0,9919\,P + 0,9743\,P^2 \qquad \text{(No. 10. 11.)}$$

$$13^\circ \quad P^2 - 1,0180\,P = -0,2555 \qquad \text{(No. 12.)}$$

Hieraus

Hieraus endlich

$$P = +0,5690.$$
und $$P = +0,4490.$$

Woraus man sieht, daß in diesem Beyspiele beyde Werthe von P positiv sind. Die Figur, welche nach diesen Zahlen gezeichnet ist, hat den ersten. Setzen wir demnach

$$P = +0,5690.$$
so ist
$$R = -0,4998.$$
$$Q = -0,3543.$$
$$S = -0,3028.$$

Hieraus erhält man nun die Lage der 4 Objecte A, B, C, D. Man gebraucht deren nur drey um die Lage jeder 4 Stände E, F, G, H vermittelst der oben (§. 109. seqq.) vorgetragenen Aufgabe zu finden.

§. 277.

Ungeachtet demnach jeder der Buchstaben P, Q R, S zween Werthe hat, so sieht man doch aus den 4 letzten Gleichungen des §. 275. daß in beyden Fällen einerley Verhältniß zwischen denselben statt habe, und daß folglich die 4 Coefficienten, so in diesen 4 Gleichungen vorkommen, von den 4 Ständen unabhängig sind, ungeachtet sie daraus sind gefunden worden. Denn nimmt man (Fig. 46) die Linie CB an, so erhält man zu den zween Puncten A, D noch zween andere M, N, so daß alle vier Puncte A, M, D, N da lie-

gen,

gen, wo die Linie AD die beyden Circul ABC, BCD durchschneidet. Da man nun anstatt der Linie BC, eine der Linien AB, AD, CD, AC, BD zum Grunde legen kann, und in Ansehung einer jeden zu den zwey andern Objecten noch zween Puncte findet, so findet man zu den 4 wirklichen Objecten A, B, C, D noch 12 andere Puncte, und folglich in allem 16. Hieraus läßt sich erklären, warum man bey Auflösung dieser Aufgabe sehr leicht auf eine Gleichung vom 16ten Grade fallen kann. Es ist aber merkwürdig, daß sie sich auf eine Gleichung vom zweyten Grade herunter setzen läßt, und daß die übrigen 12 Puncte schlechthin durch die Lage der 4 Objecte A, B, C, D bestimmt werden, und von der Lage der Stände unabhängig sind. Es lassen sich auch die 4 Puncte A, B, C, D welches die wirklich beobachteten Objecte sind, dadurch erkennen, daß man bey den übrigen 12 Puncten fast immer statt der observirten Winkel ihre Complemente zu 180 Graden nehmen müßte.

§. 278.

Folgende Aufgabe werde ich noch beyfügen, weil sie theils wegen ihrer Construction etwas einfaches hat, theils auch bey Bestimmung der Laufbahn eines Cometen gebraucht werden kann. Wenn vier Linien AE, AC, BF, BD von gegebener Lage sind, ein gegebenes Viereck DCFE auf denselben zu beschreiben, so daß jedes der Ecken E, F, C, D auf einer der vier Linien zu liegen komme. Man sieht leicht, daß diese Aufgabe allgemeiner ist, als die, wobey alle vier Puncte E, F, C, D auf einer geraden Linie liegen müssen (§. 260) welches nur ein besonderer Fall von der gegenwärtigen Aufgabe ist. Die Auflösung ist folgende.

Fig. 48.

§. 279.

Die Durchschnittspuncte A, B, sind diejenigen, so die Linien machen, welche in zwey gegenüberstehende Ecken C, E und F, D laufen sollen. Ziehet demnach B, A zusammen, und messet die Winkel EAC, EAB, FBD, fBA, so läßt sich die Aufgabe folgendergestalt umkehren. Beschreibet erstlich das Viereck EFCD, und zieht die Diagonalen EC, FD. Diese sind Chorden von Bögen, welche doppelt so viele Grade haben, als die gemessenen Winkel EAC, FBD. Daher könnet ihr die beyden Circul ECA und FDB, welche Bögen von so vielen Graden geben, ziehen, und es ist klar, daß die Puncte A und B auf ihrem Umkreyse liegen müssen.

§. 280.

Machet ferner den Bogen Eb von doppelt so vielen Graden als den gemessenen Winkel BAE, und wiederum den Bogen Fa = 2. fBA, so ist nothwendig, daß die verlängerte

längerte Linie AB durch die beyden Puncte b und a gehen müsse. Ziehet demnach durch b und a eine gerade Linie, so wird sie die Puncte B und A in dem Umkreise der behörigen Circul bestimmen. Wenn ihr sodann BF, BD, AE, AC zusammen ziehet, so werden diese Linien die gegebene Lage unter sich und mit dem Vierecke haben, und die Figur wird derjenigen, so ihr habt construiren wollen, in allem ähnlich seyn.

§. 281.

Will man diese Aufgabe bey den Cometen gebrauchen, so nimmt man vier Observationen, und setzt, der Comet habe eine gerade Linie durchlaufen. Hiedurch bestimmt man seinen Abstand von der Erde und von der Sonne. Und wenn man die beyden äussersten Observationen beybehält, so läßt sich die Parabel, und daher auch die beyden mittlern Oerter construiren. Man hat also dadurch ein Viereck, welches demjenigen, so der Comet in seiner wahren Bahn in den 4 Observationen gemacht hat, ungleich ähnlicher seyn wird, als die angenommene gerade Linie. Dieses Viereck wird auf die Fläche der Ecliptic reducirt, und nach gegenwärtiger Aufgabe gebraucht, um den Abstand des Cometen noch näher zu bestimmen. Dadurch gelangt man zu einem noch ähnlichern Viereck, und kömmt durch die Wiederholung zu so genauer Bestimmung

stimmung der Laufbahn, als man sie verlangt.

§. 282.

Es ist hier anzumerken, daß man nicht nöthig hat die Seiten des Viereckes EFCE in eben dem Maaßstabe zu wissen, nach welchem die Linien Af, AB, Bf &c. gemessen werden, sondern es ist genug, wenn die Winkel und die Verhältniß zwischen den Seiten bekannt sind. Wenn man aber das wirkliche Maaß der Seiten weiß, so ist ein Triangel genug, und die Aufgabe wird sich folgendergestalt construiren lassen.

§. 283.

Es seyen die Linien von gegebener Lage BD, BF, AE, und der gegebene △ DFE, welcher darauf soll construirt werden. Construirt erstlich den △ DFE, und da ihr die Winkel DAE, FCE wisset, so beschreibet auf DE, FE Circul, deren Bögen doppelt so viele Grade haben, als diese Winkel, so müssen die beyden Puncte A und C nothwendig auf dem Umkreise dieser Circul liegen. Machet ferner den Bogen Dc von doppelt so vielen Graden, als der Winkel DBF hat, oder welches gleich viel ist, den Bogen Ec von so vielen Graden als der Bogen EF hat, und ziehet die Chorde Fc. Auf dieser Chorde beschreibet einen andern Circul, dessen Bogen cF so Fig. 49.

 viele

viele Grade habe als FE, oder doppelt so viel als der Winkel FCE. Traget endlich die Linie AC aus F auf diesen Circul in a, und ziehet durch c und a eine Linie in A, so habt ihr den ersten Punct. Ziehet ferner ACE, so ist C der zweyte Punct, und endlich DAB, FCB, so ist B der dritte Punct, und die Linien DB, AE, FB haben gegen den △ DFE die gegebene Lage und Größe.

§. 284.

Denn weil der Bogen DE = 2. DBF, so ist DAc = D F, folglich Ac mit BF und aus ähnlichem Grunde aF mit AE parallel, weil ihr caF = FCE = cAE und Fa = AC habt. Man kann diese Auflösung auch zu der Aufgabe gebrauchen, wenn aus dem Durchschnittspuncte E zweyer Circul DAE, CEF eine Linie EA zu ziehen, daß das abgeschnittene Stück AC von gegebener Länge sey Denn diese Linie AE mag hinfallen wo sie will, so ist der Winkel FCE halb so groß, als der Bogen FE des Circuls FEC. Und so viele Grade dieser Bogen hat, so viel müssen auch die Bögen Ec und Fc der beyden andern Circul DFE u. acF haben, damit die Winkel caF, cAE und FCE einander gleich werden können. Sodann muß der verlangte Abschnitt AC aus F in a getragen werden, damit man die Lage der Linie ca finde, welche verlängert durch A gehet. Es sind dabey zween mögliche Fälle. §. 285.

§. 285.

Die erste dieser Aufgaben (§. 277.) ist noch auflößbar, wenn man von dem Vierecke EFCD nichts als die Winkel weiß. Die Auflösung selbsten ist derjenigen ähnlich, die wir oben für den besondern Fall gegeben haben, wenn die vier Linien EA, CA, FB, DB alle in einem Puncte sich durchschneiden (§. 269) man kann aber leicht sehen, daß sie hier noch weitläuftiger wird, und mehrere mögliche Fälle hat. Ich werde sie daher eben so wie die Aufgaben, die ich (§. 274.) oben angegeben, und die auch auf diesen Fall bezogen werden können, hier weglassen. Die Auflösung ist leichter, und wird auf einen einigen Fall gebracht, wenn man das ganze Viereck als gegeben, oder die Winkel und die Verhältniß zwischen den Seiten annimmt, und diß läßt sich in dem Fall, wo sie auf die Bahn eines Cometen angewandt wird, allezeit thun. Fig. 48.

XI. Gerade Linien.

§. 286.

Wir haben vorhin (§. 271. 272) angemerkt, daß viele Auflösungen fruchtloß werden, wenn die Objecte in gerader Linie liegen, und dieses scheinet denselben, so einförmig sie auch immer sind, einen Theil

 der

der Vortheile zu benehmen, die man sonst in der ganzen Meßkunst von ihnen hat. So z. E. wenn auch die Aufgabe des §. 276. auf eine sehr brauchbare Art aufgelößt werden könnte, so würde die Auflösung fruchtlos werden, wenn alle vier Objecte in gerader Linie liegen, welches doch sonst immer der leichteste Fall ist. Ich habe demnach untersucht, ob der Abbruch, der ihnen dadurch geschieht, durch keinen andern Vortheil wieder ersetzt wird, und ob drey oder mehrere Objecte, die in gerader Linie liegen, wegen eben dieser Eigenschaft, von den Mitteln, die man hat, überquer liegende Objecte in Riß zu bringen, so ausgeschlossen seyn, daß man ihre Lage nicht einmal so leicht, geschweige dann noch leichter sollte bestimmen können. Es giebt doch endlich noch genug gerade Linien in der Welt, auf denen man drey und mehrere Puncte annehmen kann, und überdiß ist ja nichts leichters, als mit zweyen Objecten das dritte, wo man will, in gerade Linie zu setzen, so lange man jene beyde noch sehen kann.

§. 287.

Die hierüber angestellte Untersuchung hat mich gelehrt, daß die geraden Linien ein gewisses Mittel halten, welches ich folgendermaaßen vorstellen will.
Fig. 50. Wenn man ein Feld ausmessen oder in Grund legen will, so nimmt man eine Standlinie DE an, an deren beyden Enden D und E mißt man die Winkel ADE, CDE, BDE und AED, BED, CED, und es ist nothwendig, daß dadurch die drey Objecte A, C, B und auf gleiche Art noch mehrere auf dem Meßtischgen bestimmt und aufgerissen werden. Es wird folglich dabey erfordert, daß man in D nach E, und in E nach D sehe, und in jedem Stande das Meßtischgen nach dem andern Stande richte.

§. 288.

Diese zur Genüge bekannte Nothwendigkeit hat ihre Beschwerlichkeiten, und wir haben in dieser Abhandlung verschiedene Mittel vorgeschlagen, sie in vielen Fällen entbehrlich zu machen. Der äußerste dieser Fälle, wobey man weder ein Gesetz der Natur gebraucht, noch etwas von der Lage der Objecte und der Stände weiß, noch an dem einen Stande sich um die übrigen umsieht, ist der, den wir §. 276. berührt haben. Und da muß man vier Stände haben, und an jedem vier gleiche Objecte sehen können. Dieser Fall giebt vollends keine Auflösung, wenn alle 4 Objecte in gerader Linie liegen.

§. 289.

Die Objecte, so in gerader Linie liegen, begnügen sich mit zween Ständen, und das Mittel, so sie hierinn treffen, ist dieses, daß die beyden Stände weder völlig noch gar nicht von einander abhängen dürfen. Es ist zugleich nothwendig und zureichend, daß man an dem einen sich um den andern umsehe. Wenn A, C, B in gerader Linie liegen, so kann man an dem ersten Stande D die Winkel ADC, ADB messen, ohne sich um den zweyten Stand E zu bekümmern. Ist man damit fertig, so setzt man in D ein Zeichen, und geht sodann auf dem Felde herum, wohin man will, genug daß man noch das Zeichen in D und die Objecte A, C, B sehe. D mag ein Gebäude, ein Thurm, ein Berg ꝛc. seyn, so wird das Zeichen dadurch öfters noch unnöthig, weil alsdann diese Oerter statt des Zeichens dienen.

§. 290.

Befindet man sich nun an einem Orte, welcher zum zweyten Stande bequem liegt, oder ohnehin auch in den Riß muß eingetragen werden, z. E in E, so mißt man daselbst die Winkel AED, CED, BED, und diese sind zureichend, die ganze Figur zu entwerfen.

291.

Um dieses zu beweisen, so seyen die Objecte A, C, B die Stände D, E. Durch die
Fig. 51. Puncte ADB gehe der Circul AdBD, und durch AEB der Circul AeBE. Verlängert DC in d, und EC in e, und ziehet ed zusammen, so ist der Triangel edC dem △ DCE ähnlich. Denn weil

weil AB die gemeinsame Chorde beyder Circul ist, so ist auch durch die Natur des Circuls

$$AC \,.\, CB = DC \,.\, Cd = EC \,.\, Ce$$

folglich

$$eC : Cd = DC : CE$$

und die Winkel DCE und eCd sind einander gleich, folglich ist auch

$$DEC = Cde.$$

292.

Hieraus fleußt nun folgende Construction: Da die Bögen AeB, AdB doppelt so viele Grade haben, als die gemessenen Winkel AEB, ADB, so ist klar, daß ihr die Linie AB annehmen und beyde Circul darauf construiren könnet. Ferner müssen gleichfalls die Bögen Ae, Ad doppelt so viel Grade haben, als die gemessenen Winkel AEC, ADC und daher könnet ihr die beyden Puncte e und d finden, und die Linie de ziehen. Machet endlich den Winkel edC dem ebenfalls gemessenen Winkel CED gleich, und ziehet die Linie dCD. Diese giebt auf einmal den Ort des mittlern Objectes C, und des Standes D. Ziehet endlich eCE, so habt ihr auch den andern Stand E.

§. 293.

Dieser Vortheil hat etwas ähnliches mit demjenigen, den die Mittagslinie giebt, welche

che uns eben den Winkel erspart. Allein, er reichet in Absicht auf die Allgemeinheit nicht so weit, und wenn man die Mittagslinie in dem gegenwärtigen Falle gebraucht, so werden beyde Stände von einander vollkommen unabhängig. Man observire in D die Abweichung der Linien DA, DC, DB, und in E die Abweichung der Linie EA, EC, EB von der Mittagslinie, so wird sich die ganze Figur ohne die Standlinie DE construiren lassen. Denn die beyden Circul, und auf denselben die Puncte e, d werden wie vorhin aus den Winkeln ADB, AEB, AEC, ADC gefunden und gezeichnet. Ferner aus der Abweichung der beyden Linien DC, EE, von der Mittagslinie, findet man den Winkel DCE durch den §. 96. Wenn man derowegen die gezogene Linie de als eine Chorde eines Circuls ansieht, dessen Bogen doppelt so viele Grade als der Winkel DCE = dCe hat, so läßt sich der Circul ziehen, und wo dieser die Linie AB in C durchschneidet, da ist der gesuchte Punct C. Man sieht aber, daß hier wiederum zween Fälle möglich sind, und folglich der wahre Ort des C aus andern Umständen muß bestimmt werden. Denn der Circul, der durch d, e, C geht, durchschneidet die Linie AB an zweyen Orten. Sind die Durchschnitte weit von einander, so läßt sich der wahre leicht erkennen. Widrigen Falles ist das rathsamste noch einen dritten Stand anzunehmen.

§. 294.

§ 294.

Wir werden nun dieses ohne Absicht auf die Mittagslinie thun. Es seyen demnach A, C, B in gerader Linie, die drey Stände seyen D, E, F. Durch jeden derselben und durch die beyden Objecte A, B gehen die Circul ADBd, AEBe, AFBf und die Linien DC, EC, FC werden bis in d, e, f verlängert, und zu Diametern gemacht, so ist wiederum AB eine gemeinsame Chorde der drey Circul und Fig. 52.

$$AC . CB = DC . Cd = EC . Ce = FC . Cf$$

folglich

$$DC : Cf = CF : Cd = DF : fd$$

und

$$DC : Ce = CE : Cd = DE : de$$

und

$$CE : Cf = CF : Ce = EF : ef$$

daher die Triangel

$$CDE \backsim Ced$$
$$CDF \backsim Cfd$$
$$CEF \backsim Cfe$$

§. 295.

Wenn man demnach in dem Triangel DEF einen einigen Winkel weiß, so läßt sich die Figur construiren. Wir setzen nemlich, daß man an jedem Stande nur die Winkel observirt, welche die drey Objecte A, C, B da-

selbst

selbst machen. Denn durch diese Winkel können wie vorhin die 3 Circul gezogen, und auf denselben die Puncte d, e, f gezeichnet werden. Setzen wir nun, daß man noch überdiß den Winkel DEF wisse, so ist

$$DEC = edC$$
$$FEC = Cfe$$

daher

$$DEF = edC + efC$$

und wenn auf beyden Seiten fed + fCd addirt wird,

$$DEF + fed + fCd = edC + efC + fed + fCd = 360°.$$

folglich

$$fCd = 360° - DEF - fed.$$

Da nun DEF, fed bekannt sind, so ist hiedurch auch fCd bekannt, und auf der Linie fd läßt sich ein Circul beschreiben, der durch den Punct C geht, und denselben folglich bestimmt. Es sind aber auch hier wieder zween Fälle möglich, weil dieser Circul die Linie AB an zweyen Orten durchschneidet. Der wahre Fall muß folglich aus andern Umständen bestimmt werden. Das beste ist, wenn man in dem △ DEF noch einen Winkel weiß.

§. 296.

Wir können hier noch beyläuftig anmerken, daß auch die vier Puncte E, F, f, e, desgleichen D, F, f, d, und D, E, e, d in dem Umkreyse

kreyse dreyer Circul liegen, weil CD, CE, CF in umgekehrter Verhältniß von Cd, Ce, Cf sind

§. 297.

Sodann haben wir hier keine andere Objecte in Betrachtung gezogen, als die drey, die auf der geraden Linie ACB sind. Und wenn auf einer geraden Linie unzählige Objecte lägen, so liessen sie sich nicht bestimmen, so lange man an jedem Stande nichts anders observirt, als die Winkel so diese Objecte daselbst unter einander machen. Man sieht aber aus bisher gesagtem, daß nur noch ein einiger Winkel hinzukommen darf, um die Lage der Objecte zu finden, uud hiezu sind drey Objecte zureichend. Den einigen Fall ausgenommen, den wir hier anführen wollen.

§. 298.

Es seyen die 4 Objecte A, B, C, D in gerader Linie, und der Abstand AB, CD, gegeben, hingegen der mittlere Theil BC unbekannt. AD mag z. E. eine Standlinie seyn, die zu lang ist, als daß man sie ganz messen wollte. Man mißt daher nur von A bis in B und von D in C, so viele Ruthen man will, und stecket in B und C Zeichen, die mit A, D in gerader Linie seyn müssen. Um nun die Länge des ungemessenen Theiles BC zu finden, geht man in E, und mißt die Winkel AEB, AEC, AED, so ist die Auflösung folgende. Fig. 53.

§. 299.

§. 299.

Es sey EP die aus E auf AD fallende Perpendicularlinie. Setzet die Winkel

$$AEB = a \qquad AEP = x$$
$$AEC = b$$
$$AED = c$$

Nehmet EP als den Halbmesser an, so ist

$$AP = \tang x, \qquad PD = \tang(c - x)$$
$$BP = \tang(x - a) \quad PC = \tang(b - x)$$

folglich

$$AB = \tang x - \tang(x - a)$$
$$CD = \tang(c - x) - \tang(b - x)$$

Da nun die Verhältniß zwischen AB und CD gegeben, so machet

$$AB : CD = m : n$$

so ist

$$m : n = (\tang x - \tang(x - a)) : (\tang(c - x) - \tang(b - x))$$

Es ist aber

$$\tang x - \tang(x - a) = ta . \sec x^2 : (1 + tx . ta)$$

$$\tang(c-x) - \tang(b-x) = (tc - tb) \sec x^2 : ((1 + tx . tc) . (1 + tx . tb)$$

folglich

$$m : n = (1 + tx . tc) . (1 + tx . tb) : (1 + tx . ta)(tc - tb)$$

und

$$tc - tb)(m + mtx . ta) = n + ntxtc + ntx . tb + n\, tb . tc . tx^2$$

folglich

$$tx^2 + tx\left[\cot b + \cot c - \frac{m}{n} ta(tc - tb)\right] = \frac{m}{n}(tc - tb) - \cot c . \cot b.$$

Woraus man sieht, daß wiederum zween Fälle möglich sind, und der wahre aus andern Umständen muß bestimmt werden, wenn man ihn nicht sonst leicht erkennen kann.. Man kann auch auf AB oder auf DC im Ausmessen noch ein Zeichen aufstecken, oder einen zweyten Stand annehmen, welcher von dem ersten wiederum ganz intependent ist. Es ist aber dieses nicht nöthig, weil der andere Fall allezeit derjenige ist, wo die Linie AD zwo von den Linien AE, FB oder CE, ED auf der andern Seite durchschneidet, wenn sie ausserhalb E verlängert werden.

§. 300.

Nimmt man ausser den 3 Objecten, so in einer geraden Linie liegen, noch ein anderes an, welches nicht auf derselben ist, so werden die Stände vollends von einander unabhängig, und es ist klar, daß hiebey vielerley Fälle vorkommen können, von welchen wir etliche betrachten wollen.

§. 301.

Es seyen die drey Objecte A, B, C auf der Linie AC, und DA mache mit derselben Fig. 54. einen rechten Winkel. DA, AC mögen zwo Mauern seyn, so kann man darauf die Puncte D, A, B, C nehmen. Observirt man nun in E und F die Winkel DEA, DEB, DEC und DFA, DFB, DFC, so läßt sich die

O Verhält-

Verhältniß zwischen allen Linien der Figur folgender maaßen berechnen.

§. 302.

Verlängert die Linie CA, und fället aus E und F die Perpendicularen EP, FQ darauf. Nennet sodann

$$\begin{array}{lll} AD = 1 & PEA = x & QFA = y \\ EP = P & DEA = a & DFA = A \\ FQ = Q & AEB = b & AFB = B \\ & AEC = c & AFC = C \end{array}$$

so habt ihr auf gleiche Art wie vorhin, in dem ihr EP und FQ als Halbmesser ansehet,

$$\left\{\begin{array}{l} AB = P.\,\text{tang}\,(x+b) - P.\,\text{tang}\,x \\ AB = Q.\,\text{tang}(y+B) - Q.\,\text{tang}\,y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} AC = P.\,\text{tang}\,(x+c) - P.\,\text{tang}\,x \\ AC = Q.\,\text{tang}\,(y+C) - Q.\,\text{tang}\,y \end{array}\right.$$

$$PA = P.\,\text{tang}\,x = (P+1).\,\text{tang}\,(x-a)$$
$$QA = Q.\,\text{tang}\,y = (Q+1).\,\text{tang}\,(y-A)$$

Aus den beyden letztern Gleichungen folgt

$$P = \frac{\text{tang}\,(x-a)}{\text{tang}\,x - \text{tang}\,(x-a)}$$

$$Q = \frac{\text{tang}\,(y-A)}{\text{tang}\,y - \text{tang}\,(y-A)}$$

daher

daher und aus den beyden erstern Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} P:Q = \dfrac{\text{tang}\,(x-a).\,[\text{tang}\,y - \text{tang}(y-A)]}{[\text{tang}\,x - \text{tang}\,(x-a)].\,\text{tang}\,(y-A)} \\ P:Q = \dfrac{\text{tang}\,(y+B) - \text{tang}\,y}{\text{tang}\,(x+b) - \text{tang}\,x} \\ P:Q = \dfrac{\text{tang}\,(y+C) - \text{tang}\,y}{\text{tang}\,(x+c) - \text{tang}\,x} \end{array}\right.$$

Werden nun die Tangenten der zusammen gesetzten Bögen in ihre einfache aufgelößt, z. E.

$$t(x-a) = \frac{tx - ta}{1 + tx.\,ta}$$

und daher

$$\frac{t\,(x-a)}{tx - t\,(x-a)} = \frac{\text{tang}\,x - \text{tang}\,a}{\text{tang}\,a,\ \text{sec}\,x^2}$$

und eben so

$$\text{tang}\,(x+b) - \text{tang}\,x = \text{tang}\,b.\,\text{sec}\,x^2 : (1 - tb.\,tx)$$

so werden diese Gleichungen in folgende verwandelt

$$\frac{(tx - ta)\,tA}{ta,\,(ty - tA)} = \frac{tB.\,(1 + tb.\,tx)}{t\,b.\,(1 + tB.\,ty)}$$
$$= \frac{tC.\,(1 + tc.\,tx)}{tc.\,(1 + tC.\,ty)}$$

 Weiter

Weiter wollen wir diese Gleichung nicht verfolgen, weil sie in einzelen Fällen von hier an kürzer in Zahlen aufgelößt wird. Man sieht übrigens, daß sie vom zweyten Grade ist, und daher wiederum eine doppelte Auflösung hat, von welchen die wahre aus andern Umständen erkannt werden muß. Man kann auch hier wiederum auf der Linie AC oder AD noch einen Punct wählen, oder noch einen dritten Stand nehmen.

§. 303.

Das erste dieser Mittel, wenn man nemlich auf AD in G noch einen Punct annimmt, ist vorzüglicher, weil man dadurch zu einer Gleichung vom ersten Grade kommt. Und überhaupt ist es besser, mehrere Data anzunehmen, als die Aufgabe erforderte, weil dadurch nicht nur die Zweydeutigkeit der Auflösung gehoben wird, sondern dieselben zugleich zur Entdeckung der Fehler dienen.

§. 304.

Wenn der eine Stand z. E. F in gerader Linie mit AD ist, so wird die Rechnung kürzer, weil die Winkel QFA und DFA oder y und A = o werden. Daher hat man

$$tB\,(\cot b + \text{tang}\,x) = tC.\,(\cot c + \text{tang}\,x)$$

eine Gleichung vom ersten Grade.

§. 305.

Trägt es sich zu, daß die Winkel DEA, DFA einander gleich werden, so giebt die Rechnung gar keinen Werth, denn weil in diesem Falle A = a, so ist

$$\frac{tx - ta}{ty - ta} = \frac{\cot b + tx}{\cot B + ty} = \frac{(\cot c + tx)}{(\cot C + ty)}$$

folglich

$$(\cot b + ta) : (tx - ta) = \cot (B + ta) : (ty - ta)$$
$$(\cot c + ta) : (tx - ta) = \cot (C + ta) : (ty - ta)$$

daher

$$\frac{t(x - ta)}{t(y - ta)} = \frac{(\cot b + ta)}{\cot B + ta} = \frac{\cot c + ta}{\cot C + ta}$$

Woraus aber nichts anders folgt, als daß die gemessenen Winkel a, b, c, B, C eine bestimmte Verhältniß unter sich haben, und daß so bald man DEA = DFA findet, einer der übrigen Winkel nicht nöthig hat gemessen zu werden, weil man ihn durch diese Verhältniß findet. Aber den Werth von x und y findet man nicht, sondern nur die Verhältniß zwischen diesen Winkeln. Um desto nöthiger ist es die Stände E, F so anzunehmen, daß die Winkel DEA, DFA von sehr verschiedener Größe werden, und um desto sicherer ist es auch, auf der Linie AD noch einen Punct G anzunehmen, weil man dadurch diesen Fall und zugleich die Zweydeutigkeit der übrigen vermeidet.

§. 306.

Für diese Aufgabe habe ich keine andere Construction, als mittelst einer Hyperbel finden können, welche ich wegen ihrer besondern Umstände hersetzen will. Wenn man die
Fig. 55. ganze Linie auf welcher die Objecte ABC liegen, annimmt, so lassen sich auf derselben vermittelst der observirten Winkel, zween Circul AβC, AbC beschreiben, und die Puncte d, δ, β, b, auf denselben bestimmen, durch welche die Linien ED, FD, EB, FB gehen müssen. Dieses geschieht auf die schon öfters gebrauchte Art. Wenn man nun die Lage des Objects B wüßte, so ließen sich die Linien βBF, bBE, und folgends auch FδD und EdD ziehen, und der Durchschnitt D würde der gesuchte Ort seyn. Er möchte nun auf der senkrechten Linie AD, oder auf einer andern liegen. Da man aber von B weiter nichts weiß, als daß es auf AC liegen müsse, so nehme man auf dieser Linie eben so wie B einen jeden andern Punct an, und bestimme, wo in solchem Falle D liegen müßte. Dadurch findet ihr unzählige Puncte der Hyperbeln DdδC und AH, und wo eine derselben die Linie AD durchschneidet, da ist der gesuchte Punct D, welches hier nur in D geschieht. Es ist klar, daß wenn DAC kein rechter, sondern ein

ein jeder anderer Winkel wäre, die Lage des Puncts D dennoch könnte bestimmt werden. Wenn der Punct δ höher liegt als d, so geht die Hyperbel Dδd nicht durch C sondern durch A, und in diesem Falle geht die andere Hyperbel durch C.

§. 307.

Wäre die Lage des Puncts D ganz unbekannt, so müßte man noch einen dritten Stand annehmen. Dadurch würden noch zwo andere Hyperbeln construirt, und der Punct D würde in einem ihrer Durchschnitte seyn. Die Rechnung, die ich über diesen Fall angestellt, und ihrer Weitläuftigkeit halber nicht hersetzen mag, hat mich gelehrt, daß man auf eine Gleichung vom sechsten Grad verfällt, um die Tangente von x zu finden.

§. 308.

Hat man zwo gerade Linien vor sich, und auf jeder drey Objecte, so gebraucht man nur zween unabhängige Stände, aber die Gleichungen werden wiederum so weitläuftig, daß die Aufgabe dadurch unbrauchbar wird.

XII. Die Fehler im Observiren überhaupt betrachtet.

§. 309.

In den bißherigen Untersuchungen haben wir kein ander Augenmerk, als die Bequemquemlichkeit in der Ausübung gehabt, und in dieser Absicht die Vortheile durchgangen, welche das beschwerliche und mühsame ersparen, oder wenigstens von dem Felde wegnehmen, und auf das Papier bringen, da man es mit guter Musse construiren oder berechnen kann. Diese Absicht allein betrachtet, haben wir uns dabey nicht eingeschränkt, und daher auch solche Sachen mitgenommen, welche man wohl nicht anderst als zur bloßen Belustigung gebrauchen wird. Diese Vermengung des angenehmen und nüzlichen wird höchstens nur denen mißfallen, die in der Ausübung von nichts anders als einer theoretischen Schärfe wissen wollen, und die tausend Ausmessungen, die man nur beyläuftig zu wissen gebraucht, deswegen nicht vornehmen werden, weil es sich der Mühe nicht lohnet, sie nach der strengern und zugleich mühsamern Art zu suchen. In allen diesen Fällen sind die leichtern Mittel, die wir hier beschrieben haben, zureichend, und jedesmal wird man die bequemern dabey gebrauchen können, die die Umstände angeben.

§. 310.

Wir wenden nunmehr die Sache um, und werden die Schärfe untersuchen, die man in jeden Ausmessungen erreichen kann. Diese hat eben so wie die Bequemlichkeit unzählige Stuffen, und wir haben schon Anfangs angemerkt, daß diese beyden Absichten selten beysammen seyn, oder in gleichem Grade erreicht werden können. Das bloße Augenmaaß, welches allerdings das bequemste ist, fällt hier ganz weg, wo wir die Schärfe suchen. Die Mittagslinie, die wir ebenfalls sehr bequem gefunden haben, reichet zu der äussersten Schärfe, wenn man sie genau ziehet. Allein dieses erfordert Zeit, Mühe, und gute Instrumente. Ihr Gebrauch ist vortheilhaft, aber ihre Erfindung fordert in jedem Stande neue Arbeit. Entfernte Gegenstände leisten uns ähnliche Dienste, sie reichen aber nicht zu der äussersten Schärfe, wenn man sie nicht vollkommen so gut als unendlich entfernt ansehen kann. Verticale Linien und Flächen wären wiederum sehr bequem, allein die Winkel müssen ungemein scharf gemessen werden, wenn man auf kleine Fehler sehen muß. Mit dem Schatten der Sonne vermengt sich der Halbschatten, und seine Bestimmung leidet keine vollkommene Schärfe. Das reflectirte Licht läßt sich nur bey verticalen Objecten gebrauchen, und fordert genau gemessene Winkel. Das gebrochene Licht und die Bewegung haben wir in Absicht auf die Genauigkeit bereits betrachtet, und was wir bey viereckichten Figuren und geraden Linien angenommen haben, muß genau richtig seyn, wenn man die gröste Schärfe suchet.

 §. 311.

§. 311.

Der Ursprung der Fehler beym Observiren ist sehr mannigfaltig, weil viele Umstände dazu beytragen. Wir können davon folgende Classen anführen.

1°. Diejenigen, die man vorsetzlich zuläßt, wenn man als vollkommen richtig annimmt, was nur bey nahe zutrift. Z. E. daß die Mittagslinien und die Verticallinien parallel seyn, daß die Seiten eines Hauses einen rechten Winkel machen, daß eine Gartenmauer geradlinicht sey, daß das Licht in der Luft in gerader Linie fortgehe, daß Linien parallel seyn, die in einen Punct des äussersten Horizontes laufen ꝛc. Alle diese Sätze weichen mehr oder minder von der Wahrheit ab, und man muß aus den Umständen und aus der Absicht bestimmen, ob sie genauer müssen untersucht, und die Abweichung in die Rechnung gezogen werden.

2°. Die Fehler, so von dem Instrumente, und besonders von seiner Eintheilung und Zusammenfügung der Theile herrühren. Z. E. die Lage der Mittelpuncte, die parallele Lage der Diopteren ꝛc.

3°. Die, so von der Stellung des Instruments herkommen. Z. E. wenn es nicht in der behörigen Fläche liegt, wenn es von der Linie abweicht, in welcher es seyn sollte, wenn es nicht recht gerichtet ist ꝛc.

4°. Die Fehler, so von dem Auge entstehen, weil es ganze Flächen für Linien und Puncte ansieht, so bald sie entfernt genug sind, daß es ihre Breite nicht mehr unterscheiden kann.

5°. Die Inflexion des Lichtes, welche hindert, daß Gegenstände von verschiedener Entfernung mit ihren äussersten Enden an einander zu grenzen scheinen, da sie es der Schärfe nach nicht sind.

§. 312.

Die Fehler der ersten Classe kann man vermeiden, weil man sie nur zuläßt, wenn sie nichts zu bedeuten haben. Die von der zweyten Classe kommen sämtlich auf die Genauigkeit des Instruments an, und dieses muß vorläufig geprüft werden, damit man über die Abweichungen in der Eintheilung Register halten, und den Belauf der übrigen berechnen könne, wenn sie etwas auf sich haben, und so genau bestimmt werden müssen. Die von der 3ten Classe rühren gröstentheils von den Fehlern der 4ten her, und um diese geringer zu machen, bedient man sich, wo es nöthig ist, solcher Instrumente, welche statt bloßer Dioptern mit Fernröhren versehen sind, und dadurch wird auch der Nachtheil, den die Inflexion thut, mehr vermieden.

§. 313.

Was man überhaupt hiebey setzen kann, ist dieses: daß ein jedes Instrument noch einen grössern oder kleinern Fehler zu lassen, und man daher bestimmen müsse, wie hoch er sich belaufen kann. Denn ungeacht es geschehen kann, daß man z. E. in einem gegebenen Fall einen Winkel so genau damit mißt, als man es verlangt, so weiß man doch nicht, ob er in der That richtig gemessen worden, weil uns das Instrument keine so große Schärfe versichert. Wenn man also gleich zuweilen gar nicht fehlte, so ist doch ungewiß, ob es jetzt oder ein andermal so richtig eintreffe, und da man immer besorgen kann, daß man gefehlt habe; so ist das nöthigste; daß man den grösten möglichen Fehler, den das Instrument, bey der behörigen Aufmerksamkeit zuläßt, bestimme, weil man dadurch ausmachen kann, wie ferne die Ausmessung zuverläßig ist, und dieses ist alles, was wir von der Betrachtung der Fehler bey jeder Observation zu hoffen haben.

§ 314.

§. 314.

Hingegen giebt uns die allgemeine Theorie von den Folgen, die die Fehler nach sich ziehen, einen mehrern Nutzen, weil sie uns eine gedoppelte Vorsichtigkeit lehret. Die erste besteht in der Auswahl der Umstände. Man kann den Fehler bey Ausmessung jeder Winkel gleich groß setzen, weil wir hier nur die unkennbare betrachten, so ist man allezeit ungewiß, ob man unter diesen nicht den grössen zugelassen habe. Man setze mit Marinoni daß der Fehler bey den Meßtischgen zwo Minuten seyn könne, so wird dieser Fehler in einem kleinern Winkel beträchtlicher seyn als in einem grössern. Es ist also nöthig, die Umstände zu wählen, welche die Folgen der Fehler am geringsten machen.

§. 315.

Die andere Vorsichtigkeit besteht im Vor- und Nachgeben, welches ich auf folgende Art erläutern will. Man richte z. E. die Dioptern nach einem Puncte des Objectes, so genau es das Auge zuläßt, so wird man dennoch in Absicht auf eine Kleinigkeit unentschieden bleiben, ob man die Dioptern nicht noch ein wenig verrücken soll, und läßt man sie stehen, so wird man bey dem Zweifel, so man darüber hat, entweder das bejahende oder das verneinende überwiegend finden. Die Frage, ob man bey dieser kleinen Ungewißheit

wißheit

wißheit den Winkel lieber soll zu groß als zu klein machen, muß durch die Theorie der Fehler entschieden werden. Es ist für sich klar, daß man hiebey nichts vorsetzliches thun, sondern nur so weit gehen müsse, daß in dem Zweifel das überwiegende auf die Seite falle, welche die Theorie für genauer angiebt. Laßt uns hievon einige Beyspiele geben.

§. 316.

Man messe in einem Triangel alle drey Winkel, so muß ihre Summa 180. Grad machen. Ist sie z. E. grösser, so wird der Ueberschuß in drey gleiche Theile getheilt, und von jedem Winkel wird der dritte Theil abgezogen. Wäre nun einer dieser Winkel ohne dem schon zu klein, so ist klar, daß er hiedurch noch kleiner, und folglich der Fehler vermehrt würde. Es ist klar, daß man bey vorhin erwähntem Zweifel lieber alle drey Winkel zu groß, oder alle drey zu klein macht, wenn man dem Zweifel einen Ausschlag geben solle. Denn so ist man wegen der Verbesserung mehr versichert, daß alle drey Winkel auf gleiche Art müssen verändert werden. Hätte man den Ausschlag nicht gegeben, so müßte man doch das überwiegende im Zweifel zu rathe ziehen, um die Verbesserung darnach einzurichten. Es wäre nicht vernünftig einen Winkel noch grösser zu machen, von dem man mehr Grund hat, zu vermuthen, daß er schon zu groß sey.

§. 317.

Eben so wenn die drey Linien dA, dB, eC, Fig. 56. welche vermittelst der Winkel dAC, dBC, eCA gezogen worden, sich in einem einigen Punct, nach welchem man die Dioptern gerichtet, durchschneiden sollten, und sich aber in d, e, f durchschneiden, so ist offenbar, daß entweder eine, oder zwo, oder alle drey eine solche Lage haben. Der wahre Punct kann entweder in oder ausser dem △ def liegen. Im letzten Fall ist seine Lage sehr unbestimmt, und es ist klar, daß, wenn man je hier ein Mittel treffen sollte, der Mittelpunct des △ müßte genommen werden. Derselbe sey D. Hiedurch wird der Winkel eAC grösser, und die beyden Winkel eCA, fBC werden kleiner, als sie gemessen worden. Soll man demnach das Mittel auf diese Art nehmen können, so muß der vorhin erwähnte Ausschlag so gegeben werden, daß man den Winkel eAC lieber zu klein, und die beyden Winkel fBC, fCB lieber zu groß messe. Giebt man diesen Ausschlag nicht, so muß man in den Zweifeln immer der überwiegenden Seite mehr zugeben.

§. 318.

Ausser dieser Vermuthung, bleibt bey allen Fehlern nichts als die Ungewißheit, ob man sie begangen habe, und wie groß jeder sey. Das erstere läßt sich noch am leichtesten ausmachen,

machen, wenn man in der That gefehlt hat, hingegen fällt es desto schwerer zu bestimmen, worinn jeder Fehler bestehe, und wie ferne man ihre Folgen vermeiden könne.

§. 319.

Um zu finden, ob merkliche Fehler wirklich vorgegangen, muß man nothwendig mehrere Stücke ausmessen, als nach der Theorie nöthig wären. So z. E. fordert die Theorie in jedem Triangel nicht mehr als zween Winkel, und der dritte wird nothwendig ihr Zusatz zu 180. Grad seyn. Ebenfalls ist der Durchschnitt zwoer Linien zureichend, um die Lage eines Puncts zu bestimmen. Sind aber bey den beyden Winkeln oder bey Bestimmung der beyden Linien Fehler untergelaufen oder wenigstens zu besorgen, so muß im ersten Falle noch der dritte Winkel gemessen werden, im andern aber muß man noch eine, oder auch noch mehrere Linien ziehen.

§. 320.

Dadurch findet man aber nur so viel, daß es irgendwo gefehlt seyn müsse, wenn die 3 Winkel nicht 180° machen, oder die Linien sich nicht in einem gleichen Puncte durchschneiden. Wo aber der Fehler sey, wird dadurch nicht ausgemacht, und das schlimmste ist, daß wenn diese Regel wirklich zutrift, die Gewißheit, daß man in keinem Stücke gefehlt

habe, dadurch nicht erhalten wird, weil die Fehler einander aufheben können. Man hat daher die Wiederholung der Ausmessung jeder Winkel eingeführt, um aus allen das Mittel zu nehmen. Und dieses ist allerdings das sicherste, so bald man setzen kann, daß die Fehler, die den Winkel zu groß geben, eben so möglich sind, als die, so ihn zu klein geben. Bey Fehlern, die nur daher rühren, daß das Auge ganze Flächen für Puncte und Linien ansieht, ist diese Möglichkeit nothwendig zuläßig.

§. 321.

Aus diesen vorläufigen Betrachtungen erhellet, worauf es bey der Untersuchung der Fehler fürnehmlich ankömmt. Wir halten uns hier nur bey denen auf, die unvermeidlich sind, weil man nicht schärfer sehen kann, und wobey eben deßwegen nicht kann ausgemacht werden, wie groß sie in der That sind. Da man bey jedem Instrumente den äussersten Fehler bestimmen muß, der dabey aus diesem Grunde vorgehen kann, um daraus zu finden, wie ferne die Ausmessung zuverläßig ist, und da dieser Fehler sich nach der Güte des Instruments richtet, so hängen die Schärfe der Ausmessung und die von dem Instrumente von einander ab, und eine muß durch die andere bestimmt werden. Diese Bestimmung hängt aber viel öfters von den Folgen der Fehler, als unmittelbar von ihnen selbsten ab, und diese Folgen richten sich nach den Umständen. Kann man hierinn etwas ändern, und die besten daraus wählen, so wird ein gemeiner Instrument vielmal so gut dienen, als bey schlimmern Umständen ein sehr gutes. Daher muß die Verhältnis zwischen den Fehlern, ihren Folgen, den Umständen der Ausmessung und der Güte des Instrumentes durch die Theorie bestimmt werden. Hat man ein Instrument vor sich, so fragt sich, wie genau eine gegebene Figur damit ausgemessen werden könne, und welches die besten Umstände dazu seyen. Will man aber die vorgegebene Figur bis auf einen bestimmten kleinen Theil genau messen, und die Umstände können nicht gewählt werden, so ist die Frage, wie genau das Instrument seyn müsse. Hieraus haben wir eine dreyfache Quelle von Aufgaben, die in der Theorie der Fehler vorkommen müssen.

§. 322.

Wir machen zwischen den Fehlern und ihren Folgen nicht nur deßwegen einen Unterschied, weil die Folgen eines gleichen Fehlers sich nach den Umständen ändern, sondern auch, weil man bey der Wiederholung der Ausmessung das Mittel nicht aus den Folgen, sondern aus den wirklichen Observationen nehmen muß. So z. E. muß man aus einem vielmal gemessenen Winkel das Mittel nehmen,

men, ehe man etwas daraus berechnet. Ungeacht also viele Fälle sind, wo die Fehler und ihre Folgen einander proportional bleiben, so giebt es doch weit mehrere, wo dieses nicht ist. Beyde kann man durch die Theorie von einander unterscheiden.

§. 323.

Ferner ist klar, daß so lange man die Folgen der Fehler nur deßwegen berechnet, damit man sehen könne, wie weit die Ausmessung als zuverläßig kann angesehen werden, nothwendig jeder Fehler, für den man nicht gut stehen kann, unter den möglichen am grösten müsse genommen werden, und daß, wo mehrere zugleich vorkommen können, dieselben sämtlich auf die Seite geschlagen werden müssen, wobey der Unterschied am grösten wird. Die Wahrscheinlichkeit dieses so vergrösserten Unterschiedes wird sodann aus der Vergleichung aller möglichen Fälle ausgemacht, und nach Bestimmung derselben läßt sich derjenige Fehler finden, welcher unter allen der wahrscheinlichste ist, und dadurch erhält man den wahrscheinlichsten Grad der Zuverläßigkeit der Ausmessung.

§. 324.

Die Schärfe des Auges wird bey jeder einzeln Ausmessung auf eine gedoppelte Art gebraucht. Man setze, daß man die Dioptern nach

nach einem Object richte, so muß das Aug entscheiden, ob sie genau nach dem erwählten Punct gerichtet seyn, und dieses ist der erste Fall, welcher sich eräugnet, das Auge mag durch bloße Dioptern oder durch Fernröhre sehen, die statt derselben an dem Liniale angemacht sind.

§. 325.

Sodann ist es nöthig auf dem Instrumente zu entscheiden, was für eine Lage das Linial habe, oder wie viel Grade und Minuten es abschneide. Die Richtigkeit dieser Entscheidung hängt von der Größe und Güte des Instruments, und von der Schärfe des Auges ab, dieses mag wiederum entweder durch ein Vergrösserungsglaß, oder blos sehen. Man giebt die erstere Entscheidung für zuverläßiger aus, und hat daher angefangen, einen Winkel am Horizont herum zu tragen, um dadurch den Fehler bey Beurtheilung des Winkels auf dem Instrumente zu vermindern, und dadurch wird zugleich auch derjenige vermindert, der von der Eintheilung des Instrumentes herrührt.

XIII. Theorie der Folgen der Fehler.

§. 326.

Wir haben schon anfangs (§. 12.) angezeigt, daß Marinoni den größten Theil

Theil seines Werkes *de re ichnographica* angewandt, um diese Theorie nach dem Beyspiele, so Wolf hievon gegeben, vollständiger zu machen, und besonders in denen Fällen, die gemeiniglich bey Grundlegung der Felder vorkommen, durch eine Menge von Exempeln zu erläutern. Nach Durchlesung seines Werkes kann ich nicht sagen, ob er eingesehen habe, worauf hier das Hauptwerk ankömmt. Es scheinet überhaupt, als wenn die Absicht seiner bis zur Weitläuftigkeit ausführlichen Berechnung jeder einzelnen Fälle diese wäre, daß er dadurch die Ausmessung verbessern und genauer machen wollte, und dieses setzt nothwendig zum voraus, daß jeder Fehler bekannt sey. Sind sie aber bekannt, so wird die Verbesserung vor der Berechnung vorgenommen, und die Berechnung von den Folgen der Fehler wird in so ferne überflüßig.

§. 327.

Von den Mitteln die Größe eines jeden einzelnen Fehlers zu bestimmen, sagt er sehr wenig, und nach seinem Urtheile kömmt es darauf an: daß man sehen müsse, ob Linien, die von mehrern Ständen in ein Object gezogen werden, sich in einem und eben demselben Puncte auf dem Meßtischgen durchschneiden, ob die Umkreise der Figur durch die inwendig gemessenen Winkel, sich genau schliessen, und endlich überhaupt ob in dem entworfenen Grundrisse jede Theile die Lage haben, die man auf dem Felde gefunden. Dieses ist mit eben den Worten alles, was er hierüber sagt. Laßt uns mit wenigem anmerken, wie ferne es zureicht.

§. 328.

Einmal kan man leicht einräumen, daß wenn der Grundriß vollkommen richtig ist, derselbe sich auf unzählige Arten werde bewährt erfinden lassen. Jede Linie, so darauf gezogen wird, wird auf dem Felde einerley Größe haben, und durch einerley Ecken und Puncte gehen. Wird jede Linie auf dem Grundrisse verlängert, und ausgemessen wo sie eine andere durchschneidet, da muß der Punct des Durchschnittes auf dem Felde eben die Lage haben. Es ist also unstreitig, daß es an Mitteln nicht fehlt, den Grundriß mit dem Felde zu vergleichen, wenn man nach Verfertigung desselben ihn mit dem Felde gegen einander halten will, und eben dadurch wird gefunden, ob man jede Puncte auf ihre wahre Durchschnitte gezeichnet, oder ob durch eine Vermischung der Linien Fehler vorgegangen, die von einer Unachtsamkeit oder Verwirrung herrühren. Die Verbesserung der kleinen Fehler, die dem Auge entfliehen, wird dadurch lange nicht so leicht erreicht.

§. 329.

§. 329.

Man kann hierüber nachholen, was wir schon oben erinnert haben (§. 319. 320.) Die Summe der gemessenen Winkel am Umfang der Figur, die mit der Theorie übereinstimmen sollte, oder auch der Durchschnitt mehrerer Linien in einem Puncte bestimmt hiebey gar nichts. Kömmt diese Prüfung mit der Theorie nicht überein, so weiß man nur so viel, daß irgendwo ein Fehler seyn müsse, aber hieraus wird noch nicht entschieden, worinn er bestehe. Kömmt aber die Prüfung mit der Theorie überein, so läßt sich dennoch noch nicht schliessen, daß gar kein Fehler unterlaufen sey. Man setze, man habe die Winkel am Umfange eines Siebeneckes gemessen, und sie machen zusammen gerade 900. Grad. Kann man bey einem Instrumente für einen Fehler von 2 Minuten nicht gut stehen, welche Wahrscheinlichkeit wird wohl da seyn, daß sieben Winkel nach einander jeder vollkommen genau seyn gemessen worden, oder der Fehler bey jedem keine Secunde betrage.

§. 330.

Da überdiß jede Ausmessung, die man zur Prüfung der übrigen vornimmt, ihre eigene Unsicherheit hat, so ist klar, daß man dadurch nur Ungewißheit auf Ungewißheit häufet, und es ist möglich, daß eben die Linie, die man zur Prüfung des Durchschnittes zwoer andern zieht, den Fehler in die Figur bringe. Es ist also klar, daß der Grundriß, wenn er in allen Theilen richtig ist, sich auf unzählige Arten als richtig werde finden lassen, daß hingegen, wenn Fehler darinn sind, die Prüfung zur Entdeckung eines jeden Fehlers und seiner Größe, wenig helfe, sondern dabey andere Mittel müssen gebraucht werden.

§. 331.

Da also diese Entdeckung jeder Fehler nicht die Absicht von ihren Folgen ist, so haben wir bereits oben bestimmt, wozu diese Berechnung könne gebraucht werden, und diese Absichten sind 1° Die Bestimmung von der Zuverläßigkeit des Grundrisses und ihrem Grade. 2.° Die Auswahl der Umstände, welche die Theorie willkührlich läßt. und 3.° Die Vorsichtigkeit im Vor und Nachgeben. (§. 313. 314. 315.) Diese drey Absichten dehnen die Theorie von den Folgen der Fehler weiter aus, als sie Marinoni mitgenommen, weil er sich mit denen gewöhnlichsten Fällen, so bey Grundlegung eines Feldes vorkommen, begnügt hat, ungeachtet er die beyden erstern Absichten hin und wieder auch einmengt.

§ 332.

Bey Grundlegung einer Figur muß wenigstens eine Linie gemessen werden. Wenn man

man demnach nur eine ausmißt, so dehnt sich der Fehler, so dabey vorgeht auf alle übrige Linien aus, und diese werden in gleicher Verhältniß grösser oder kleiner, als sie seyn sollten. Die übrigen Fehler alle kommen schlechterdings von den Winkel her, die man in diesem Falle zur Bestimmung der Figur nothwendig gebrauchen muß. Werden aber mehrere Linien gemessen, so kann jede ihre eigene Fehler haben. Marinoni setzt, die Fehler seyn den gemessenen Linien proportional, und dieses ist desto wahrscheinlicher, je mehr die Lage der Linien und die Art, wie sie gemessen werden, einander ähnlich sind. Den Gebrauch der Meßkette findet er, wenigstens auf einer ebenen Fläche richtig, und bestätigt es durch angestellte Versuche. Ueberhaupt werden die Linien gemeiniglich zu groß. 1.° weil man nicht so genau auf der Linie bleibt, 2.° weil die Meßkette nicht genug angezogen wird.

§. 333.

Hingegen werden die Fehler bey den Winkeln desto ungleicher, ein Winkel kann mehr oder minder zu groß und zu klein gemessen werden. Wenn man aber nur den Grad der Zuverläßigkeit bestimmen will, so muß man für jeden Winkel den grösten unter denen annehmen, für welche man nicht gut stehen kann, und dieser richtet sich immer so

 wohl

wohl nach der Güte des Instruments, als nach der Schärfe des Auges. Von beyden kann man eine Probe machen, wenn man einen gleichen Winkel an gleichem Orte sehr viele male mißt, und den grösten und kleinsten so man findet, mit dem Mittel unter allen vergleicht. Was die verschiedene Farbe und die verschiedene Klarheit der Objecte hiebey thue, muß durch andere Versuche gefunden werden, dergleichen Hr. Prof. Mayer in den Commentariis der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Göttingen beschrieben, und von welchen wir die fernere Fortsetzung erwarten.

§. 334.

Da man hiebey nur diejenigen Fehler betrachtet, die von dem Mangel der Schärfe des Auges und des Instrumentes entstehen, so werden sie in Vergleichung der Seiten und Winkel als unendlich klein angesehen, oder welches hier gleich viel ist, die höhern Dignitäten derselben werden in der Rechnung weggelassen. Der Grund hievon ist dieser. Setzet, man wisse nicht ob eine Linie um ihren hundertsten Theil zu groß oder zu klein sey. Das Quadrat von diesem Theile ist $\frac{1}{10000}$ der Linie, und die höhern Dignitäten sind noch kleinere Theile. Wenn also auch der $\frac{1}{10000}$ Theil für sich betrachtet noch eine sichtbare Größe hätte, so muß er doch hier deswegen nichts geachtet werden, weil man noch in den $\frac{1}{100}$ Theilen zweifelhaft ist. Ich sage, zweifelhaft. Denn wüßte man gewiß, daß die Linie um $\frac{1}{100}$ zu groß wäre, so würde die Verbesserung vorgenommen, und man gebrauchte keine besondere Berechnung für die Folgen des Fehlers.

§. 335.

In so ferne also die höhern Dignitäten der Fehler können weggelassen werden, so wird die Rechnung der Differentialrechnung vollkommen ähnlich, und dadurch wird das Mittel die Folgen eines Fehlers, so weit sie eben so wie der Fehler selbsten beträchtlich, oder von gleichem Grade sind, zu bestimmen allgemein und leichte, weil man nur die Gleichung differentiiren darf. Wolf und Marinoni bedienen sich dabey der Figuren, ungefehr eben so, wie man sie bey wirklichen Differentialgrößen gebraucht. Sie sehen die Fehler in den Winkeln als unendlich klein, und die wahre Linie mit den falschen als parallel an. Diese Art ist aber nur bey den einfachen Fällen leichte. Muß man aber in einer Figur zugleich mehrere Fehler betrachten, die sich unter einander mengen, so wird die Figur und der Beweis verwirrter. Ueberdiß müssen dabey allzeit die Fälle unterschieden werden, wo der Fehler auf die eine oder andere Seite fällt, oder den Winkel oder die Linie

Linie grösser oder kleiner macht, als sie wirklich seyn sollten. Dieser Umweg, der dem Marinoni die Berechnung so vieler einzelnen Fälle verursacht, fällt bey der Buchstabenrechnung ganz weg, weil ihre Mechanische Einrichtung durch eine bloße Verwandlung der Zeichen alle mögliche Fälle vorstellig macht.

§. 336.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen werden wir nun alle mögliche Fälle, die bey einem Triangel vorkommen können, auf wenige allgemeine Classen bringen. Es ist aus der Trigonometrie bekannt, daß man aus drey Stücken desselben ein jedes der übrigen drey finden könne, und wenn man zwischen vier Stücken ihre Verhältniß sucht, alle mögliche Fälle durch drey allgemeine Formeln vorgestellt werden. Man gebraucht daher nur diese Formeln zu differentiiren, um auf eine eben so allgemeine Art die Verhältniß zwischen ihren Fehlern zu finden, weil die Fehler eines jeden Winkels und einer jeden Seite durch ihre Differentialien vorgestellt werden.

§. 337.

Man nenne daher die drey Seiten eines Triangels P, Q, R, ihre gegenüberstehenden Winkel p, q, r, so daß P und p, Q und q, R und r einander gegenüber liegen. Oder da hier

hier immer nur vier Stücke vorkommen, und unter diesen nothwendig eine Seite mit ihrem gegenüberstehenden Winkel ist, so nenne man diese Seite P, und den Winkel p. Da ferner noch eine Seite vorkömmt, so nenne man diese Q, ihren gegenüberstehenden Winkel, wenn er vorkömmt, heiße man q, oder die dritte Seite R, oder den ihr gegenüberstehenden Winkel r, so werdet ihr jedesmal einen von folgenden drey Fällen haben:

1.° P, Q, R, p.
2.° P, Q, p, r.
3.° P, Q, p, q.

§. 338.

Aus diesen Gründen läßt sich jeder Fall zeichnen. Um ferner die Verwirrung der Zeichen zu vermeiden, werden wir jeden Winkel spitzig annehmen, und die Formeln darnach einrichten. Und eben so werden wir die Differentialien positiv setzen, so daß wenn P, Q, R, p, q, r die wahren Seiten und Winkel sind sodann $P + dP$, $Q + dQ$ &c. die falschen vorstellen, oder umgekehrt, wenn jene die falschen sind, diese die wahren seyen. Diese beyde Arten der Vorstellung sind gleich zulässig, um aber dennoch alle Verwirrung zu vermeiden, werden wir durch P, Q, R, p, q, r immer die wahren Größen, und durch $P + dP$, $Q + dQ$ &c. die falschen verstehen, und folglich bey allen setzen, daß man sie zu groß

groß gemessen habe. Bey den Seiten trift dieses fast immer zu, und wenn auch die Winkel zu klein wären gemessen worden, so gebraucht es nichts anders, als daß man bey ihrem Differential in der Formel das Zeichen ändere. Wird das Zeichen bey dem Differential oder der Linie die man sucht, in der Rechnung negativ, so versteht sich von selbsten, daß der falsche Winkel oder die falsche Seite um so viel kleiner sey als die wahre. Endlich setzen wir, es sey in allen vier Stücken gefehlt. Ist eines oder zwey derselben richtig, so wird ihr Differential in der Formel $=0$ gemacht, und die Formel wird dadurch einfacher.

339.

Auf diese Art wird die Berechnung der Folge der Fehler auf drey allgemeine Formeln gebracht, welche wir folgendermaaßen finden werden. Für die Verhältniß zwischen den vier wahren Stücken des Triangels, die jedesmal vorkommen können, haben wir diese drey allgemeine Formeln.

Fig. 57.

$$1.^\circ \quad P^2 = Q^2 + R^2 - 2\,QR.\cos p$$

$$2.^\circ \quad P.\sin\,(p+r) = Q.\sin p$$

$$3.^\circ \quad P.\sin q = Q.\sin p$$

Und diese enthalten alle vorkommende Fälle, und jeden Fall, den man vor sich hat, kann man darinn finden, wenn man die vier Stücke nach den erstgegebenen Regeln benennet. (§. 337.)

§. 340.

Die Verhältniß zwischen ihren Fehlern findet man durch das Differentiiren, wobey wir anmerken, daß es nicht nöthig ist, das gesuchte Differentiale durch die übrigen drey Stücke auszudrücken, weil man die Seite oder den Winkel, dessen Fehler man berechnet, als bekannt annehmen kann. Daher sind die Formeln folgende:

$$1.^\circ\ P.dP = (Q - R\cos p).dQ + (R - Q\cos p).dR + QR\sin p.dp$$

$$2.^\circ\ \sin(p+r)\,dP + P.\cos(p+r).dr = \sin p.dQ + (Q.\cos p - P.\cos(p+r))\,dp$$

$$3.^\circ\ \sin q.\,dP + P.\cos q.\,dq = \sin p.\,dq + Q.\cos p.\,dp$$

aus diesen Formeln lassen sich nun jede besondere Fälle herleiten. Wir wollen etliche allgemeinere durchgehen.

1. Fall.

Wenn die Fehler der Seiten den Seiten selbst proportional sind.

§. 341.

Diesen Fall setzt Marinoni, und wir nehmen dabey an, daß die falschen Seiten auf eine proportionale Art grösser seyn, als die wahre. Hier ist also

$$P : dP = Q : dQ = R : dR$$

Es

Es ist aber zu bemerken, daß diese Voraussetzung nothwendig nur auf zwo Seiten zu erstrecken ist, und dadurch wird der Fall eingeschränkt. Denn die Seiten wobey man diese Verhältniß annimmt, müssen als gemessen, und daher als gegeben angesehen werden. Wenn man demnach in dem ersten Fall alle drey Seiten auf eine proportionale Art grösser oder kleiner setzte, so bliebe nichts zu suchen, als ein jeder Winkel, und es ist klar, daß dieser nothwendig eben so groß werde gefunden werden, als wenn man die wahre Grösse der Seiten angenommen hätte. Eben so wenn in diesem Fall der Winkel p richtig ist, wird die dritte Seite auf eine proportionale Art grösser. Und überhaupt kann man in der 2ten und 3ten Formel die Seiten lassen, wie sie sind, und daher ihre Differentialien $=0$ setzen, und man wird den Werth der Winkel und ihrer Fehler eben so leicht finden. Ja in diesen beyden Formeln werden die Glieder, wo die Differentialien der Seiten vorkommen von selbsten $=0$, sobald man $Q:dQ = P:dP$ setzt. Die Formeln, die man heraus bringt, sind folgende vier, weil man in dem ersten Falle zwo hat.

1.° $dP = \frac{P.dQ}{Q} + \frac{R.Q}{P} \sin p.dp$

2.° $\frac{Q.R}{P}.dP = (R - Q\cos p)dR + QR\sin p.dp.$

3.° $Q.\cos p.dp - P.\cos(p+r)dp = P.\cos(p+r).dr$

4.° $Q\cos p.\ dp = P.\cos q.\ dq.$

In der ersten dieser Formeln ist $Q:dQ = R:dR$, in der zweyten aber und in den beyden übrigen $P:dP = Q:dQ$.

II. Fall.

Wenn eine Seite richtig gemessen worden.

§. 342.

Diese Seite ist entweder P oder Q, denn in der ersten Formel (§. 340.) sind die Seiten Q und R gleichgültig. Es ist klar, daß man nur ihr Differential $=0$ setzen darf, und man wird aus jeder der drey Formeln zwo andere bekommen, die wir eben nicht hersetzen wollen.

III. Fall.

Wenn zwo Seiten richtig gemessen sind.

§. 343.

In den zwey letzten Formeln (§. 340.) hat man keine Wahl, weil nur die zwo Seiten P, Q vorkommen, in der ersten sind wieder zween Fälle, weil entweder Q, R oder P, Q richtig seyn können. Denn der dritte ist mit dem zweyten einerley, weil Q und R gleichgültig sind. Man setzt wiederum das Differentiale der richtigen Seite $=0$, und erhält dadurch

1.° $PdP = QR. \sin p. dp$

2.° $(Q \cos p - R)\, dR = QR \sin p. dp$

3.° $P \cos(p+r)\, dr = (Q \cos p - P. \cos(p+r))\, dp$

4. $P. \cos q. dq = Q. \cos p. dp.$

§. 344.

Die erste dieser Formeln verwandelt sich in folgende

$$dP = \frac{QR \sin p}{P} . dp$$

Nun ist

$$P : \sin p = R : \sin r$$

folglich

$$dP = Q. \sin r. dp.$$

Es ist aber $Q \sin r$ die Perpendicular, so aus dem Winkel p auf die Seite P fällt. Nennt man diese $= z$, so hat man

$$dP = z\, dp.$$

Drückt man den Fehler dp in Minuten aus, und setzt ihn $= n$, so ist der halbe Circul oder 60. 180° = 10800 Minuten zu n, wie 3,1415926 ... zu dp, folglich

$$dP = \frac{3,1415926.\, nz}{10800}$$

Hiedurch hat man den Fehler der Linie P in eben dem Maaße in welchem sie ausgemessen wird, wenn man den Fehler des Winkels p in Minuten weiß. Diese Regel hat Marinoni

rinoni

rinoni gegeben, und man kann sehr genau folgende dafür setzen

$$dP = \frac{4.\, n.\, z}{13751}$$

weil 13751 : 4 bey nahe wie 10800 zu 3,1415926 ist. Verlangt man sie nicht so genau, so wird folgende

$$dP = zn : 3438.$$

sehr wohl zutreffen, weil sie von der ersten nur wie $\frac{4}{13752}$ von $\frac{4}{13751}$ unterschieden ist. Hieraus sieht man, daß der Fehler mit der Perpendicular zunimmt welche auf die berechnete Seite fällt.

§. 345.

Man kann dergleichen Formeln leicht auf eine allgemeinere Art aus denen herleiten, die wir für alle Fälle gegeben. (§. 340.) Denn man sieht leicht, daß

$$\frac{Q - R. \cos p}{P} = \cos r$$

$$\frac{R - Q \cos p}{P} = \cos q.$$

$$\sin(p+r) = \sin q.$$

$$\cos(p+r) = -\cos q.$$

§. 346.

Wenn man diese Werthe in den 3 Formeln für die ihnen gleiche setzt, so erhält man

 1.° dP

1.° $dP = \cos r . dQ + \cos q . dR + R . \sin q . dp$
2.° $\sin q . dP - P . \cos q . dr = \sin p . dQ + R . dp$
3.° $\sin q . dP + P . \cos q . dq = \sin p . dQ + Q . \cos p . dp$

Alle Glieder dieser Gleichungen sind entweder Perpendicularen, oder die von denselben abgeschnittene Theile, oder sie können leicht in solche verwandelt werden. Drückt man die Fehler der Winkel dp, dq, dr, in Minuten aus, so gebraucht man eben die Proportionen, die wir vorhin gegeben haben. (§. 346.)

§. 347.

Diese Formeln auf den erst betrachteten 2ten Fall angewandt (§. 343.) geben

1°. $dP = R . \sin q . dp$
2°. $dR = - R . \tan q . dp$
3°. $R . dp = - P . \cos q . dr$
4°. $P . \cos q . dq = Q . \cos p . dp$

In diesen Formeln kommen mehr als vier Stücke des Triangels vor, weil man bey Berechnung der Folge der Fehler den ganzen Δ als bekannt annehmen kann. Da aber die Differentialien ungeändert geblieben, so muß aus diesen erkannt werden, aus welchen Stücken der Fehler berechnet wird, weil diese Formeln eigentlich die Verhältniß zwischen den Fehlern vorstellen.

§. 348.

Die Folgen der Fehler werden jedesmal entweder für einen Winkel oder für eine Seite berechnet. Die für die Winkel bleiben bey grössern und kleinern Triangeln einerley, wenn die Seiten proportional sind. Hingegen wächßt der Fehler einer Seite zugleich mit der Seite, und es ist klar, daß man denselben fast immer nur in Vergleichung mit seiner Seite betrachtet, und nothwendig betrachten muß, wenn man den Grad der Zuverläßigkeit dadurch bestimmen will. Denn da ist die Frage auf wie viele 100 oder 1000 Schuhe man einen Schuh fehle, oder wegen des Fehlers ungewiß sey.

§. 349.

Wenn man demnach nur eine Seite annimmt, und die übrigen durch die Winkel bestimmt, so kann man diese Seite = 1 setzen, man mag dadurch die wahre oder falsch gemessene verstehen. Denn die Fehler, die von den Winkeln herrühren, werden dadurch nicht geändert, und der, so von der angenommenen Seite herkömmt, ändert sich auf eine proportionale Art, weil es hier eben so viel ist, als wenn man einen falschen Maaßstab angenommen hätte.

§. 350.

Hiedurch erhalten wir in der zweyten Formel (§. 346.) zween Fälle, weil die angenommene Seite P oder Q seyn kann. In der dritten ist es gleichgültig, welche Seite man annimmt.

annimmt. Die erste Formel kömmt hier nicht vor, weil man darinn wenigstens zwo Seiten als bekannt annehmen muß. Das Differential der angenommenen Seite wird $= o$ gesetzt. Und so haben wir

1.° $-P.\cos q.dr = \sin p.dQ + R.dp$

2.° $\sin q.dP - P.\cos q.dr = R.dp$

3.° $P.\cos q.dq = \sin p.dQ + Q\cos p.dp$

§ 351.

In der zweyten Formel sieht Marinoni die Seite Q als eine Standlinie an, welche mit der auszumessenden Seite P einen gegebenen Winkel r macht, und fragt, wo man den Winkel p messen, oder wie groß man die Standlinie Q annehmen müsse, damit man bey gleichem Fehler, den man bey Ausmessung des Winkels p begeht, dennoch die Linie P am genauesten finde? Diese Aufgabe haben wir oben (§. 182.) auf eine andere Art aufgelößt. Sie läßt sich aber auch aus der gegenwärtigen zweyten Formel auflösen.

§. 352.

Es ist klar, daß hier r als genau gemessen angenommen wird, folglich wird $dr = o$, und die Formel einfacher

$$\sin q.dP = R.dp$$

oder

$$dP = \frac{R.dp}{\sin q}$$

Nun

Nun ist $R : \sin r = P : \sin p$

folglich

$$dP = \frac{P.\sin r.dp}{\sin p.\sin q}$$

Da nun P, sin r und dp als beständig angesehen werden, so wird dP desto kleiner seyn, je grösser das Product aus sin p, und sin q ist. Nun ist $p = 180° - r - q$, und $180° - r$ beständig, folglich

$$ddP = o = - \frac{P\sin r.dp.\cos p.dp}{\sin p.^2 \sin q}$$

$$- \frac{P.\sin r.dp.\cos q.dq}{\sin q.^2 \sin p}$$

folglich

$$\frac{\cos p.dp}{\sin p} = - \frac{\cos q.dq}{\sin q}$$

und da

$$dp = -dq.$$

so hat man

$$\cos p : \sin p = \cos q : \sin q$$

folglich

$$p = q.$$

Daher muß der Triangel gleichschenklicht, und die Standlinie Q der auszumessenden Linie P gleich seyn.

§. 353.

Wenn man derowegen vermittelst der Winkel p, r an der Standlinie Q beyde Seiten P, R am genauesten messen will, so müssen wegen der Seite P die Winkel q, p, und wegen der Seite R die Winkel q, r einander gleich und folglich der Triangel gleichseitig seyn. Daher werden die Seiten R, P bey gleichen Fehlern in den Winkeln r, p desto genauer gefunden, je weniger alle drey Seiten von einander verschieden sind.

§. 354.

Will man hingegen nur die Seite P genau wissen, so muß die Standlinie Q=P seyn, und je kleiner in diesem Fall der Winkel r ist, desto genauer wird man bey gleichem Fehler des Winkels p die Seite P finden. Denn da

$$dP = \frac{P.\sin r.\, dp}{\sin p.\sin q}$$

und in diesem Falle p=q ist, so ist sin r = sin 2p, folglich

$$dP = \frac{P.\sin 2p.\, dp}{\sin p^2} = 2P.\, dp.\cot p$$

Daher ist offenbar, daß sich der Fehler wie die Cotangente der Winkel p, q vergrössert, und folglich wie die Tangente des halben Winkels r abnimmt.

§. 355.

§. 355.

Wenn man aber P und r annimmt, und will vermittelst des Winkels p den Abstand Q am genauesten finden, so muß p ein rechter Winkel seyn. Hier gilt die erste Formel (§. 350.)

$$-P.\cos q.\, dr = \sin p.\, dQ + R dp$$

und dr wird = 0, folglich

$$-dQ = \frac{R dp}{\sin p}$$

Nun ist R = P. sin r : sin p, folglich

$$-dQ = \frac{P.\sin r.\, dp}{\sin p^2}$$

Es ist aber p allein veränderlich, folglich der Fehler dQ desto kleiner, je grösser das Quadrat des Sinus von p ist, daher am kleinsten, wenn p = 90 Graden wird.

§. 356.

Da dieser Fehler von dem Sinus des Winkels r abhängt, so ist derselbe wiederum desto kleiner, je kleiner r, und überhaupt je kleiner R und je grösser der Sinus von p ist.

§. 357.

Hat man die Seite P richtig, und man will die Winkel q und p finden, durch welche die Seite Q am genauesten bestimmt wird, so gilt die dritte Formel (§. 350.)

$$dQ = \frac{P.\cos q.\,dq}{\sin p} - \frac{Q\cos p.\,dp}{\sin p}$$

Nun ist

$$P : \sin p = Q : \sin q.$$

folglich

$$dQ = Q(\cot q.\,dq - \cot p.\,dp)$$

Daher ist der Fehler dQ desto kleiner, je weniger die Winkel q, p von einem rechten Winkel verschieden sind, folglich bey gleichschenklichten Triangeln, in welchen der Winkel r sehr klein ist am kleinsten, und der Fehler wird bey gleichschenklichten $\triangle$ vollends $= 0$, wenn $dq = dp$, oder beyde Winkel um gleich viel zu groß oder zu klein sind, welches für sich klar ist. Ist aber der eine Fehler in den Winkeln positiv der andere negativ, so wird $dq = -dp$, folglich

$$dQ = Q(\cot q.\,dq + \cot p.\,dp)$$

in diesem Falle, wie auch in demjenigen, wo zwar beyde Fehler auf gleiche Seite fallen, aber der eine Winkel stumpf ist, wird der Fehler schlechthin kleiner, wenn beyde Winkel p, q, von 90 Graden wenig unterschieden sind.

§. 358.

Wenn der Fehler, so in einer Seite zu besorgen ist, eine gegebene Verhältnis zu der

Seite

Seite haben, oder diese Verhältniß nicht überschreiten soll, so entsteht die Frage, wie genau das Instrument seyn müsse, womit man die Winkel zureichend richtig messen könne, um keinen grössern Fehler zuzulassen. Hier wird die Seite, so man in der Berechnung zum Grunde legt, als richtig angenommen, weil dadurch höchstens nur die ganze Figur grösser oder kleiner, und daher nur durch die Fehler in den Winkeln entstaltet wird. Sodann, da man hier nur den Fehler berechnet, der zu besorgen ist, und folglich die Frage auf die völlige Zuverläßigkeit des Instrumentes ankömmt, so werden in beyden Winkeln die Fehler einander gleich gesetzt, weil man in beyden gleich viel fehlen kann. Und endlich werden sie, weil sie eben so leicht den Winkel zu groß als zu klein machen können, auf der Seite betrachtet, auf welcher der Fehler der Seite am grösten wird, daher müssen alle Zeichen positiv werden. Uebrigens kömmt hier keine Auswahl der Umstände in Betrachtung, sondern der ganze Triangel wird als vorgegeben angenommen, folglich haben die Winkel ihre bestimmte Grösse, und die Frage ist nur, zu bestimmen, wie genau sie müssen gemessen werden, damit die vorgegebene Seite die verlangte Richtigkeit habe.

§. 359.

§. 359.

Wir haben hier eben die Formeln wie §. 350. weil das Differential der angenommenen Seite $= 0$ wird. Man setze demnach in der ersten $dQ = mQ$, in der andern $dP = mP$, in der 3ten $dQ = mQ$, so ist

1.° $-mQ = (P \cos q\, dr + R dp) : \sin p$

2.° $+mP = (R dp + P \cos q.\, dr) : \sin q$

3.° $+mQ = (P \cos q.\, dq. - Q \cos p.\, dp) : \sin p$

In der ersten und zweyten dieser Formeln wird $dr = dp$ gesetzt, in der dritten aber $dp = -dq$. so lange die Winkel p und q kleiner als 90 Grade sind. Ist aber einer derselben stumpf, so wird sein Cosinus negativ, und sein Fehler muß ebenfalls negativ genommen werden, damit der Fehler der Seite, den man berechnen will, immer am grösten werde.

§. 360.

Wir haben demnach

1.° $$-mQ = \frac{(P.\cos q + R)\, dp}{\sin p}$$

2.° $$+mP = \frac{(P.\cos q + R)\, dp}{\sin q}$$

3.° $$+mQ = \frac{(P \cos q + Q \cos p)\, dp}{\sin p}$$

folglich die Größe des Fehlers im Winkel

1.° $dp = mQ \sin p : (P \cos q + R)$

2.° $dp = mP. \sin q : (P. \cos q + R)$

3.° $dp = mQ \sin p : (P \cos q + Q \cos p)$

Die Glieder dieser Formeln sind wiederum alle entweder Perpendicularen oder die von denselben abgeschnittene Theile der Seiten, auf welche sie fallen.

§. 361.

Will man den Fehler dp in Minuten haben, so setze man, er sey n Minuten, und man findet eben so wie oben (§. 344.)

$$dp = \frac{4}{13751} . n \text{ oder } = \frac{n}{3438}$$

folglich

$$n = \frac{13751.\, dp}{4} = 3438.\, dp$$

§. 362.

Verticale Triangel, von welchen die eine Seite horizontal, und die andere auf dem Horizonte senkrecht ist, haben dieses besonders, daß man den rechten Winkel nothwendig als genau annehmen kann. Sodann kömmt die Hypothenuse sehr selten vor, und man mißt nur einen Winkel und einen Cathetum. Dieses geht nemlich an, so lange man die Krümmung der Erdfläche und der Lichtstralen als unmerklich annehmen kann.

kann. Denn widrigenfalls hat man keinen rechtwinklichten Triangel, und man muß den Mittelpunct der Erde mit in Betrachtung ziehen, und die Stralenbrechung in die Rechnung einmengen. Wir bleiben hier bey dem einfachern Fall, und da man vier auf einander folgende Stücke des Triangels hat, so kömmt von den allgemeinen Formeln (§. 340) die zweyte vor, in welcher $r = 90$ Gr. wird, folglich $dr = 0$, $\sin(p+r) = \cos p$, $\cos(p+r) = -\sin p$. Werden diese Veränderungen in der Formel gemacht, so ist einfacher

$$\cos p . dP = \sin p . dQ + (Q \cos p + P \sin p) dp$$

oder noch kürzer

$$dP = \text{tang } p . dQ + (Q + \text{tang } p . P) dp$$

§. 363.

Diese Gleichung drückt also die Verhältniß zwischen den Fehlern in einem verticalen rechtwinklichten Triangel aus, wenn von demselben nur die Catheti p, Q und einer der spitzen Winkel in die Rechnung kommen.

§. 364.

Setzt man, die gemessene Seite sey richtig, so wird dP oder $dQ = 0$, folglich hat man zween Fälle

$$-dQ = \left(\frac{Q + P \text{ tang } p}{\text{tang } p} \right) dp$$

$$+dP = (Q + P . \text{tang } p) dp$$

Es

Es ist aber $P = Q . \text{tang } p$, folglich $Q + P \text{ tang } p = Q . \sec p^2$, daher hat man

$$\frac{Q + P . \text{tang } p}{\text{tang } p} = \frac{Q . \sec p^2}{\text{tang } p} = \frac{2 Q}{\sin 2 p}$$

und die beyden Formeln werden einfacher

$$-dQ = 2 Q . \text{cosec } 2 p . dp = \frac{2 Q \, dp}{\sin . 2 p}$$

$$+dP = Q \sec p^2 . dp$$

§. 365.

Will man wiederum wissen, wie genau der Winkel p soll gemessen werden, damit die gesuchte Seite bis auf einen bestimmten kleinen Theil zuverläßig sey, so setze man wie vorhin (§. 359.) $dP = m . P$ und $dQ = m Q$, so ist in diesen letztern Formeln

$$-m Q = 2 Q dp : \sin 2 p$$
$$+m P = Q dp : \cos p^2$$

folglich

$$-dp = \tfrac{1}{2} m \sin 2 p$$
$$+dp = m . \cos p^2 . P : Q = \tfrac{1}{2} m \sin 2 p .$$

Die Genauigkeit des Winkels muß daher in beyden Fällen auf gleiche Art gefunden werden, und sie wird einerley seyn, wenn man die Verhältniß jeder Seite zu ihrem Fehler gleich setzt. Der Fehler dp, den man hiedurch findet, wird eben so wie vorhin (§. 361.) in Minuten eines Grades verwandelt. Bey gleicher Verhältniß wächst sie wie der Sinus

des

des doppelten Winkels p, und daher ist sie am vortheilhaftesten, wenn $p = 45°$ ist.

XIIII. Folgen der Fehler in zusammen gesetztern Umständen.

§. 366.

Die Theorie der Fehler in einem jeden Triangel, die wir im vorhergehenden Abschnitte auf drey allgemeine Formeln gebracht, und aus diesen die Zuverläßigkeit der Ausmessung und die Genauigkeit der Instrumente geprüft haben, enthält die Gründe zu Berechnung der Fehler und ihrer Folgen in jeden andern Figuren, weil diese sämtlich in Triangel können aufgelößt, und gemeiniglich durch Triangel, deren eine Seite die Standlinie ist, bestimmt und in Grund gelegt werden. Die Anwendung dieser Gründe auf solche Figuren hat also keine Schwürigkeit, und das einige dabey ist, daß sie weitläufstiger wird weil jeder Triangel, dessen Genauigkeit man prüfen will, besonders muß berechnet werden. Alle Winkel und Seiten der Figur werden als gemessen oder berechnet angenommen und man gebraucht weiter nichts als die Fehler zu bestimmen, die man für jede gemessene Winkel und Seiten annehmen will. Denn wir haben schon oben erinnert, daß man dabey nichts anders als die Prüfung der Zuverläßigkeit zur Absicht haben könne, weil man keine Berechnung von den Folgen der Fehler nöthig hat, so bald man weiß, wie groß jeder Fehler in der Ausmessung ist, und überdiß die Größe eines jeden Fehlers aus den Folgen derselben nicht bestimmt, sondern höchstens nur gemuthmaßet wird.

§. 367.

Dieses sind also die Fälle nicht, die wir hier besonders zu untersuchen haben, weil ihre Berechnung schlechthin auf die Triangel reducirt wird, von welchen man so viele Stücke ausgemessen, als zu Bestimmung der übrigen nöthig sind. Man kann sie sämtlich als die directen Aufgaben der Geometrie ansehen, welchen die umgekehrten entgegen gesetzt sind, die immer etwas räthselhaftes an sich zu haben scheinen. Von diesen haben wir in den vorhergehenden Abschnitten viele angebracht, und nach der Kritik, die wir (§. 310.) darüber angestellt, finden sich mehrere darunter, die sich in Absicht auf ihre Genauigkeit betrachten lassen, und daher eine Berechnung von den Folgen ihrer Fehler nicht überflüßig machen. Dahin gehören diejenigen, die wir bey der Mittagslinie, bey entfernten Gegenständen, bey den verticalen Flächen, bey viereckichten Figuren und geraden Linien aufgelößt haben.

§. 368.

Die Methode, so wir bey den Triangeln zur Berechnung der Fehler gebraucht haben, ist allgemein. Da man die höhern Dignitäten der Fehler weglassen kann (§. 334.) so wird diese Berechnung auf ein bloßes Differentiiren reducirt, und die Verhältniß, so man zwischen den Differentialien findet, ist eben die, die man für die Fehler annehmen kann. Hat man demnach die Gleichung für die wirklichen Linien und Winkel der fürgegebenen Figur gefunden, so ist die Arbeit für die Fehler bald zu Stande gebracht, weil man diese Linien und Winkel nur als veränderliche Grössen ansehen und ihre Differentialien nehmen darf. Nun kann eine jede Gleichung differentiirt werden. Folgende Betrachtungen werden diese Methode brauchbarer und allgemeiner machen. Sie gründen sich sämtlich auf die Natur der Differentialrechnung.

§. 369.

In einer differentiirten Gleichung sind so viele Glieder als man Differentialien hat, weil man im gegenwärtigen Falle dieselben als die Haupttheile der Gleichungen und die endlichen Größen als ihre Coefficienten ansehen kann. Da man ferner nur einmal differentiirt, so sind die Differentialien alle vom ersten Grade, und keines wird durch ein anderes multiplicirt.

§. 370.

§. 370.

Sodann, weil wir hier die Winkel und Seiten der Figur, welche differentiirt werden, als gegeben annehmen, so hat man nicht nöthig die Differentiation so anzustellen, daß man das gesuchte Differential allein erhalte, welches sonsten die Rechnung öfters sehr weitläuftig macht, sondern man kann sich des kürzesten Weges bedienen, um zu den Differentialien zu gelangen. So z. E. wenn man die Gleichung

$$xy + x^2 + by^3 + c = 0$$

hätte, so ist es genug, wenn man sie schlechthin so differentiirt

$$xdy + ydx + 2xdx + 3by^2dy = 0$$

und die Glieder, die gleiche Differentialgrößen haben, zusammen bringt.

$$(x + 3by^2)dy + (y + 2x)dx = 0$$

Denn x, y, b werden hier als gegeben angenommen und man sucht nur die Verhältniß zwischen den Fehlern dy und dx.

§. 371.

Hieraus folgt, daß wenn man mehrere Gleichungen hat, es zu Berechnung der Fehler nicht nöthig sey dieselben erst aufzulösen, weil sie durch die Auflösung fast immer verwickelter werden. Jede wird für sich differentiirt, und da die herauskommenden

Differen-

Differentialgleichungen alle vom ersten Grade sind (§. 369.) so lassen sich die Differentialgrößen der Linien und Winkel, die man nur als Hülfsmittel angenommen, auf eine leichte und nothwendig mögliche Art wegschaffen.

§. 372.

Wenn demnach die Gleichungen für die Linien und Winkel selbst verwickelt wären, daß man sie nicht einmal auflösen könnte, so können dennoch allemal ihre Differentialgleichungen, die man daraus findet, aufgelößt werden, und in so ferne ist die Berechnung von den Verhältnissen zwischen den Fehlern leichter und in Absicht auf ihre Möglichkeit weiter ausgedehnt, als die Berechnung der Größen selbsten, zu denen sie gehören.

§. 373.

Endlich sind die differentiirten Gleichungen so beschaffen, daß die Folgen, die ein jeder Fehler nach sich zieht, sich mit den Folgen der übrigen Fehler nicht vermischen, weil jede nur mit dem Fehler multiplicirt sind, zu dem sie gehören. Sie können daher als seine Coefficienten angesehen werden, und alle Coefficienten eines Fehlers zusammen genommen und mit demselben multiplicirt, geben die Summe aller Folgen desselben. Wiederum die Folgen der übrigen Fehler durch die Coefficienten desjenigen, den man sucht, dividirt, geben den Belauf dieses Fehlers an sich betrachtet.

trachtet. Ein Fehler verschwindet mit allen seinen Folgen, wenn das Differential, so ihn vorstellt, $= 0$ gesetzt wird.

§. 374.

Nach diesen vorläufigen allgemeinen Betrachtungen werden wir nun verschiedene von den obigen Aufgaben besonders vornehmen, und die Berechnung der Folgen ihrer Fehler brauchbar machen, und als eben so viele Beyspiele dieser Regeln vorstellen.

§. 375.

Die erste derselben sey diejenige, die wir §. 109. auf verschiedene Arten aufgelößt haben. Die Frage ist: Aus dem gegebenen Triangel ABC und den in D gemessenen Winkeln ADB, BDC die Lage des Standes D zu finden. In der vierten Auflösung haben wir folgende Stücke gebraucht Fig. 13.

$$AB = A \qquad ADB = a$$
$$BC = B \qquad BDC = b$$
$$BD = z \qquad ABC = c$$

und daraus gefunden

$$\sin a : A = \sin x : z$$
$$\sin b : B = \sin(360 - a - b - c - x) : z$$

§. 376.

Wenn wir nun setzen der Triangel ABC sey genau angegeben, so wird A, B, c als beständig

ständig angesehen, hingegen werden wir setzen die beyden Winkel a, b, so man in D gemessen, seyn zu groß, daß also die falschen $a + da$, $b + db$ seyen. Es muß folglich in diesen Gleichungen a, b, x, z differentiirt werden. So haben wir

$$z.\sin a = A \sin x$$
$$z.\sin b = B.\sin(360 - a - b - c - x)$$

und hieraus die Differentialgleichungen

$$\sin a.\,dz + z\cos a.\,da = A.\cos x.\,dx.$$
$$\sin b.\,dz + z.\cos b.\,db = -B.\cos(360 - a - b - c - x).d(a + b + x)$$

Hieraus findet man, wenn Kürze halber $360 - a - b - c = d$ gesetzt wird,

$$dx = \frac{z(\sin b.\cos a.\,da + \sin a.\cos b\,db) - B.\,\sin a.\cos(d - x).(da + db)}{A.\sin b.\cos x + B.\sin a.\cos(d - x)}$$

Da die ganze Figur als berechnet oder construirt angenommen wird, so ist auch z und x so viel als gegeben, und der Fehler dx, dem der Winkel $x = BAD$ unterworfen ist, oder seyn kann, wird hiedurch gefunden. Aus diesem findet man den Fehler der Linie $z = BD$ durch die erste Differentialgleichung, weil

$$dz = \frac{A.\cos x.\,dx - z.\cos a.\,da}{\sin a}$$

ist. Die Fehler der übrigen Linien und Winkel werden durch die Regeln des vorhergehenden Abschnittes gefunden, weil man nunmehr in jedem der △ DAB, DBC genugsame Data hat. So z. E. hat man in dem ersten die Seite AB richtig, und die Winkel BDA und BAD mit ihren Fehlern da, dx. Sucht man daher die Seite AD, so hat man den Fall von vier auf einander folgenden Stücken, und gebraucht die zweyte Formel des 340 oder 346. Absatzes. Denn nach der Benennung des §. 337. ist

$$AB = P \qquad ADB = p$$
$$AD = Q \qquad BAD = r.$$

und weil AB richtig ist, so wird $dP = 0$. In dem andern △ BCD, hat man die Seite BC richtig, die Seite BD und den Winkel BDC mit ihren Fehlern db, dz. Sucht man nun die dritte Seite DC, so ist (§. 337.)

$$BC = P \qquad BDC = p$$
$$BD = Q$$
$$CD = R$$

folglich hat man die erste Formel der §. 340. oder §. 346, und dP wird wiederum $= 0$.

§. 377.

Wenn D ein solcher Ort ist, welcher in den Riß gebracht werden muß, so bleibt in dieser Aufgabe keine Auswahl der Umstände, als in so ferne man in D noch andere Oerter sieht, welche entweder schon in dem Risse sind, oder ohne Rücksicht auf den Ort D darein gebracht werden sollen. In diesem Fall aber ist das sicherste, wenn man in D noch mehrere Winkel mißt. Uebrigens kommt dennoch dabey

dabey die Frage vor, von welchen man, bey gleichen Fehlern in den gemessenen Winkeln, die gröste Zuverläßigkeit von der Lage des Puncts D zu gewarten habe?

§ 378.

Um diese Frage und zugleich noch eine andere aufzulösen, wollen wir den Fall umkehren. Wir setzen nemlich, man habe nur die drey Oerter A, B, C, und D sey kein Ort, der nothwendig in den Riß kommen müßte, sondern nur ein Stand, den man um noch andere Winkel auszumessen annimmt, und wobey noch etwas willkührliches bleibe.

§. 379.

Man befinde sich demnach auf der Linie AD, und die Frage ist, wo man den Winkel ADC auf derselben messen müsse, um die Entfernungen AD, DC am sichersten zu bestimmen. Die Seite AC ist gegeben, und da wir setzen AD habe eine bestimmte Lage, so nehmen wir auch den Winkel CAD als gegeben an. Da nun der Winkel ADC muß gemessen werden, so haben wir vier auf einander folgende Stücke, und nach der Benennung §. 137. ist

AC = P ADC = p
AC = Q CAD = r

§. 380.

§. 380.

Ferner ist dP = dr = o, und da Q am genauesten seyn soll, so haben wir den Fall des §. 355. daher muß p = ADC ein rechter Winkel seyn, und es ist

$$-dQ = \frac{R.\ dp}{\sin\ p}$$

Da nun (§. 337.) R = CD ist, so ist der Fehler dQ oder der Linie AD geringer, je näher D bey C liegt, und je näher der Winkel ADC einem rechten kömmt.

§. 381.

Da nun aber eben diese Frage von der Seite DC vorkömmt, so muß hinwiederum AD am kleinsten seyn. Hieraus erhellet, daß man aus der ersten Betrachtung dem Winkel ADC 90 Grad geben, und vermöge der andern die beyden Seiten AD, CD einander gleich machen müsse. Dehnt man diese Betrachtung auch auf die Seiten AB, BC aus, so sieht man, daß zweyerley Auflösungen möglich sind. Nach der ersten müssen die Linien AD, BD, CD gleich groß werden, und folglich D in dem Mittelpuncte des Circuls liegen, dessen Umkreiß durch A, B und C geht. Nach der andern aber müssen wenigstens zween von den Winkeln ADB, ADC, BDC rechte Winkel seyn, und folglich muß D da liegen, wo die auf AB, BC, AC als auf Dia-

 metern

metern beschriebene Circul einander durchschneiden, oder welches einerley ist, wo die aus jedem Winkel des △ ABC auf die gegenüber stehende Seite gezogene Perpendicular hinfällt. Die vortheilhaftesten Umstände sind also, wenn AB = BC und ABC = 90° ist, und D mitten auf AC liegt. Wo man also eine Auswahl der Objecte A, B, C hat, muß man solche wählen, die diesen Umständen am nächsten kommen. Und da sich die Fehler in den Linien AD, BD, CD zugleich mit denselben vergrössern, so wird die Lage des Standes D, für sich betrachtet, genauer bestimmt, wenn man unter ähnlichen Umständen nähere Objecte wählt. Uebrigens ist leicht einzusehen, daß in dieser Aufgabe viel unbestimmtes zusammen kömmt, weil die Lage des Puncts D der Länge und Breite nach geändert werden kann, und man zu Bestimmung derselben nothwendig zweyerley Data annehmen muß.

§. 382.

Wir haben schon (§. 110.) erinnert, daß diese Aufgabe gar keinen Werth giebt, wenn alle vier Oerter A, B, C, D in dem Umkreyse eines gleichen Circuls liegen. Man kann sich in dem Stande D hievon versichern, wenn man den Winkel ADC mißt. Denn dieser muß mit dem gegebenen Winkel ABC 180 Grad machen, wenn alle vier Oerter A, B, C, D in einem Circul liegen sollen. Aus gleichen Gründen wird die Lage des Puncts D weniger genau bestimmt werden, je näher die Summe der Winkel ABC + ADC bey 180 Graden ist. Und aus der zweyten Construction, die wir §. 109. gegeben haben, erhellet, daß der △ ABC eine vortheilhaftere Lage hat, wenn der Punct B in dem △ ADC und näher bey D liegt.

§. 383.

Setzt man die Summe der Winkel ADB + BDC oder der ganze Winkel ADC sey richtig, so läßt sich nach der angeführten Construction der Circul ADCE genau ziehen. Und da der Bogen AE = 2 ADB gemacht wird, so ist klar, daß der Fehler des Winkels ADB sich auf diesem Bogen verdoppelt. Ist demnach der Punct E irrig, so wird der Fehler, weil man durch B und E die Linie BED ziehen muß, in D gebracht, und in der Verhältniß, wie BE zu BD vergrössert. Hieraus ist offenbar, daß wenn er geringer werden soll, B näher bey D als bey E liegen müsse. Wenn man demnach unter mehrern Objecten A, B, C drey wählen kann, so lassen sich die vortheilhaftesten auch aus dieser Betrachtung bestimmen. Die Summe der Winkel ABC + ADC muß von 180° sehr verschieden seyn, sie mag nun grösser oder kleiner seyn als 180.°

§. 384.

§. 384.

So lange man den Winkel ADC richtig annimmt, muß D nothwendig in dem Circul ADCE liegen, und seine Lage ist nur einer einfachen Unrichtigkeit unterworfen. Ist aber dieser Winkel auch unrichtig, so hat auch dieser Circul eine falsche Lage, und der wahre Punct D kann außer oder innerhalb demselben liegen. Hier ist klar, daß der Fehler desto grösser wird, je kleiner der Winkel ADC ist, weil dadurch die Seiten AD, CD sehr verlängert werden.

§. 385.

In der Aufgabe des §. 111. wodurch man mit Hülfe der Mittaslinie die Lage von sechs Oertern auf einmal findet, werden die vortheilhaftere Umstände auf eine ähnliche Art bestimmt. Da die Abweichungen von der Mittagslinie ohne viele Mühe nicht genau gefunden werden können, und man gemeiniglich dazu nur den Compaß oder die Azimuthaluhren gebraucht, so werden wir an-
Fig. 13. nehmen, die Winkel CFB, CFA, CEB, CEA, CDB, CDA werden ungleich genauer gemessen als die Abweichung dieser Linien von der Mittagslinie. Da man nun bey merklich grössern Fehlern die kleinern weglassen kann, so
Fig. 17. setzen wir, die Circul ADC, AFC, AEC seyn genau gezogen, und die Puncte d, e, f auf denselben haben ihre richtige Lage. Da nun hier die merklichern Fehler allein auf die Winkel dBe, eBf fallen, so wird die Bestimmung der zuverläßigsten Lage der Oerter A, B, C, D, E, F auf die vorige Aufgabe reducirt, und man wird ebenfalls finden, daß der Ort B vortheilhafter innerhalb dem Abschnitte des Circuls ADC liegt, wenn der entferntere Stand E zwischen die beyden andern fällt. Es wäre aber umgekehrt richtiger, wenn E auf dem Circul D, und D auf dem Circul E läge, oder die drey Stände F, ε, δ wären, denn in diesem Falle würde B ausserhalb den Circuln eine vortheilhaftere Lage haben. Ueberhaupt müssen die Winkel in B grösser seyn, wenn der Fehler unmerklicher werden soll.

§. 386.

Die Folgen der Fehler, werden hier nach der allgemeinen Methode berechnet. Wir haben (§. 116.) die beyden Gleichungen

$$\sin k(\cot k - \cot y) = \frac{\sin b.\ \sin c.\ \sin g}{\sin a.\ \sin d.}.(\cot g + \cot x)$$ Fig. 18.

$$\sin l(\cot l + \cot y) = \frac{\sin c.\ \sin f.\ \sin h}{\sin d.\ \sin e}.(\cot h - \cot x)$$

Da nun a, b, c, d, e, f hier als richtig angesehen werden, so setzen wir Kürze halber

$$\sin b.\ \sin c : \sin a \sin d = H$$
$$\sin c.\ \sin f : \sin d \sin e = I$$

folglich

$$\cos k - \sin k . \cot y = H\,(\cos g + \sin g . \cot x)$$
$$\cos l + \sin l . \cot y = I\,(\cos h - \sin h . \cot x)$$

Diese Gleichungen differentiirt geben

$$+\sin k . dk + \cos k . \cot y . dk - \frac{\sin k\, dy}{\cos y^2} = H\left(\sin g . dg - \cos g . \cot x\, dg + \frac{\sin g . dx}{\cos x^2}\right)$$

$$\sin l . dl - \cos l . \cot y . dl + \frac{\sin l . dy}{\cos y^2} = I\left(\sin h\, dh + \cos h . \cot x\, dh - \frac{dx . \sin h}{\cos x^2}\right)$$

Es ist aber

$$g + a = c + m$$
$$k + d = b + m$$
$$h + c = e + n$$
$$l + f = d + n$$

folglich

$$dg = dK = dm$$
$$dh = dl = dn$$

und daher

$$(\sin k + \cos k \cot y - H \sin g + H \cos g \cot x)\, dm = \frac{\sin k\, dy}{\cos y^2} + \frac{\sin g\, dx}{\cos x^2}$$

$$(\sin l - \cos l \cot y - I \sin h + \cos h \cot x)\, dn = -\frac{\sin l\, dy}{\cos y^2} - \frac{\sin h\, dx}{\cos x^2}$$

Durch diese Gleichungen findet man demnach die Verhältniß zwischen den Fehlern der Winkel x, y, m, n und es wird darum gesetzt die beyden Winkel in B seyn zu groß gemessen worden, widrigenfalls muß man dm oder dn oder beyde negativ machen.

§. 387.

Laßt uns noch die Aufgabe prüfen, auf die wir fast alle übrige von den verticalen Linien

Linien und Flächen gegründet haben. Alles Fig. 26. sey wie §. 183. Man nenne

$$AC = p \qquad ACD = \omega$$
$$DB = Q \qquad DCB = \phi$$

so hat man (§. cit.)

$$P . \sin \phi = Q . \cos\omega . \cos(\omega + \phi)$$

Wir nehmen hier an BD sey richtig gemessen, weil wir diese Höhe in den meisten Aufgaben ungemessen gebrauchen, so entsteht die Frage, wie viel AC verändert werden, wenn die Winkel ϕ und ω zu groß gemessen worden. dQ ist hier $= 0$, folglich

$$-\sin\phi . dP = P . \cos\phi\, d\phi + Q . \cos(\phi + \omega) \sin\omega\, d\omega + Q \cos\omega . \sin(\phi + \omega)\, d\omega$$
$$+ Q \cos\omega . \sin(\phi + \omega)\, d\phi$$

Wird diese Gleichung behörig reducirt, so ist

$$-dP = \left[P . \cot\phi + \frac{Q \sin(\phi + \omega)\cos\omega}{\sin\phi}\right] d\phi + \frac{Q \sin(\phi + 2\omega)\, d\omega}{\sin\phi}$$

§. 388.

Setzt man der Winkel BCD $= \phi$ sey vielmal genauer gemessen worden, als ω, weil jener vermittelst eines Micrometers gemessen werden kann, so wird hier $d\phi = 0$, folglich

$$-dP = \frac{Q . \sin(\phi + 2\omega)\, d\omega}{\sin\phi}$$

Daher ist der Fehler desto grösser, je näher $\phi + 2\omega$ zu 90° kömmt, und wenn $\phi + 2$

$\Phi + 2\omega = 90°$ wird, so fehlt man am meisten. In diesem Fall ist DCA der Zusatz des Winkels BCA zu 90.° Man kann also den schlechtesten Stand erkennen, wenn man beyde Winkel BCA + DCA = 90° findet. Wir haben diesen Fall umgekehrt schon oben (§. 176. seqq.) betrachtet, und gefunden, daß hier AC die mittlere Proportional zwischen AB und AD ist. Es ist aber hier

$$\sin\Phi : Q = \cos(\phi + \omega) : P$$

folglich

$$-dP = \frac{P.\sin(\Phi + 2\omega)\, d\omega}{\cos(\phi + \omega)}$$

Ist demnach der Winkel Φ in Vergleichung des Winkels ω sehr klein, und ω von 45 Grad nicht merklich verschieden, so ist beynahe

$$-dP = \tfrac{1}{2}P.\sin\omega.d\omega$$

Daher wächst hier der Fehler wie P und wie der Sinus von ω.

§. 389.

Ueberhaupt haben wir

$$\frac{-dP}{P} = [\cot\Phi + \tang(\phi + \omega)]d\Phi + \frac{\sin(\Phi + 2\omega)}{\cos(\Phi + \omega)}d\omega.$$

Woraus man sieht, daß, wenn der Winkel BCD sehr klein ist, derselbe den grösten Theil des Fehlers ausmacht, und daher desto genauer muß gemessen werden, und eben dieses ist nöthig, wenn der Winkel BCA weit über 45 Grad ist.

§. 390.

Da wir aber die Höhe BD in den meisten Aufgaben zu Bestimmung grösserer Entfernungen AC gebraucht, so ist der Winkel ω gewöhnlich sehr klein, und weil auf der Erde ausser den Kirchthürmen keine hohe verticale Objecte sind, daran man die Linie BD nehmen könnte, so wird auch der Winkel ϕ nicht groß. Der grösseste Theil des Fehlers gegen welchen die beyden andern Theile verschwinden, ist demnach

$$-dP = P.\cot\Phi.\ d\phi.$$

§. 391.

Um nun zu finden wie genau der Winkel BCD = Φ müsse gemessen werden, damit der Fehler dP in Vergleichung zu P eine gegebene Verhältniß nicht überschreite, so sey wie oben

$$dP = m.P$$

so ist

$$-m = \cot\phi.\ d\Phi$$

folglich

$$-d\Phi = m.\tang\phi.$$

oder da wir hier den Winkel Φ von wenigen Graden setzen, kann man annehmen

$$-d\Phi = m\Phi$$

Daher muß der Fehler $d\Phi$ zu ϕ eben die Verhältniß haben, die der Fehler dP zu P haben soll.

§. 392.

Setzet z. E. man fehle mit dem Micrometer auf einen Grad eine Secunde, so ist

$$\Phi : d\phi = 3600 : 1$$

folglich auch

$$P : dP = 3600 : 1$$

Daher würde man auf jede 3600 Schuhe einen fehlen. Es ist aber für sich klar, daß BD eben so genau muß gemessen werden, wenn man dadurch die wirkliche Länge AC finden will.

XV. Die Auswahl der Standlinie.

§. 393.

Die Berechnung der Folgen der Fehler, die wir in beyden vorhergehenden Abschnitten gegeben haben, hat die Bestimmung des Grades der Zuverläßigkeit zur Absicht, und setzt daher zum voraus, daß die Figur oder das Feld, so man berechnen wollte schon aufgenommen und in Grund gelegt sey. Wir haben in den besondern Fällen, die man als umgekehrte Aufgaben der Geometrie ansehen kann, die vortheilhaftesten Umstände in etlichen

chen Beyspielen untersucht, weil dieselben mit der Standlinie und ihrem Gebrauche nichts gemein haben. Und eben so haben wir (§. 348. seqq.) die zuverläßigere Umstände bey einem Triangel überhaupt betrachtet und gezeigt, wie nach Verschiedenheit der angenommenen Stücke jede gesuchte Seite am genauesten gefunden werden könne. Wir haben dabey gesetzt, die Absicht sey nur, eine einige Seite genau zu finden. Da aber diese Absicht bey Grundlegung der Felder nicht vorkömmt, so haben wir (§. 353.) aus der Standlinie Q und den anliegenden Winkeln r, q, gefunden, daß die Fehler in beyden Seiten P, R zugleich am kleinsten und einander gleich werden, wenn der △ gleichseitig ist.

§. 394.

Dieser Umstand wäre demnach der zuverläßigste, wenn man nur die beyden Seiten P, R am sichersten finden will. Allein dieses ist die Absicht bey Aufnehmung der Felder nicht, wo man die Standlinie Q und die Winkel r, p gebraucht, nicht um die Länge der Linien P, R sondern um die Lage des Puncts q am zuverläßigsten zu finden. Denn da man so viele Triangel dabey gebraucht, so viele Puncte man in den Riß bringen will, und aus diesen Puncten sodann die ganze Figur gezogen wird, so fallen die Linien P, Q wiederum hinweg, weil man sie nur als

Hülfsmittel gebrauchte, und es ist klar, daß die Figur desto genauer wird aufgerissen seyn, je weniger die Puncte q von ihrer wahren Lage abweichen.

§. 395.

Der Fehler besteht demnach in dem Abstande des gefundenen Puncts von seinem wahren Orte, und dieser Abstand ist also dem Grade der Zuverläßigkeit umgekehrt proportional. Je kleiner dieser Abstand ist, desto genauer ist die Lage des Puncts, den man in den Riß eingetragen hat, und die Auswahl der Standlinie kömmt also auf die Frage an: wo und wie groß man sie annehmen müsse, damit man durch jede Winkel p, r die Lage der dadurch bestimmten Puncte q am genauesten finde, und bey gleichen Fehlern in den Winkeln p, r, diese Lage unter allen am zuverläßigsten sey.

§. 396.

Es mag widersinnisch scheinen, daß wir zwischen dieser Aufgabe und der vorigen, wo man die Standlinie nach den Seiten P, R einrichtete, einen Unterschied machen, und man hätte vermuthen sollen, daß die Lage des Puncts q unter eben den Umständen die zuverläßigste Seite, unter denen die Seiten P, R am zuverläßigsten gefunden werden. Man hat daher die gleichseitigen Triangel als die besten

besten angesehen, und sie mögen es auch in der That seyn, wo man die Seiten P, R als neue Standlinien ansieht, und sie zu Bestimmung der folgenden Triangel gebraucht. Allein hier, da wir alle Puncte q durch eine Standlinie Q finden sollen, wie dieses gewöhnlich geschieht, so oft keine andere Hindernisse vorkommen, behalten die gleichseitigen Triangel diesen Vorzug nicht, und die Untersuchung muß von Anfang her umgeändert werden. Dahin gehören nun folgende Betrachtungen.

§. 397.

Einmal, da die Standlinie Q einerley bleibt, so nehmen wir sie als richtig gemessen an. Denn wenn sie auch nicht richtig gemessen wurde, so ist es eben so viel, als wenn man zu der ganzen Figur einen zu großen oder zu kleinen Maaßstab hätte, und der Fehler dehnt sich auf eine proportionale Art auf die ganze Figur aus. Er hängt von den übrigen Fehlern nicht ab. Die ganze Figur wird durch Winkel bestimmt, und daher kann sie ohne Maaßstab zu Papire gebracht werden. In so ferne hängt sie schlechterdings nur von den Fehlern in den Winkeln ab.

§. 398.

Sodann nehmen wir bey den Winkeln nur die Fehler an, welche von der Schärfe

 des

des Auges und des Instrumentes herrühren. Wir haben schon oben angemerkt, daß diese Fehler in jedem Falle ihre bestimmte Schranken haben, die man nicht überschreitet, wenn man nicht vorsetzlich fehlen oder sorgloß seyn will.

§. 399.

Da wir hier die schlechtesten Umstände setzen müssen, so nehmen wir die äussersten Fehler an, welche zwischen diese Schranken fallen. Wir setzen demnach jeder Winkel r, p sey um gleich viel zu groß oder zu klein gemessen worden, und der Fehler sey unter allen, die bey einerley Auge, Instrument und Aufmerksamkeit möglich sind, der äusserste. Denn es ist klar, daß wenn man die zuverlässigsten Umstände bestimmen will, man zeigen müsse, daß sie es auch bey denen Fehlern noch seyn, die unter allen die äussersten sind, für die man nicht gut stehen kann.

§. 400.

Es sey demnach AB die Standlinie, cAe = cBf die Fehler, die man bey Ausmessung der Winkel fAB, eBA zu besorgen hat. So haben wir hier folgende vier Fälle:

Fig. 58. 1.° Wenn beyde Winkel zu groß gemessen worden, so sind Ad, Bd die wahren, Ac, Bc die falschen Linien, und die Diagonal cd ist der Fehler in der Lage des Puncts d, weil man denselben in c setzt.

2.° Sind beyde Winkel zu klein, so ist der Fall umgekehrt. Das wahre Object ist in c, das gefundene in d, und folglich der Fehler in seiner Lage wiederum = dc.

3.° Ist der Winkel in A zu groß, in B zu klein, so sind Ae, Be richtig, Af und Bf falsch. Das Object liegt in e, der gefundene Ort ist f, und der Fehler in seiner Lage die Diagonal ef.

4.° Ist hingegen der Winkel in B zu groß, in A zu klein gemessen worden, so ist umgekehrt f der wahre und e der falsche Ort, und der Fehler wiederum = fe.

§. 401.

Das kleine Viereck cfde kann hier als ein Parallelogrammum angesehen werden, und da man in zween und zween von diesen Fällen seine Diagonalen dc, fe berechnen muß, so ist klar, daß dieselben auf zween Fälle können gebracht werden. Man betrachtet nemlich nur, ob die Fehler auf gleiche Seite fallen, und hier gilt cd, oder ob der eine Winkel zu groß, der andere zu klein gemessen worden, so wird ef gelten.

§. 402.

Da wir aber hier den grösten Fehler in der Lage des Objects beybehalten müssen, so ist klar, daß man in jedem Falle beyde nur so lange suchen müsse, bis man gefunden, welcher der grössere ist. Und diese Bestimmung hängt von dem Winkel AdB ab. Ist derselbe $= 90°$ so kann cf de als ein Rectangel angesehen werden, und beyde Diagonalen sind einander gleich. Ist hingegen AdB $< 90°$ so ist cd $>$ cf, und hinwiederum wird ef $>$ cd seyn, wenn AdB $> 90°$ ist.

§. 403.

Da wir ferner die Winkel fAd, dBe einander gleich setzen, so liegen die vier Puncte A, f, e, B in dem Umkreise eines Circuls, und daher sind die $\triangle$ dfe, dAB einander ähnlich, folglich haben wir

$$dA : AB = df : fe$$

Es ist aber

$$\sin AdB : Af = \sin fAd : df$$

folglich aus diesen beyden Gleichungen

$$ef = \frac{AB.\, Af.\, \sin fAd}{dA.\, \sin AdB}$$

Man kann aber fA $=$ dA, und $\sin fAd = fAd$ setzen, daher ist kürzer

$$ef = \frac{AB.\, fAd}{\sin AdB}$$

Es ist demnach der Fehler ef desto kleiner, je kleiner die Standlinie AB, und je näher der Winkel ADB bey 90° ist. Ist die Standlinie einmal angenommen, so verhält sich fe schlechthin wie die Cosecante des Winkels AdB, oder umgekehrt wie sein Sinus. Es ist demnach dieser Fehler am kleinsten, wenn bey gleicher Standlinie, AdB ein rechter Winkel ist.

§. 404.

Die beyden Diagonalen ef, cd durschneiden einander in ihrer Mitte. Man theile demnach AB in 2 gleiche Theile in C, und ziehe d, C zusammen, so ist

$$AB : Cd = fe : \tfrac{1}{2}\, dc$$

folglich

$$dc = \frac{2\, Cd.\, fe}{AB}$$

Da nun

$$fe = \frac{AB.\, fAd}{\sin AdB}$$

so haben wir für den andern Fehler

$$dc = \frac{2\, Cd.\, fAd}{\sin AdB}$$

§. 405.

Man sieht hieraus, daß man um diesen zweyten Fehler zu bestimmen, aus der Mitte der Standlinie C die Linie Cd ziehen müsse. Und der Fehler wird kleiner seyn, je kleiner diese Linie Cd, und je näher AdB bey 90° ist. Beyde Fehler verhalten sich wie AC zu Cd, und

und da wir immer den grössern beybehalten müssen, so ist klar, daß die Frage darauf ankömmt, ob Cd oder AC grösser sey.

§. 406.

Ist demnach AB der Diameter des Circuls auf welchem das Object d liegt, so werden beyde Fehler einander gleich, und sind am kleinsten, wenn die Standlinie AB einmal angenommen worden.

§. 407.

Nennet nun

$$Ad = P \quad ABd = p \quad fAd = fBe = dp$$
$$AB = Q \quad AdB = q \quad Cd = S$$
$$Bd = R \quad BAd = r$$

so sind die beyden Fehler

$$ef = \frac{Q\,dp}{\sin q} = \frac{R\,dp}{\sin r} = \frac{P\,dp}{\sin p}$$

$$cd = \frac{2S\,dp}{\sin q} = \frac{2R.S.\,dp}{Q.\,\sin r} = \frac{2P.S.dp}{Q.\,\sin p}$$

§. 408.

Setzet nun der erste Stand A und die Lage der Standlinie oder der Winkel dAB = r sey gegeben, so wird P und sin r als beständig angesehen, und der erste Fehler ef ist offenbar am kleinsten, wenn der Winkel in B = 90° ist. Der andere Fehler cd wird am

kleinsten seyn, wenn RS : Q am kleinsten ist. Um diesen Umstand zu finden, so haben wir

$$S^2 = P^2 + \tfrac{1}{4}Q^2 - PQ\cos r$$
$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos r$$

folglich

$$\frac{S^2R^2}{Q^2} = \frac{P^4}{Q^2} + \tfrac{5}{4}P^2 - \frac{3P^3\cos r}{Q} + \tfrac{1}{4}Q^2 - \tfrac{3}{2}PQ\cos r + 2P^2\cos r^2$$

Hier ist P und cos r unveränderlich, folglich wird nur Q differentiirt, und das Differential = 0 gesetzt, so findet man

$$0 = \left(-\frac{2P^4}{Q^3} + \frac{3P^3\cos r}{Q^2} + \tfrac{1}{2}Q - \tfrac{3}{2}P\cos r\right)dQ$$

und nach behöriger Reduction

$$0 = (P^2 - \tfrac{1}{2}Q^2).(P^2 - \tfrac{3}{2}QP\cos r + \tfrac{1}{2}Q^2)$$

Von diesen Factoren giebt der letztere mehrentheils keinen Werth, wir behalten demnach den erstern, und haben

$$Q^2 = 2P^2$$
$$Q = P\sqrt{2}$$

Hieraus sieht man, daß die Standlinie AB sich zu dem Abstande Ad wie die Diagonal eines Quadrates zu seiner Seite oder wie $\sqrt{2}$ zu 1 folglich bey nahe wie 7 zu 5 oder genauer wie 17 zu 12 verhalten müsse. Es ist aus obigem (§. 351. seq.) klar, daß man hätte

hätte $P = Q$ machen müssen, wenn man nicht die Lage des Puncts d sondern die Länge der Linie Ad am zuverlässigsten hätte finden wollen.

§. 409.

Da die Linie $S = Cd$ mitten auf AB fällt, so ist

$$2P^2 + 2R^2 = Q^2 + 4S^2$$

folglich

$$2P^2 - Q^2 = 4S^2 - 2R^2$$

Nun ist in unserm Fall

$$2P^2 - Q^2 = 0$$

folglich auch

$$R^2 = 2S^2$$

Es hat demnach R zu S eben die Verhältniß, wie Q zu P, nemlich die von $\sqrt{2}$ zu 1.

§. 410.

Man sieht hieraus, daß beyde kleinste Fehler nicht zusammen treffen, der erste fordert in B einen rechten Winkel, und diese Forderung macht nothwendig $P > Q$. Der andere Fehler setzt $Q : P = \sqrt{2} : 1$, folglich $Q > P$, welche Bedingungen einander widersprechen.

§. 411.

Setzen wir nun $Q = P\sqrt{2}$ und $R = S\sqrt{2}$, so ist der Fehler

$$cd = \frac{S.S.dp.\sqrt{8}}{P\sqrt{2}.\sin r} = \frac{2SS\,dp}{P.\sin r}$$

Da

Da sich nun derselbe auch bey bestimmter Standlinie, nach dem Winkel r richtet, so läßt sich der Umstand bestimmen, unter welchem er in Absicht auf den Winkel r am kleinsten ist. Zu dem Ende haben wir

$$SS = PP + \tfrac{1}{4}QQ - PQ.\cos r$$

Nun ist

$$QQ = 2PP$$

folglich

$$SS = \tfrac{3}{2}PP - PP.\cos r.\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}P^2(3 - \sqrt{8}\cos r)$$

folglich

$$cd = \frac{P(3 - \sqrt{8}.\cos r)\,dp}{\sin r}$$

Daher, wenn man r differentiirt

$$0 = P\left(\frac{3\cos r.\,dr}{\sin r^2} - \frac{\sqrt{8}.\,dr}{\sin r^2}\right)$$

folglich

$$\cos r = \sqrt{\tfrac{8}{9}}$$
$$\sin r = \tfrac{1}{3}$$
$$r = 19^\circ\,28'$$

Der Fehler cd ist demnach am kleinsten, wenn $Q = P\sqrt{2}$, und $\sin r = \frac{1}{3}$ ist. Setzt man diese Werthe in der Gleichung, so hat man

$$cd = dp.\,P$$

Daher ist der Fehler der Perpendicular gleich, welche aus d auf Af fällt, und dieses ist auch wirklich die Lage der Diagonal cd, wenn sie am kleinsten ist. Man sieht aber leicht, daß unter

unter diesen Umständen der Fehler ef, welcher in B einen rechten Winkel fordert, lange nicht am kleinsten ist.

§. 412.

Da also beyde kleinste Fehler nicht zusammen treffen, so muß man den Ort der Standlinie suchen, wo der grössere Fehler am kleinsten wird. Um diese Aufgabe aufzulösen, wollen wir den Fall setzen, wo cd am kleinsten wird. Dieses geschieht, wenn $Q = P\sqrt{2}$ ist. (§. 408.) Für diesen Fall muß der Fehler ef gesucht, und mit dem nunmehr kleinsten Fehler verglichen werden. Ist sodann $ef < cd$, so ist die Auflösung gefunden, weil hier cd, auch wo es am kleinsten ist, dennoch grösser bleibt als ef, und folglich keine bessere Umstände können gewählt werden. Wäre aber $ef > cd$, so ist klar, daß sich noch ein Mittel treffen läßt. Die Auflösung ist folgende.

§. 413.

Wenn cd am kleinsten, so ist

$$Q = \sqrt{2}.P$$

folglich

$$ef = \frac{P.\,dp\sqrt{(3 - \sqrt{8}.\cos r)}}{\sin r}$$

$$cd = \frac{P\,(3 - \cos r\sqrt{8}).dp}{\sin r}$$

demnach

demnach

$$ef : cd = 1 : \sqrt{(3 - \cos r\sqrt{8})}$$

Man sieht also, daß der Unterschied der beyden erst berührten Fälle von dem Winkel r abhängt.

§. 414.

Setzet demnach $cd > ef$, so ist

$$3 - \cos r\sqrt{8} > 1$$

$$\cos r < \frac{3 - 1}{\sqrt{8}}$$

oder $\cos r < \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

$$r > 45.^\circ$$

Soll demnach die Standlinie $Q = P\sqrt{2}$ die vortheilhafteste seyn können, so muß der Winkel r grösser seyn als 45.° Ist aber dieser Winkel kleiner, so kann auch die Standlinie um etwas kürzer gemacht werden. Durch diese Verkürzung wird zwar der Fehler cd grösser, hingegen aber ef kleiner, und es ist klar, daß man die Standlinie wählen muß, welche beyde gleich macht. Dieses fordert aber, daß $q = 90°$, und folglich $Q = P.\sec r$ werde.

§. 415.

Die zuverläßigste Standlinie wächst demnach mit dem Winkel r, bis sie $= P\sqrt{2}$ oder $r = 45°$ wird, und diese Länge behält sie

dann

dann unverändert, wenn gleich der Winkel r noch grösser wird.

§. 416.

Da wir bey jedem Objecte zween Fehler betrachten müssen, so ist klar, daß sich ihre Anzahl zugleich mit den Objecten aufhäuft, und da man hier immer diejenige Standlinie suchen muß, wobey der gröste Fehler noch der geringste bleibt, so ist leicht zu erachten, daß die Vergleichungen die man hier anzustellen hat, sehr weitläuftig werden. Ich habe nicht finden können, daß sie sich auf eine allgemeine Art bestimmen lassen, weil jeder Umstand in der Lage eines Objectes die Bestimmung ändern kann. Man müßte erstlich jeden Fehler allein betrachten, und besonders sehen, wo die Fehler cd am kleinsten sind. Für diesen Umstand müßte man auch die übrigen Fehler bestimmen, und sehen, ob sie kleiner sind, als der, auf welchen man sie bezogen. Wären sie kleiner, so würde die Standlinie gefunden seyn. Es ist aber klar, daß wenn man keinen einzelnen Fall vor sich hat, wo alle Umstände in Zahlen gegeben sind, diese Frage nicht erörtert werden kann. Alles was sich thun läßt ist, daß man bestimme, was für eine Lage die übrigen Objecte haben können, damit dieses zutreffe, wie wir z. E. vorhin den Winkel r auf 45° gesetzt haben. Diese Umstände so bestimmt, würden sich

sich sodann in jedem Fall erkennen lassen, ob sie da wären oder nicht. Endlich müßte man den Fall setzen, wo die Umstände anders sind, und die Standlinien suchen, wo zween Fehler einander gleich werden. Für diese Standlinien müßte man auch die übrigen Fehler berechnen, und sehen ob sie kleiner sind. Dieses läßt sich nun wiederum in allgemeinen Ausdrücken nicht thun, sondern man kann höchstens daraus nur die Criteria finden, woraus man sie in einzelnen Fällen erkennen kann.

§. 417.

Dieses ist der Entwurf der Rechnung, die man anzustellen hätte, und es ist klar, daß sie eben so müßte eingerichtet werden, wo man die Standlinie vollkommen unbestimmt setzt. Denn hier haben wir die Winkel am ersten Stande als gegeben angenommen, und daher nur die Länge der Standlinie zu finden gehabt.

§. 418.

Da die Weitläuftigkeit dieser Rechnung dieselbe vollends unbrauchbar macht, so habe ich lieber die Construction vorgenommen, ungeacht krumme Linien dabey gebraucht werden. Diese werde ich nun für zwey Objecte angeben, weil sie sich auf gleiche Art bey mehrern anbringen läßt. Ich nehme den ersten Stand, und die Lage der Standlinie

wiederum als gegeben an. Es sey der erste
Fig. 59. Stand A die Lage der Standlinie AH, die beyden Objecte B, C, diese Stücke sind gegeben. Die übrigen werden so gefunden:

1.° Fället aus B, C die Perpendicularen BD, CF auf die Standlinie, und machet ED = AB, GF = AC.

2.° Ziehet durch D, F Parallelen mit AH, diese sind DI, FK.

3.° Verlängert AB in b, und AC in c, bis Bb = AB und Cc = AC wird.

so ist die Vorbereitung fertig.

4.° Nehmet auf der Standlinie jeden Punct H an, und ziehet aus H die Perpendicular herunter, so wird AH als eine Abscisse, HO als die Ordinate angesehen, auf welche die Fehler, denen der Stand H unterworfen seyn kann, aufgetragen werden. Zu dem Ende

5.° Ziehet aus B und C Linien in I und K, und traget HI aus H in O, und HK aus H in N.

6. Ziehet Hb, Hc, und machet

AH : Hb = HO : HL

AH : Hc = HN : HM

so habt ihr die vier Puncte L, O, M, N, und HL, HO, HM, HN sind den Fehlern, die man in H zu befahren hat, proportional.

7.° Wenn ihr nun auf AH noch andere Puncte annehmet, und damit eben so wie mit H verfahrt, so werdet ihr die vier krummen Linien ziehen können, die durch L, O, M, N gehen.

8.° Da nun diese sich in verschiedenen Orten durchschneiden, so muß derjenige Durchschnitt gesucht werden, welcher am nächsten bey der Standlinie ist, und von welchem die durch denselben gezogene Ordinate die übrigen krummen Linien näher bey der Standlinie durchschneidet.

Diese letzte Eigenschaft haben in der Figur die beyden Durchschnittspuncte P, Q gemein, und es ist klar, daß P muß gewählt werden, weil er näher bey der Standlinie ist. Der zuverläßigste zweyte Stand ist demnach G, die Standlinie AG, und die Fehler sind den Ordinaten GR, GF, GP proportional.

§ 419.

Der Beweiß dieser Construction gründet sich darauf, daß

$$HI = \frac{AB}{\sin AHB} = AB \sec EBH$$

$$HK = \frac{AC}{\sin AHC} = AC. \sec GCH$$

ist, und die gleichnahmige Fehler der Objecte B, C diesen Linien proportional sind (§. 407.) sodann

sodann auch darauf daß die beyden Fehler bey gleichem Objecte, z. E. bey B sich wie AH zu Hb verhalten (§. 404.)

§. 420.

Wenn ausser den Objecten B, C noch mehrere sind, so müssen für jedes derselben noch zwo krumme Linien gezogen werden, und dieses macht die Construction allerdings weitläuftig. Man sieht übrigens hieraus, was man sich von der Berechnung zu versprechen hat. Wir haben hier überdiß den leichtern Fall gesetzt, und nichts anders als unbekannt angenommen als die Länge der Standlinie. Ist aber der erste Stand A, und die Lage derselben auch unbestimmt, und die ganze Standlinie soll aus dieser Bedingung gefunden werden, daß der gröste Fehler, der aus den Winkeln entstehen kann, dennoch unter allen der kleinste sey, so hat man auf einmal vier Stücke zu suchen. Ich habe nicht gefunden, daß diese Aufgabe, welche unstreitig eine der nützlichsten der practischen Geometrie ist, auf eine allgemeine Art, und ohne viele Umwege auflößbar wäre.

§. 421.

In leichtern Fällen, wo die Objecte in geringer Anzahl sind, und eine regularere Lage haben, läßt sich die vortheilhafteste Standlinie aus besondern Betrachtungen finden

finden. So z. E. wenn nur zwey Objecte sind, so kann man die Linie, so durch dieselbe geht, und ihren Abstand mißt als eine Diagonal eines Quadrats ansehen, und die andere Diagonal wird die vortheilhafteste Standlinie seyn.

§. 422.

Wiederum wenn vier Objecte ein Rectangel machen, so beschreibe man durch dieselben einen Circul, und der Diameter dieses Circuls wird die zuverläßigste Standlinie seyn. Hier ist gleichgültig, welchen Diameter man nimmt. Alle Fehler werden einander gleich, und keiner läßt sich durch Abänderung der Standlinie verkleinern, ohne daß die übrigen grösser würden.

§. 423.

Drey Objecte, die ungefehr einen gleichseitigen Triangel machen, werden ebenfalls am genauesten gemessen, wenn man durch sie einen Circul zieht, und einen Diameter desselben zur Standlinie annimmt. Liegen aber die drey Objecte fast in gerader Linie, so muß eine nähere und kleinere Standlinie gewählt werden. Die Erfindung derselben hat aber eben die Schwürigkeiten, denen die allgemeine Auflösung unterworfen ist (§. 420.)

§. 424.

Man kann aus der einigen Construction, die wir von einem leichtern Fall gegeben haben

ben (418.) leicht abnehmen, daß das kleinste so hier zu suchen ist, sich von demjenigen, wobey man die Differentialrechnung gebraucht, sehr unterscheidet, weil dieses letztere da statt hat, wo eine krumme Linie mit der Axe entweder parallel oder perpendicular wird. Hingegen hier findet sich die gesuchte kleinste Ordinate, z. E GP in dem Durchschnitte zwoer krummen Linien, welche daselbst eben mit der Axe nicht parallel sind. Selten trift das erstere kleinste mit diesen zusammen. Der Unterschied ist deßwegen richtiger, weil man hier mehr an die gefundene Standlinie gebunden ist, und die Fehler sich gleich stark vergrössern, sobald man nur wenig davon abweicht. So z. E. wenn man den zweyten Stand in H nehmen wollte, so würde der größte Fehler der Ordinate HO proportional werden, da er in dem Stande G der Ordinate GP proportional war.

§. 425.

Dieser Umstand, welcher die zuverläßigste Standlinie so enge einschränkt, macht überdiß, daß man dieselbe nicht einmal wählen kann, ehe man die Figur schon ziemlich genau entworfen hat. Diß hieße so viel als die die Arbeit verdoppeln. Man müßte das Feld erstlich mittelst einer willkührlich angenommenen Standlinie in Grund legen, damit man die Lage der sichersten Standlinie und ihre Länge

Länge finden könnte. Diese müßte man sodann auf dem Felde ziehen, und sie zu der genauern Ausmessung desselben gebrauchen, wenn die größte Zuverläßigkeit so wichtig wäre. Will man aber den vorläufigen Riß nur beynahe bestimmen, so wird die Methode, die wir oben in dem Abschnitte vom Augenmaaß angegeben haben, leicht und hiezu hinlänglich seyn. (§. 76.)

§. 426.

Hat man diesen vorläufigen Riß entworfen, so läßt sich durch Versuche eine Linie darauf ziehen, so daß wenn man von ihren beyden Enden Linien in jede Ecke der Figur zieht, dieselben daselbst sich unter Winkeln durchschneiden, die von 90° am wenigsten unterschieden sind, und daß, wenn sie als eine Standlinie angenommen wird, die Fehler, so man zu besorgen hat, nach denen erst gegebenen Regeln bestimmt, so viel möglich ist, am kleinsten werden. Und diß ist alles, was man hiebey thun kann, bis man Mittel findet, die vorgeschlagene Berechnung der kleinsten Fehler (§. 416.) oder ihre Construction zu erleichtern.

XVI. Das Mittel zwischen den Fehlern.

§. 427.

Wird eine Größe mehrmahlen gemessen, oder auf mehrerley Arten bestimmt, und die Ausmessungen oder Bestimmungen treffen nicht genau zusammen, so schließt man, daß irgendwo Fehler mit unterlaufen seyn, welche, wie wir es oben bemerkt haben, aus vielen Ursachen herkommen können. Entsteht ein Fehler aus Versehen, daß man eines für das andere nimmt, so läßt er sich gewöhnlich leicht erkennen, und fast eben so geht es mit denen, die von einer allzugroßen Sorglosigkeit entspringen. Beyde kommen hier nicht in Betrachtung, sondern wir werden wiederum nur die untersuchen, die von der Schärfe des Auges, und von der Größe und Güte des Instruments herrühren, und in so ferne unvermeidlich sind, daß man nicht dafür gut stehen kann, ob sie wirklich grösser oder kleiner vorgegangen, oder nicht.

§. 428.

Was das Auge auf einer jeden Fläche als einen Punct ansieht, auf welchem es nichts mehr unterscheiden kann, ist für sich betrachtet, eine Fläche, welche mit der Entfernung grösser wird. So sehen wir die kleinsten Fixsterne

ne als Puncte an. Alle Theile dieser Fläche sind dem Auge gleichgültig, weil es alle zusammen genommen, als einen Punct ansieht. Wird aber ein Linial mit Dioptern nach demselben gerichtet, so hört diese Gleichgültigkeit, in Absicht auf die Lage des Liniales auf, weil man diese Lage nach geometrischer Schärfe als bestimmt ansehen kann. Dasselbe kann also nach jedem Theile dieser Fläche gerichtet seyn, welche das Auge nicht mehr von einem Punct unterscheidet. Und in so ferne ist jede Richtung von der andern unterschieden. Und was in Absicht auf das Auge gleichgültig war, hört bey dem Instrument auf.

§. 429.

Damit wir in so kleinen Puncten etwas unterscheiden können, wollen wir dieselben, wie in der Nähe oder durch ein Vergrösserungsglaß betrachtet, vorstellen. Wir gebrauchen hiezu eine Circulfläche, weil kein Grund da ist, warum man sich einen Punct, den das Auge nicht mehr unterscheidet, als eckicht vorstellen sollte. Es sey demnach ADBE eine solche Fläche, die das Aug als einen Punct ansieht, AB ihr Diameter, C ihr Mittelpunct. Sollte das Aug eine Linie gegen C richten, so ist klar, daß es unter unzähligen malen nicht einmal zutreffen wird, weil alle Puncte dieser Fläche hiebey gleich möglich sind, und die Linie nach einem der- Fig. 60.

 selben

selben eben so leicht gerichtet seyn kann, als nach jedem andern. Wählt man innerhalb ADBE einen beliebigen Raum, so läßt sich die Probabilität bestimmen, ob das Linial in oder außer diesen Raum werde gerichtet seyn, und wie viel eines wahrscheinlicher ist als das andere, denn die Wahrscheinlichkeit wächst mit dem Raume.

§. 430.

Soll der Punct ADBE von der Schärfe oder von dem Faden der Diopteern DE bedeckt werden, so ist wiederum klar, daß er so viele Lagen haben kann, als Puncte auf dem Diameter AB sind. Aber die Möglichkeit jeder Lage DE richtet sich nach der Anzahl der Puncte so auf der Linie DE liegen, und folglich ist sie desto grösser, je näher diese Linie bey dem Mittelpunct C ist. Sieht man demnach FC als die Größe des Fehlers an, so stellt FD seine Möglichkeit vor. Denn er ist desto möglicher, je öfter er vorkommen kann, und folglich je mehr Puncte auf DE = 2 DF liegen. Hieraus folgt, daß die geringern Fehler häufiger, und fast gleich oft vorkommen, hingegen die grössern desto seltener sind, vorausgesezt, daß man nichts vorsetzliches zulasse. Eben so wird aus der Natur des Circuls bestimmt, daß die gleich grossen Fehler auf beyden Seiten des Mittelpuncts gleich möglich sind.

§. 431.

§. 431.

Bey Ausmessung der Winkel werden die Diopteern nach zween dergleichen Puncten gerichtet. Es ist klar, daß man in beyden auf eine ähnliche Art fehlen kann. Laßt uns auch hier die Möglichkeit jeder Fehler, die in dem Maaße des Winkels entstehen können, untersuchen. Es seyn demnach AF, BE die beyden Flächen, welche das Auge für Puncte ansieht, C, D ihre Centra, und CD ihr wahrer Abstand oder die wahre Größe des Winkels. Diese Linie werde in l und H verlängert. Da bey jedem Fehler in Alfg jede Fehler in BGEH gleich leichte vorkommen können, so sind die äussersten darunter gG, Hl, und bey dem ersten ist der Winkel um den Diameter GH zu klein, bey dem andern um eben so viel zu groß. Daher ist der Diameter auf beyden Seiten das Maaß des grösten Fehlers. Fig. 61.

§ 432.

Die Möglichkeit eines jeden einzelnen Fehlers Cp ist = pm, und des Fehlers DP ist = PM, daher weil jede Puncte auf pm mit jeden Puncten auf MN gepaaret werden können, so ist die Möglichkeit des Winkels Pp, in den Puncten P, p gemessen = MP. mp. Da man aber die Distanz Pp auf vielerley Arten in beyden Circuln haben kann, so wird die Möglichkeit des Winkels, so dadurch vorge-

vorgestellt wird, noch vielfältiger. Und die Frage, auf wie viele Arten derselben oder dessen Fehler $Cp + DP$ möglich sey, muß also aufgelößt werden.

§. 433.

Man trage DB aus C in h, und Pp aus G in k, so ist hp die Größe des Fehlers, und gk mißt seine Möglichkeit in Absicht auf die Linie lH, weil der Anfang des Winkels p auf jeden Puncten der Linie gk seyn kann. Ist dieser Anfang in p, so ist die Möglichkeit $= MP.\ mp = \mu h.\ mp$. Um nun die Summe aller Möglichkeiten zu finden, so nenne man dieselbe für die Abscisse $kp = v$. Ferner sey

$$Cg = 1 \qquad kp = x = lh$$
$$Ck = z$$

so ist

$$pm = \sqrt{(1 - (z + x)^2)}$$
$$\mu h = \sqrt{(1 - (1 - x)^2)}$$

daher

$$dv = dx.\sqrt{(1 - (z + x)^2)}.\sqrt{(1 - (1 - x)^2)}$$

oder

$$dv = dx.\sqrt{[2x(1 - zz) - x^2(1 + 4z - zz) + 2x^3(z - 1) + x^4]}$$

Man setze $z = \cos\phi$, so ist, wenn die Irrationalgröße in einer Reihe aufgelößt und integrirt wird

v =

$$v = \frac{\sqrt{8}}{3}\sin\phi.x^{3:2} - \frac{\sqrt{2}}{5}.(\sin\phi + 4\cot\phi)\,x^{5:2}$$
$$- \frac{\sqrt{2}}{7\sin\phi}(2\sin\tfrac{1}{2}\phi^2 + \tfrac{1}{4}\sin\phi^2 + 4\cos\phi - 8\cot\phi^2)\,x^{7:2}$$
$$- \&c.$$

§. 434.

Da diese Reihe in Bestimmung des allgemeinen Gesetzes wenig Licht giebt, so werden wir dasselbe durch folgende Betrachtung erläutern.

1.° Jeder gefehlte Winkel Pp läßt sich auf der Linie lH auf desto mehrerley Puncten nehmen, je näher er dem wahren Winkel ist. Man mache $g\pi = Gk = Pp$, so wird der Punct P von g in k rücken, wenn P aus π in G rückt, und es wird immer $G\pi = kp$ und $\pi p = gp$ seyn.

2.° Da also auch $gk = \pi G$, und die Möglichkeit eines jeden Puncts P durch seine Ordinaten vorgestellt wird, so sind die Möglichkeiten auf den Linien gk, $G\pi$ einander ähnlich, sie paaren sich aber in umgekehrter Ordnung. Denn je näher P bey π ist, desto näher ist p bey g. Da nun PM wächst, und pm abnimmt, so werden die grössern Möglichkeiten auf einer Seite mit den kleinern auf der andern multiplicirt, und dieses macht ihre Summen kleiner.

3.° Die

3.° Die grösten und kleinsten Ordinaten paaren sich nur einmal, jenes geschieht wenn der Winkel = CD und folglich richtig ist, dieses aber wenn er = gG oder = lH wird, und daher am kleinsten oder am grösten ist. Dieses letztere ist auch nur in einem einigen Falle möglich, weil sich gG und Hl nicht herum tragen lassen.

4.° Vergrössert man gG um einen sehr kleinen Theil, so werden die Puncte k, π sehr nahe bey g und G seyn. Daher werden die grössern Ordinaten und folglich auch ihre Möglichkeiten ausgeschlossen, und der Fehler kömmt desto weniger vor, je näher er bey dem grösten ist.

5.° Hingegen ist derselbe häufiger, je näher der Winkel dem wahren kömmt. Denn der wahre Winkel läßt sich durch den ganzen Diameter herum tragen, weil CD = hG = gH ist, und bey demselben werden die kleinern Ordinaten mit den kleinern, und die grössern mit den grössern combinirt, und dadurch häufet sich die Anzahl der möglichen Fälle.

6.° Bey jedem andern Fehler combiniren sich jede grössere Ordinaten mit den kleinern, und die grösten kommen gar nicht vor. So z. E. bey dem Winkel Pp werden die Ordinaten so auf lk und πH liegen ganz ausgeschlossen, und folglich unter denselben auch die grösten.

7.° Gleich große Fehler, die nemlich den Winkel um gleich viel zu groß oder zu klein machen, haben gleiche Möglichkeit. Es ist demnach die krumme Linie, deren Abscissen vom Mittelpunct der Axe auf beyden Seiten die Fehler, die Ordinaten aber ihre Möglichkeit vorstellen, sich selbst auf beyden Seiten ähnlich. Die mittlere Ordinate ist die gröste. Sie hat auf beyden Seiten einen Wendungspunct, und zu äusserst ist die Axe ihre Tangente. Die halbe Axe ist dem Diameter GH gleich.

§. 435.

Um diese Betrachtungen durch einen leichten Versuch zu prüfen, habe ich folgenden angestellt. Ich zog eine Linie AE, und trug einen Theil AB aus B zwanzigmal herum in D, Fig. 62. und aus D in C und E. Die Linie CE theilte ich in 20 Theile. Die Figur stellt alles in Lebensgröße vor. Nachdem diese Vorbereitung geschehen, so ändert ich die Oefnung des Circuls, um ihn aufs neue zu öfnen, und die Distanz AB wiederum zwanzigmal aus B in D zu tragen. Es ist klar, daß wenn der Circul die vorige Oefnung gehabt hätte, so hätte er im herum tragen, auf eben die Puncte eingetroffen. Da aber dieses ungeacht aller Aufmerksamkeit nicht zutrafe, so bemerkte ich den Punct auf welcher er zwischen CE auf der Theilung eintrafe, so genau es das Auge

Auge zuließ in 100ten Theilen, und schrieb die Zahl auf. Ich hatte mir die Gedult genommen, diese Arbeit 80 mal zu wiederholen, und jedesmal die Oefnung des Circuls zu ändern. Es ist klar, daß auf diese Art ein kleiner Fehler auf AB zwanzig mal vergrössert, und daher allerdings sichtbar wurde. Die observirten Zahlen in Ordnung gebracht, traf der Circul

2	mal auf	63	3	mal auf	89	4	mal auf	105	1	mal auf	122
1	„ „	69	2	„ „	91	4	„ „	106	1	„ „	124
1	„ „	70	1	„ „	94	1	„ „	107	1	„ „	128
2	„ „	71	2	„ „	95	3	„ „	109	3	„ „	129
1	„ „	73	2	„ „	96	1	„ „	110	1	„ „	130
1	„ „	78	2	„ „	97	2	„ „	111	1	„ „	131
1	„ „	79	2	„ „	98	1	„ „	112	1	„ „	133
2	„ „	81	2	„ „	99	3	„ „	113	1	„ „	134
1	„ „	83	1	„ „	100	1	„ „	115	1	„ „	148.
1	„ „	84	3	„ „	101	1	„ „	116			
2	„ „	85	1	„ „	102	1	„ „	117			
2	„ „	87	1	„ „	103	1	„ „	120			
4	„ „	88	1	„ „	104	2	„ „	121.			

folglich

3	mal zwischen		60	und	70
6	„	„	70	„	80
15	„	„	80	„	90
13	„	„	90	„	100
19	„	„	100	„	110
10	„	„	110	„	220
9	„	„	120	„	130
4	„	„	130	„	140
1	„	„	140	„	150

§. 436

§. 436.

Woraus man allerdings sieht, daß die kleinern Fehler häufiger vorkommen, denn der Circul hätte jedesmal auf 100 eintreffen sollen. Es ist vermuthlich, daß auch das Herumtragen etwas zu den Fehlern beygetragen. Da sich aber dieses einigermaaßen compensirt, so wollen wir sie in Absicht auf das Auge betrachten. Wenn wir die beyden äussersten Fehler 63 und 148 weglassen, als die vermuthlich von andern Ursachen herrühren, so sind die äussersten unter den übrigen 69 und 134, der Unterschied ist $= 65$, welcher zwanzigmal verkleinert $= 3\frac{1}{4}$ wird. Dieses macht den 30 Theil von der Linie AB, und so groß ist der Unterschied zwischen den äussersten Fehlern. Da sie von dem wahren fast gleich entfernt sind, so ist die Linie AB das eine mal um $\frac{1}{60}$ zu groß, das andere mal aber um $\frac{1}{60}$ zu klein genommen worden. Dieser Theil muß auf beyde Puncte A, B vertheilt werden, so haben wir den $\frac{1}{60}$ von der Helfte von AB, oder den $\frac{1}{120}$ von AB, und dieses ist der halbe Diameter eines Puncts, auf welchen das Auge nichts mehr unterschied.

§. 437.

Die Linie BD ist $= 5''\ 7''' = 67'''$, daher $AB = \frac{67}{20}'''$, und folglich dieser halbe Diameter $= \frac{67}{2400}'''$. Setzt man nun die Distanz des Auges 7 Zoll oder 84 Linien, so findet man die Tangente des scheinbaren halben Diameters = 67. 84. 2400 = 0,00033, welches ungefehr eine Minute eines Grades beträgt. Der scheinbare Diameter mag also zwo Minuten seyn. Es ist unstreitig, daß das Auge viel schärfer sehen mag, und es wird einen kleinern Punct als der 60te Theil von AB ist, noch deutlicher sehen, und seine Theile unterscheiden können. Allein wenn es die Frage ist, einen solchen Punct mit dem Circul zu fassen, oder die Dioptern nach demselben zu richten, so wird die Schärfe desselben nicht wohl weiter reichen. Und wir werden mit Marinoni den Fehler, so man mit blossem Auge bey Ausmessung eines Winkels, auch mit aller Aufmerksamkeit noch zu befürchten hat, auf jeder Seite eine Minute zu groß oder zu klein, und daher in allem auf zwo Minuten setzen können.

§. 438.

Die Summe der Zahlen von allen Observationen ist = 8095. Wird diese durch 80 dividirt, so ist das Mittel aus allen = 101,2, es sollte aber = 100, 0 seyn. Daher das Mittel von dem wahren noch um 1, 2 Theile abweicht. Diese Abweichung ist aber auf CE genommen, und daher 20mal grösser als auf AB. Wird sie demnach durch 20 getheilt, so beträgt sie auf AB 0, 06, solcher Theile, davon AB hundert hat, und folglich 0,0006

0,0006 oder $\frac{1}{1666}$ Theil von AB. Sie wird um die Helfte kleiner, wenn man die letzte Observation, die 148 giebt, wegläßt, und die Summe der übrigen durch 79 theilt.

§. 439.

Der erstbeschriebene Versuch ist demjenigen vollkommen ähnlich, den man mit der Ausmessung der Winkel anstellen muß. Wir haben schon oben (§. 333.) erinnert, daß diese Prüfung bey jedem Instrumente aus verschiedenen Gründen nöthig sey. Denn wird ein vorgegebener Winkel nur einmal gemessen, so muß man, um die Zuverläßigkeit der Ausmessung zu bestimmen, wissen wie weit sich der gröste mögliche Fehler erstreckt, und dieses findet man, wie wir im gegenwärtigen Versuche denselben gefunden, und auf zwo Minuten gesetzt haben. Jedes Instrument hat hiebey was eigenes, weil der Fehler von seiner Güte abhängt.

§. 440.

Wird aber ein gleicher Winkel mehrmal gemessen, so kann man aus den Fehlern das Mittel nehmen, und hier wird die erstbemeldte Prüfung des Instruments von gutem Nutzen seyn, weil man dadurch die Zuverläßigkeit des Mittels zu bestimmen im Stande ist.

§. 441.

Da die Fehler desto möglicher sind, und daher auch desto leichter und öfter vorkommen, je kleiner sie sind (§. 434. 436.) so gelten hier eben die Sätze, die ich in der Photometrie in Absicht auf die Schärfe des Auges bey Beurtheilung der Klarheit der Objecte bewiesen, und wodurch gezeigt wird, wie ferne man das gefundene Mittel aus den Observationen als zuverläßig ansehen kann. Ich werde von denselben folgende hersetzen.

1.° Die ganze Berechnung des Mittels zwischen wiederholten Observationen gründet sich schlechterdings auf den Grad der grösten Wahrscheinlichkeit. Denn da hier mehrere mögliche Fälle, und einige derselben möglicher sind als die andern, so wird das Mittel für denjenigen Fall gesucht, welcher unter allen der wahrscheinlichste ist, und man setzt, es sey eben der wahrscheinlichste, oder ein von demselben nicht viel entfernter Fall, der sich bey der geschehenen Wiederholung zugetragen habe.

2.° Aus diesem Grunde schließt man, daß diejenigen Observationen der wahren Größe am nächsten seyn, die am häufigsten vorgekommen sind. Denn sie haben den grösten Grad der Möglichkeit, und da sie folglich auch die gröste Wahrscheinlichkeit haben, so würde man ohne Grund davon abgehen.

3.° Wenn die Observation nicht sehr vielmal wiederholt worden, so ist es unwahrscheinlich, daß einer der äussersten Fehler darunter sey, und noch unwahrscheinlicher, daß zween solche darunter seyn, die sich unter einander aufheben, oder davon der eine positiv, der andere negativ ist. Denn solche Fehler haben den geringsten Grad der Möglichkeit, daher können sie auch nicht so ofte vorkommen.

4.° Ist aber ein solcher Fehler eingeschlichen, so wird das Mittel aus den übrigen von dem wahren merklich entfernt, und man muß die Anzahl der Observationen sehr vermehren, um diese schlimme Folge wieder geringer zu machen, so lange kein eben so grosser oder negativer Fehler dazu kömmt.

5.° So lange ein solcher Fehler noch allein unter den übrigen ist, so wird er von dem Mittel aus allen am weitesten entfernt seyn, und wenn man die Observation wegläßt, welche ihn eingebracht hat, so wird das Mittel aus den übrigen dem wahren näher kommen, als wenn man die Observation beybehält. Hiedurch läßt er sich erkennen und wegschaffen.

6.° Der Unterschied dieser beyden Mittel bestimmt die Zuverläßigkeit des letztern.

§. 442.

Man kann die Beweise dieser Sätze am angezogenen Orte nachsehen, wo ich auch noch eine andere Methode angegeben, den Fall zu bestimmen, welcher in der That unter allen der wahrscheinlichste ist. Diese würde ich hier ausführlicher durchgehen, wenn die (§. 435.) gegebene Differentialformel anderst als durch eine unendliche Reyhe integrabel wäre.

§. 443.

Diese Betrachtungen gründen sich auf die Theorie der Wahrscheinlichkeit. Hat man aber den grösten Fehler, den ein Instrument geben kann, bestimmt (§ 439. 440.) so läßt sich ein Theil dieser Wahrscheinlichkeit zur Gewißheit bringen. Es sey der gröste Fehler, der ohne Vorsatz möglich ist, = FG, seine Helfte FH = HG. Hingegen sey der Unterschied zwischen den äussersten unter den observirten Fehlern = AB, und das Mittel aus allen falle auf C. Da man nun nicht weiß, wie nahe einer von den Fehlern A, B, zu den grösten komme, so setze man die beyden schlimmsten Fälle, in welchen nemlich A oder B in der That am weitesten von dem wahren abweichen. Ist es A, so trage man FH aus A in e, im andern Falle aus B in d, und es ist klar, daß im ersten Fall e, im andern aber d der wahre Punct seyn würde. Es ist aber für sich klar, daß dieser Punct nothwendig zwischen d und e fallen muß. Das aus den Observationen gefundene Mittel fällt in C, wie wir es zum Beyspiele angenommen haben, und Ce wird demnach die gröste mögliche Abweichung von dem wahren seyn. Die Abweichung ist aber wahrscheinlich viel kleiner, weil die Fälle, wo e und d richtig wären, unter allen die geringste Möglichkeit haben.

Fig. 63.

§. 444.

Man sieht hieraus, daß de die nothwendigen Schranken sind, in welche der wahre Punct fallen muß. Es ist auch klar, daß sie desto enger werden, je weniger AB von FG unterschieden ist. Dieser Unterschied aber wird am wahrscheinlichsten geringer, wenn die Observationen mehrmalen wiederholt worden.

§. 445.

Die Lage des Puncts C hängt von der Wahrscheinlichkeit ab. Daher ist es möglich, daß C ausserhalb de fallen, und wenn dieses geschieht, so wird man immer sicherer gehen, wenn man von de das Mittel nimmt. Denn es ist klar, daß in solchem Falle die Schranken de entweder sehr enge seyn müssen, oder daß unter den Observationen die meisten auf eine Seite, und nur eine oder wenige auf die andere fallen, welches aber nothwendig sehr selten geschieht.

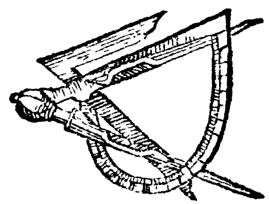
§. 446.

Wenn wir hier unter vielen Observationen das Mittel nehmen, so versteht sich von selbsten, daß es unter den Observationen selbsten, und nicht unter denen Größen geschehen müsse, die man daraus findet. Es ist dieses um so natürlicher, da man sonsten jede Observation besonders berechnen müßte, und diesen Umweg erspart man sich gerne. Hingegen giebt es Fälle, wo man denselben gebrauchen muß, und dieses geschieht allezeit, wo man die Fehler nicht anders als aus ihren Folgen erkennen kann. Von solchen haben wir bereits (§. 51. 317.) zween, und unter denselben den erstern in dieser Absicht betrachtet. Bey dem andern (§. 317.) bleibt noch anzumerken, daß da man die Fehler in den Winkeln A, B, C nur aus den Durchschnitten
Fig. 56. d, e, f erkennt, dieselben erst müssen berechnet werden. Zu dem Ende kann man von den drey Linien Ad, Bd, Ce je zwo und zwo als richtig annehmen, und dabey berechnen, wie viel die dritte fehlen würde, wenn die andern zwo richtig wären. So z. E. wenn Bf und Cf richtig sind, so muß Ae durch den Punct f gehen. Dadurch wird der Winkel eAC um etwas grösser, und der Unterschied wäre sein Fehler. Von diesem Fehler aber muß DAC nur der dritte Theil seyn, weil ähnliche Fehler auch auf die übrigen beyden Winkel müssen gelegt werden. Ich sage der dritte Theil, weil

nicht nur in allen drey Winkel sind, sondern weil man hier jeden Fehler als gleich möglich ansehen muß. In dem erstern Fall (§. 51.) war dieses anders, und wenn man beyde vergleicht, wird sich der Unterschied von selbsten zeigen.

§. 447.

Eben so wenn man setzt in dem Vierecke ABCD habe man die vier Seiten richtig ge- Fig. 64.
messen, hingegen haben sich bey den Winkeln A, B, C, D Fehler eingeschlichen, ergeben sich hier zweyerley Berechnungen. Einmal müssen die Winkel 360 Grad machen. Ist ihre Summe grösser oder kleiner, so kann man anfangen den vierten Theil des Unterschiedes auf jeden Winkel zu schlagen, damit ihre Summe 360 Grad mache. Nach dieser ersten Verbesserung nimmt man jeden Winkel z. E. A an, und berechnet daraus vermittelst der bekannten Seite die übrigen drey, so hat man für jeden Winkel vier Werthe, nemlich den erst corrigirten, und die drey daraus gefundene. Aus diesen läßt sich sodann das Mittel nehmen, welches zwar dem wahren näher kommen, aber nicht allemal die Figur schließen wird.



II.

Die Visirkunst

sowohl ganz als nicht ganz angefüllter liegender Fässer, auf ihre einfachsten Gründe und Regeln gebracht.

§. 1.

Die Werke der Natur und der Kunst hängen von unzähligen besondern Umständen ab, welche alle dazu beytragen, daß man in demjenigen, so daran auszumessen ist, an keine geometrische Schärfe gedenken kann. Kömmt dabey irgendwo eine krumme Linie vor, so sind diejenigen, von welchen wir die Gleichungen wissen, viel zu einfach, als daß sich die Natur damit begnügen könnte, und daher kömmt es, daß was wir aus solchen Gleichungen finden, nach aller Strenge zu reden, sich nur auf die angenommene Hypothese erstreckt, mit der Sache selbsten verglichen, davon immer mehr oder minder abweicht, und alles was man dabey thun kann, ist daß man suche die Abweichung so gering zu machen als möglich ist.

§. 2.

Es ist daher schon längst eingeführt, daß man in der Ausübung nur in so ferne auf solche Abweichungen sieht, in so ferne man sie nicht als Kleinigkeiten ansehen kann, oder in so ferne sie in der That eine Verbesserung zulassen. In den übrigen Fällen begnügt man sich die Ausmessung brauchbar und leichte zu machen, und dieser Absicht wird öfters eine schärfere Bestimmung aufgeopfert, so bald sie in der Ausübung schwerer und mühsamer wird.

§. 3.

Ohne hievon andere Beyspiele anzuführen, werde ich bloß bey demjenigen bleiben, welches den Innhalt dieser Abhandlung ausmacht. Die Ausmessung der Fässer leidet unstreitig keine geometrische Schärfe, und diese Schärfe würde auch dann noch fehlen, wenn sich der Arbeiter alle Mühe gäbe, ein Faß vollkommen cylindrisch zu machen. In diesem Falle würde zwar unstreitig die Ausmessung leichter, und der Fehler geringer, allein man müßte dennoch immer nur annehmen, daß das Faß vollkommen cylindrisch sey, und daß man seine innwendige Länge und Höhe ebenfalls vollkommen genau gemessen habe. Das letztere geht nicht an, weil bey den schärfesten Ausmessungen Fehler unterlaufen, und das erstere wird aus vielen Gründen eben so unmöglich,

möglich, als es unmöglich ist geometrische Linien und Flächen zu machen. Man kann denselben mit mehrerer Sorgfalt näher kommen, aber die Beschaffenheit der Materie und die Arbeit selbsten läßt die völlige Vollkommenheit nicht zu. Ueberdiß ist keine Materie unveränderlich, und bey dem Holze mag besonders die Feuchtigkeit seine Figur alle Augenblicke ändern.

§. 4.

Dieser letzte Umstand ist eine der Hauptursachen, warum die Fässer nicht cylindrisch, sondern in der Mitte erhaben gemacht werden. Dieses geht nicht an, wenn das Faß cylindrisch ist. Bey diesen müßte jeder Reif mit Schrauben zusammen gezogen werden, wozu wegen des starken Anreibens eine nicht geringe Kraft erfordert würde, und man erhielt dadurch eine andere Hauptabsicht nicht, daß das das Faß stärker zusammen hält, wenn es mehr eine sphärische als cylindrische Figur hat, und seine Böden werden dadurch ungleich fester, daß sie dem Druck der flüßigen Materie, damit das Faß ausgefüllt ist, viel grössern Widerstand thun können.

§. 5.

Hiedurch aber wird die Berechnung des Innhalts der Fässer schwerer und weitläuftiger. Man kann das Faß nimmer als einen einfachen Cylinder ansehen, und betrachtet es demnach als das Mittel von zween Cylindern, deren Diameter dem grössern und kleinern Diameter des Fasses gleich sind, und die beyde mit dem Fasse gleiche Länge haben. Andere haben es als zween abgestumpfte Kegel betrachtet. Noch andere haben die Krümmung der Dauben, als Theile von Parabeln, Hyperbeln oder Ellipsen angesehen, und den Innhalt solcher Fässer berechnet, welche diese Figur haben. Diese Ausmessungen sind allerdings von einander unterschieden. Die zween Kegel fehlen am meisten, das Mittel zwischen beyden Cylindern fast eben so viel, doch etwas weniger, die Kegelschnitte kommen der Wahrheit viel näher.

§. 6.

Um aber zu sehen, worauf hier die Hauptsache ankomme, so müssen wir die Fehler von einander unterscheiden, die man bey allen Ausmessungen entweder nothwendig zulassen muß, oder die man verbessern kann. Es stelle ABCD den Abschnitt des Fasses der Länge nach vor, so betrachtet man IL als eine Axe, und man setzt, die Figur des Fasses entstehe, wenn sich AEDI um die Axe IL herum drehet, oder als wenn AED der Lehrbogen wäre, nach welchem man die Figur des Fasses an einer Drechselbank bilden wollte. Dieses wird bey allen Ausmessungen zum voraus gesetzt. Fig. 1.

setzt. Es ist klar, daß einige Dauben mehr oder minder gekrümmt seyn können, als der angenommene Lehrbogen AED. Allein man betrachtet diese Abweichung als eine Kleinigkeit, so lange dieselbe nicht merklich in die Augen fällt.

§. 7.

Aus eben dem Grunde nimmt man an, die beyden Böden stehen auf der Axe senkrecht, ihre innere Fläche sey eben, und beyde einander parallel. Auch hier giebt es kleine Abweichungen, welche aber wiederum als Kleinigkeiten angesehen werden. Der Boden AB mag in I etwas dicker seyn als in A und B. Daher ist AD etwas länger als IL, und mißt man IL, so muß man ehender zugeben als verkleinern.

§. 8.

Es sey EH der gröste Diameter, so ist öfters GL grösser als GI, und die beyden Dimeter AB, DC werden ungleich. Dieser Umstand, welcher öfters vorkommt, hat am wenigsten zu bedeuten, weil jede Helfte besonders gemessen werden kann.

§. 9.

Ist das Faß voll, so kann man die innwendige Länge IL nicht messen. Man mißt die Auswendige, und zieht die Dicke beyder Böden davon ab. Muß diese Dicke nur geschätzt werden, so ist diß ein Uebel, den die Theorie nicht helfen kann.

§. 10.

Es kömmt also fürnehmlich auf die Krümmung der Dauben AED an. Was hierinn gefehlt wird, zieht sich um das ganze Faß herum, und mag einen desto merklichern Fehler geben. Aus diesem Grunde wird der Innhalt des Fasses augenscheinlich zu klein, wenn man die Puncte A, E, D beybehält, aber die Linien AE, ED gerade setzt, und daher die beyden Helften des Fasses als abgestumpfte Kegel annimmt.

§. 11.

Die wahre Krümmung der Dauben AED läßt sich deßwegen nicht auf eine allgemeine Formel bringen, weil sie bey jedem Fasse, und man kann sagen bey jeder Daube, und bey einer und eben derselben zu verschiedenen Zeiten verschieden ist. Wir haben schon angemerkt, daß die ab und zunehmende Feuchtigkeit die Figur eines Fasses mehr oder mindern ändern kann. Ueberdiß müßte die wahre Krümmung aus mechanischen und hydrodynamischen Gründen bestimmt werden. So weit sind aber diese Wissenschaften noch nicht gebracht. Man könnte AED als die Krümmung einer elastischen Linie ansehen, allein dieses

dieses währte nur so lange, als die Daube mit andern noch nicht zusammen gebunden wird. Wer es auf Versuche will ankommen lassen, der kann jeden innern Diameter MN und seinen Abstand ME oder MA messen. Dadurch wird sich die krumme Linie construiren lassen.

§. 12.

Diese Umwege mögen aber als überflüssig angesehen werden. Da man in der Theorie dem ganzen Fasse eine gewisse Regelmässigkeit geben muß (§. 6. 7.) so wollen wir zu den beyden erst angezogenen noch eine dritte mitnehmen, und ohne aus AED eben eine Parabel oder andere speciale Linie zu machen, wird es genug seyn, wenn wir setzen, die Krümmung von E in A und D sey einförmig. Da sie überhaupt nicht groß ist, so läßt sich hier weder an Asymtoten, noch an Wendungspuncte noch andere dergleichen Umschweife gedenken. Die Faßdauben haben ohnehin eine ziemlich einförmige Krümmung, man mag sie nun vom Biegen oder von ihrer allmähligen Schmälerung gegen beyde Ende herleiten. Und da sie sich nicht alle auf gleiche Art schmälern, so kann aus allen zusammen das Mittel genommen werden Es ist für sich klar, daß dieses Mittel regulärer seyn wird, als jede Daube für sich betrachtet. Jeder Diameter MN ist in Verhältniß

niß des Mittels, so man aus allen Dauben in der Weite AM nimmt, und EH höchstens um einen vierten Theil grösser als AB.

§. 13.

Da also die Krümmung AED sehr einförmig, und überdiß nicht groß ist, so kann man dafür ohne merklichen Fehler einen Circulbogen setzen, es sey, daß derselbe durch die drey Puncte A, E, D gehe, oder daß sein Halbmesser dem Halbmesser der Krümmung der Dauben in E gleich sey. So wie die Fässer sind, muß dieses nothwendig angehen. Der Bogen AE reicht selten auf 25 Grade, und bey den meisten Fässern ist er geringer, daher sind diese beyden Circulbögen von einander wenig unterschieden, und da der erstere zum Gebrauch bequemer ist, und leichter kann gefunden werden, so werden wir auch dabey bleiben.

§. 14.

Man verfällt zwar hiebey auf eine etwas weitläuftige Differentialrechnung, allein wir werden sehen, daß sie sich sehr in die Kürze ziehen, und zu dem Gebrauch eben so bequem machen läßt, als wenn man das Mittel zwischen zween Cylindern nähme.

§. 15.

Es sey EK der Halbmesser des Circulbogens AED, mnNM stelle einen Abschnitt des Fasses

Fasses vor, dessen Breite Pp unendlich klein ist, und es soll desselben Inhalt gefunden werden. Man nenne

$$EK = r \qquad KG = a$$
$$AKE = v$$

Der Inhalt des Theiles MNHE sey $= z$, folglich des Theiles mnNM $= dz$, die Verhältniß des Diameters zum Umkreyse setze man $= 1 : \pi$, so ist

$$MP = r.\cos v - a$$
$$Pp = r.\, d\sin v$$

folglich

$$dz = \pi\,(r\cos v - a).^2\, r\, d\sin v$$

diese Formel integrirt, giebt

$$\frac{z}{\pi} = r^3\sin v - \tfrac{1}{3}r^3\sin v^3 - r^2 a v - r^2 a \sin v\cos v + a^2 r\sin v$$

§. 16.

Die Theile dieser Formel sind aber nicht diejenigen, welche zum Gebrauche die bequemsten wären, weil man eigentlich AB, EH, IG ausmißt. Man setze demnach

$$AI = \tfrac{1}{2}AB = \beta.$$
$$EG = \tfrac{1}{2}EH = b,$$
$$IG = x$$

und

$$b - \beta = c$$

so ist für das halbe Faß AEHB

r =

$$r = \frac{xx + cc}{2c}$$

$$a = \frac{xx + cc - 2bc}{2c}$$

$$r\sin v = x$$

$$r\cos v = \frac{xx - cc}{2c}$$

und der Bogen AE bey nahe

$$rv = \frac{3x(xx + cc)}{3xx + cc}$$

§. 17.

Werden diese Ausdrücke in der gefundenen Gleichung substituirt, und die Reduction so vorgenommen, daß man alle Glieder, in welchen c über den vierten Grad steigt, als viel zu klein, wegläßt, so erlangt man

$$z = \pi x\left(bb - \tfrac{2}{3}cb + \tfrac{2}{9}c^2 + \frac{2bc^3}{9xx} - \frac{2c^4}{27xx}\right)$$

§. 18.

Die beyden letzten Glieder dieser Gleichung können noch füglich weggelassen werden, weil c fast immer kleiner als $\tfrac{1}{4}$b ist. Man setze $c = \tfrac{1}{4}b$, so ist

$$\frac{2bc^3}{9xx} = \frac{b^4}{288\,x^2}$$

$$\frac{2}{27}\frac{c^4}{xx} = \frac{b^4}{3402x^2}$$

Nun ist in den meisten Fässern $b < x$, folglich wenn man den Ausdruck $2bc^3 : 9xx$ wegläßt, so fehlt man auf 300 Maaß kaum eine. Es ist klar, daß dieser Fehler beym Visiren unmerklich wird. Wir haben demnach

$$z = \pi x(bb - \tfrac{2}{3}cb + \tfrac{2}{9}c^2)$$

§. 19.

Diese Formel kann auf verschiedene Arten brauchbar gemacht werden. Die erste ist folgende: Man mißt den Inhalt der beyden Böden AB, CD, und den Inhalt des Circuls der, durch EH gehet. Diesen nimmt man vierfach, und addirt die beyden Böden dazu. Von der Summe wird der 6te Theil genommen, und mit der ganzen Länge des Fasses multiplicirt. Denn der Inhalt des Bodens ist $= \pi\beta\beta = \pi(b^2 - 2bc + cc)$ der Inhalt des Circuls QH ist $= \pi bb$, folglich dieser zweymal zu jenem addirt, giebt $\pi(3b^2 - 2bc + cc)$ und daher

$$z' = \pi x(bb - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{cc}{3})$$

Es sollte aber seyn

$$z = \pi x(bb - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{2}{9}cc)$$

Daher der Unterschied nur auf $\frac{1}{9}cc$ sich beläuft, welches auf 150 Maaß kaum eine fehlt.

§. 20.

§. 20.

Aus dieser Methode sieht man, daß der Inhalt des Fasses nicht das Mittel zwischen dem äussern und innern Cylinder ist. Denn der äussere Cylinder ist $= 2x\pi bb$ der innere $= 2x\pi(bb - 2bc + cc)$ folglich das Mittel

$$z'' = 2x\pi(bb - bc + \tfrac{1}{2}cc)$$

Es sollte aber seyn

$$z = 2x\pi(bb - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{2}{9}cc)$$

Daher fehlt es um

$$2x\pi(\tfrac{1}{3}bc - \tfrac{5}{18}cc)$$

und um so viel giebt die gemeine Methode zu Visiren zu wenig. Ist $c = \frac{1}{4}b$, so wird auf jede 12 Maaß eine gefehlt.

§. 21.

Man kömmt also der Wahrheit ungleich näher, wenn man den äussersten Cylinder doppelt genommen zu dem innern addirt, und von der Summe den dritten Theil nimmt. Denn der Fehler beträgt auf 150 Maaß kaum eine, und mehrentheils ist er geringer.

§. 22.

Die andere Methode ist diese. Man nehme den Diameter der Spundtiefe vierfach, und addire die Diameter der beyden Böden dazu, von der Summe nehme

 man

man den sechsten Theil, so wird man den Diameter eines Cylinders bekommen, welcher bey nahe mit dem Fasse von gleichem Inhalt ist. Wir wollen dieses wiederum von der einen Helfte des Fasses zeigen. Es ist demnach

$$2EG = 2b$$
$$AI = b - c$$

folglich

$$\frac{2EG + AI}{3} = b - \tfrac{1}{3}c$$

daher

$$z''' = \pi x(bb - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{1}{9}cc)$$

Es sollte aber seyn

$$z = \pi x(bb - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{2}{9}cc)$$

Der Fehler ist wie vorhin $= \frac{1}{9}cc$, und daher auf 150 Maaß kaum eine. Dieser Fehler aber ist dem bey der ersten Methode entgegen gesetzt. Es entsteht daher also die dritte Methode.

§. 23.

Man vereinige nemlich beyde erstere Methoden, und nehme das Mittel daraus. Denn es giebt

die erste $z' = \pi x(bb - \frac{2}{3}bc + \frac{cc}{3})$ (§. 19)

die andere $z''' = \pi x(bb - \frac{2}{3}bc + \frac{1}{9}cc)$ (§. 22.)

Das

Das Mittel

$$\frac{z' + z''}{2} = \pi x(bb - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{2}{9}cc)$$

Es kömmt also mit der angenommenen Formel vollkommen überein.

§. 24.

Da aber diese Formel wegen der weggelassenen Glieder in der Gleichung (§. 18.) auf 300 Maaß eine zu wenig giebt, hingegen die erste Methode auf 150 Maaß eine mehr als die angenommene Formel, so ist klar, daß sich diese Fehler gewissermaaßen compensiren, und wir können demnach die erste Methode als die leichteste und richtigste angeben, zumal bey denen Fässern, die eine stärkere Krümmung haben.

§. 25.

Um noch aus andern Betrachtungen zu zeigen, daß wir für die Krümmung AED sicher einen Circulbogen setzen können, so dürfen wir nur andere krumme Linien dafür annehmen, welche von der wahren Krümmung der Dauben nicht augenscheinlich abweichen. Wir wollen ein einiges Beyspiel anführen. EK sey die Axe einer Parabel, die durch die 3 Puncte A, E, D geht. Man setze $QM = \xi$, und die übrigen Benennungen seyn wie vorhin, so findet man

 EG

$$EG - MP = n\xi\xi$$

daher

$$dz'''' = \pi\,(b - n\xi\xi)^2\,d\xi$$

und integrirt

$$z'''' = \pi\xi\left(bb - \frac{2\,n\xi\xi b}{3} + \frac{n^2\xi^4}{5}\right)$$

oder für die ganze Länge $GI = x$

$$z'''' = \pi x\left(bb - \tfrac{2}{3}cb + \tfrac{1}{5}cc\right)$$

Es ist aber

$$z = \pi x\left(bb - \tfrac{2}{3}cb + \tfrac{2}{9}cc\right)$$

Daher ist das parabolische Faß um $\frac{1}{45}cc$ kleiner als das circulare. Ist $c = \frac{1}{4}b$, so wird der Unterschied auf 720 Maaß eine betragen. Hiezu muß man noch den Fehler rechnen, den wir wegen der Weglassung zweyer Ausdrücke bey der Formel §. 18. für geringe geachtet. Er betrug auf 300 Maaß höchstens eine. Dadurch wird der Unterschied auf 210 Maaß höchstens eine betragen. Bey andern krummen Linien, die nicht augenscheinlich von der Krümmung der Dauben abgehen, ist derselbe nicht grösser, und daher beym Visiren der Fässer zu verachten.

§. 26.

Setzt man hingegen AEHB sey ein abgestümpfter Kegel, so findet man auf eben die Art seinen

Inhalt $= \pi x\left(bb - cb + \tfrac{1}{3}cc\right)$

Der wahre ist $z = \pi x\left(bb - \tfrac{2}{3}cb + \tfrac{2}{9}cc\right)$

Es

Es ist also der Inhalt des Kegels um $\pi x\left(\frac{1}{3}cb - \frac{1}{9}cc\right)$ kleiner, und folglich der Fehler, wie bey dem Mittel aus zween Cylindern auf 12 Maaß eine. (§. 20.) In den kleinern Unterschieden trift dieses Mittel noch näher zu als der Kegel.

§. 27.

Wir können es demnach als ausgemacht ansehen, daß man das Faß weder als zween abgestumpfte Kegel noch als das Mittel aus dem grössern und kleinern Cylinder genau berechnen könne, sondern daß die Berechnung am genauesten seyn werde, wenn man von dem grössern Cylinder zween Drittel nimmt, und sie zu einem Drittel des kleinern Cylinders addirt. Wir werden es im folgenden durch wirklich angestellte Proben bestätigen. Es ist für sich klar, daß diese Methode nicht schwerer noch weitläuftiger ist, als die gemeine, die man bißher gebraucht hat, und daß sie keine andere Ausmessungen erfordert. Hingegen der Fehler 20 bis 30 mal geringer wird. Allein da sie sich nur auf solche Fässer erstreckt, die ganz voll sind, oder deren ganzen Inhalt man wissen will, so müssen wir noch eine Methode für solche suchen, die nicht ganz voll sind, und nach der Länge liegen, und diese Methode soll nicht viel weitläuftiger seyn als die erst gefundene für ganz angefüllte Fässer ist.

§. 28.

§. 28.

Man stelle sich vor, daß man ein liegendes Faß von vorne betrachte. AQB sey sein Boden, AB desselben Diameter, EMH sey der gröste Umfang der durch das Spundloch gehe, EH desselben Diameter, G der gemeinsame Mittelpunct. EH sey vertical, und die Oberfläche des Weins reiche bis an die horizontale Linie mPNM, so ist nNB der Abschnitt des Bodens, und zugleich der kleinste, mMH aber der so durchs Spundloch geht, und daher der gröste. Diese beyde Abschnitte stehen um die halbe Länge des Fasses von einander ab, und man kann sich zwischen denselben unzählige andere gedenken, die desto grösser werden, je näher sie bey dem grösten mMH sind, weil die Dicke des Fasses bis zum Spundloch immer zunimmt. Alle sind auf der Axe des Fasses senkrecht, und daher unter sich parallel. Fig. 2.

§. 29.

Man ziehe die beyden Linien GN, GQM aus dem Mittelpunct G in N und M, so läßt sich die Helfte des Fasses EHME in folgende vier Stücke zerfällen, wenn man sich vorstellt, es werde der Länge nach durch die Linien HGE, PM, GN, GM, NQ durchschnitten.

1.° GPN ist ein dreyeckiges Prisma, dessen Basis GPN, und alle Seiten flach sind.

2.° GNQ

2.° GNQ ist ebenfalls ein Prisma, oder wenn man lieber will ein Ausschnitt eines Cylinders, dessen Grundfläche GNQ oder ein Ausschnitt aus dem Boden des Fasses ist.

3.° GQMH ist ein wirklicher Ausschnitt des Fasses, daher ist sein Inhalt dem Inhalte des ganzen Fasses proportional.

4.° NQM ist ein Ausschnitt, den die 3te Figur vorstellt. In dieser ist nqQN die Fläche, welche an dem Ausschnitte des Cylinders (No. 2) liegt, und folglich ein wenig ausgehölt. NQM ist die Basis auf dem Circul, der durchs Spundloch geht, nN die halbe Länge des Fasses. Die Fläche nMq ist convex, und liegt an den Faßdauben an, weil sie ihre Krümmung hat. Der Raum nqMQN ist mit Wein ausgefüllt.

Diese vier Ausschnitte werden nun folgender maaßen verglichen.

§. 30.

Da sie alle gleiche Länge haben, so dürfen wir nur auf ihre Grundflächen sehen, und dieses hat bey dem Prisma und Ausschnitte des Cylinders (§. 29. No. 1. 2.) keine Schwürigkeit. Der Ausschnitt des Fasses (No. 3) Fig. 2. ist dem ganzen Fasse proportional, seine gröste Grundfläche GMH verhält sich zur kleinsten GQB, wie die Circul, daraus sie geschnitten sind. Man coaequirt sie demnach, wenn man

$\frac{2}{3}$ von

$\frac{2}{3}$ von GMH zu $\frac{1}{3}$ von GQB addirt, und die Summe mit der Länge des Fasses multiplicirt giebt den Inhalt des Ausschnittes. Denn es ist klar, daß dieser Inhalt auf eben die Art gefunden wird, wie der vom ganzen Fasse.

§. 31.

Der Ausschnitt (No. 4.) den die dritte Figur vorstellt, wird folgendermaaßen coaequirt. Fig. 3. Da die Fläche NQqn einwerts hohl, die Fläche nMq aber auswerts erhaben ist, und beyde Krümmungen überdiß sehr geringe sind, so compensiren sie einander, und man kann sie beyde als flach ansehen. Wenn man sich daher ein Prisma nmqMQN vorstellt, dessen Basis NQM ist, so fällt davon die Pyramide Mnqm und folglich der 3te Theil weg. Daher findet man den Inhalt des Ausschnittes (No. 4.) sehr genau, wenn man $\frac{2}{3}$ von der Basi NMQ mit der Länge des Fasses multiplicirt.

§. 32.

Indem wir auf diese Art jeden der vier Ausschnitte allein betrachten, so scheinet es, als wenn jeder besonders müßte berechnet werden, und dieses würde allerdings weitläuftig fallen. Allein sie lassen sich zu allem Glücke so unter einander vergleichen, daß man diese Mühe sparen kann. Denn da wir für die beyden irregulairen Ausschnitte ihre coaequirte Grundfläche gefunden haben, so können wir die Länge des Fasses anfangs bey Seite setzen, weil die Ausschnitte sich wie die gefundenen Grundflächen verhalten. Demnach ist

No. 1 $=$ GPN Fig. 2.
No. 2 $=$ GNQ
No. 3 $= \frac{2}{3}$ GMH $+ \frac{1}{3}$ GQB
No. 4 $= \frac{2}{3}$ NMQ

Folglich die Summe von allen

$$= GPN + GNQ + \tfrac{2}{3} GMH + \tfrac{1}{3} GQB + \tfrac{2}{3} NMQ$$

ist die ganze Basis, welche mit der Länge des Fasses multiplicirt werden muß, um den Inhalt seiner Helfte EMH zu finden.

§. 33.

Es ist aber

$$GPN = \tfrac{2}{3} GPN + \tfrac{1}{3} GPN$$
$$GNQ = \tfrac{2}{3} GNQ + \tfrac{1}{3} GNQ$$

Hiedurch läßt sich die gefundene Summe in folgende zwo vertheilen, sie ist

$$= \tfrac{2}{3}(GPN + GNQ + GMH + NMQ)$$
$$+ \tfrac{1}{3}(GPN + GNQ + GQB)$$

§. 34.

Der erste dieser Theile macht $\frac{2}{3}$ von dem Abschnitte MHP, und die andere $\frac{1}{3}$ von dem Abschnitte NBP aus. Daher ist die gefundene Summe der coaequirten Grundflächen kürzer

$$= \tfrac{2}{3} MHP + \tfrac{1}{3} NBP$$

§. 35.

Da diese mit der Länge des Fasses multiplicirt, nur die Helfte seines Inhalts giebt, so dürfen wir, um den ganzen zu finden, weiter nichts thun, als die ganzen Abschnitte mHM, nBN nehmen. Ist demnach die Länge des Fasses $=l$, sein Innhalt $=z$, so ist

$$z = l\left(\tfrac{2}{3}\,mHM + \tfrac{1}{3}\,nBN\right)$$

§. 36.

Hiedurch haben wir für die Visirung der Fässer, die nach der Länge liegen eine allgemeine Regel, die wir folgendermaaßen mehr in die Sinne fallend machen wollen.

Setzet, das Faß habe in der Mitte bey dem Spundloch noch einen Boden, der mit den beyden andern parallel sey. Messet den Raum aus, den der Wein auf diesen dreyen Boden benetzet oder bedeckt. Den Raum des mittlern Bodens nehmet vierfach, und addirt dazu den Raum der äussern Böden. Die Summe wird durch 6 getheilt, und was herauskömmt mit der Länge des Fasses multiplicirt, so wird das Product der Inhalt des Fasses seyn, so weit es angefüllt ist.

§. 37.

Der Fehler, den diese Regel giebt, ist an sich betrachtet am kleinsten, wenn das Faß halb voll ist, in Vergleichung mit der Quantität Weines wird er desto geringer, je mehr das Faß angefüllt ist, vorausgesetzt, daß man die Höhe des Weines genau ausmesse. Da aber bey der Ausmessung aus verschiedenen Ursachen kleine Fehler unterlaufen, so werden ihre Folgen am grösten, wenn das Faß halb voll ist. Denn alsdenn ist die Oberfläche des Weins am breitesten.

§. 38.

Um diese Regel brauchbar zu machen, kömmt alles auf ein Mittel an, den Inhalt der Abschnitte nBN, mHM auf eine leichte Art durch die gemessenen Tiefen PB, PH zu bestimmen, und denselben in Maaße zu verwandeln.

§. 39.

Wir wollen bey der Ausmessung der Fässer, die ganz voll sind, den Anfang machen, und da wir überhaupt den cylindrischen Visirstab gebrauchen werden, so werden wir desselben Verfertigung mit wenigem berühren. Es ist bekannt, daß man denselben deßwegen eingeführt hat, weil sein Gebrauch sehr leicht ist, und weil man jedes Faß in einen Cylinder verwandelt, welcher mit demselben gleiche Länge hat, und dessen Grundfläche das Mittel zwischen der Fläche des grösten und kleinsten Durchschnittes des Fasses ist. Da die Cylinder in Verhältniß ihrer Höhen und ihrer

rer Grundflächen sind, so nimmt man ein cylindrisches Gefäß an, daß ein Maaß hält, man vergleicht seine Höhe mit der Höhe des Fasses, und bestimmt wie vielmal jene in dieser enthalten. Ferner sieht man auch wie vielmal der Diameter in dem Diameter des Cylinders enthalten, in welchen man das Faß verwandelt. Diese letztere Zahl wird quadrirt, und das Quadrat mit der erstern multiplicirt, und so findet man, wie viel Maaß das Faß hält.

§. 40.

Um sich die Mühe des Quadrirens zu ersparen, hat man einen doppelten Maaßstab angenommen. Man stellt sich eine Reyhe cylindrischer Gefäße von gleicher Höhe vor, die der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ꝛc. Maaß halten, und sucht ihre Diameter. Da sich diese wie die Quadratwurzeln der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ꝛc. verhalten, so können sie alle berechnet werden, so bald man den Diameter von einem dieser Gefäße weiß. Ueberhaupt nimmt man dazu das Gefäß an, so nur ein Maaß hält. Es ist aber für sich klar, daß wenn man seine Höhe und seinen Diameter nicht genau weiß, der Fehler sich vergrössert. Da es aber nothwendig ist, den Visirstab genau zu machen, so thut man besser, wenn man zur Grundlage desselben ein grösseres Gefäß annimmt, und die gesuchten Diameter daraus berechnet. Man kann sich hiezu ein cubisches Gefäß machen lassen, und dasselbe mit etlichen Eymern Wasser füllen, und sodann in Cubiczollen, und ihren Decimaltheilen den Inhalt berechnen. Dieser wird durch die Anzahl von Maaßen dividirt, die man hineingegossen, und so erhält man den Inhalt einer Maaß in Cubiczollen und ihren Decimaltheilen. Diese verwandelt man in einen Cylinder von gleicher Höhe und Diameter, welcher aber wiederum sehr genau muß berechnet werden. Da man hiedurch die Höhe des zum Grunde gelegten Cylinders findet, so wird sie auf der einen Seite des Visirstabes herumgetragen, und da diese Seite dazu dient, die Länge des Fasses auszumessen, so wollen wir sie die Längenseite nennen. Jeden Theil kann man in 10 kleinere, und diese wiederum in 10 andere eintheilen, um nicht nur die Länge des Fasses desto genauer zu messen, sondern auch die Rechnung auf Decimalbrüche zu bringen, welche viel leichter sind.

§. 41.

Den ebenfalls gefundenen Diameter der cylindrischen Maaße quadrirt man, und das Quadrat wird der Ordnung nach mit 1, 2, 3, 4 ꝛc. multiplicirt, und aus dem Producte die Quadratwurzel gezogen, und so erhält man die Länge der Diameter von solchen Cylindern, die

die gleiche Höhe haben, aber 2, 3, 4, 5 Maaß halten. Oder man sucht von dem einfachen Diameter seinen Logarithmus, und addirt zu demselben der Ordnung nach die Helfte der Logarithmen von 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. so erhält man die Logarithmen der gesuchten Diameter. Oder man theilt den einfachen Diameter in 1000 Theile wirklich ein, und in solchen Theilen findet man die Diameter von 2, 3, 4, 5 ꝛc. Maaß aus solchen Tabellen, die man zur Vervielfältigung der Figuren schon längst berechnet hat. Diese gefundene Diameter werden auf die andere Seite des Maaßstabes getragen, welche die Flächenseite heißen mag. Es ist gut wenn man auch hier Decimaltheile mitnimmt, so weit es sich wegen der allmähligen Verschmälerung der ganzen Theile thun läßt.

§. 42.

Der gemeine Gebrauch dieser zwo Seiten ist folgender. Mit der Längenseite mißt man die innere Länge des Fasses IL, oder wenn man die äussere mißt, so muß die Dicke beyder Böden abgezogen werden. Mit der flachen Seite mißt man die Diameter EH, AB und auch DC, wenn AB und DC ungleich sind. Von den beyden Böden nimmt man in solchem Fall das Mittel, und endlich von diesem Mittel und dem Diameter EH, das andere Mittel, und dieses wird mit der gefundenen Länge IL multiplicirt, so erhält man den

Fig. 1.

Inhalt

Inhalt eines Cylinders, welcher das Mittel zwischen dem grösten und dem kleinsten ist, und welchen man dem Inhalt des Fasses gleich setzt.

§. 43.

Wir haben aber schon gesehen, daß man auf diese Art auf jede zwölf Maaß eine fehlen kann, welcher Fehler allerdings beträchtlich ist. Es ist also zu zeigen, wie man mit diesem Visirstaabe der Wahrheit näher kommen könne. Und hiezu gebrauchen wir die oben erwiesene erste Methode, mit welcher man, wenn bey dem Ausmessen selbst keine Fehler vorgehen, und das Faß keine merkliche Irregularität hat, auf 150 Maaß kaum eine fehlt.

§. 43.

Mit der Längenseite wird IL wie vorhin ausgemessen. Eben so mißt man mit der Flächenseite die Diameter EH, AB, DC. Von der für EH gefundenen Zahl nimmt man zween Drittel, und von AB deßgleichen von DC einen Sechstel, und addirt diese Theile zusammen. Die Summe wird mit der gefundenen Länge multiplicirt, und das Product giebt die Anzahl von Maaßen, die das Faß hält, oder wovon es kaum um $\frac{1}{150}$ unterschieden ist, wenn keine andere Unrichtigkeiten dazu kommen.

§. 44.

Wenn man den Diameter des einen Bodens nicht mißt, so nimmt man von dem gemessenen einen Drittel, und addirt ihn zu den $\frac{2}{3}$ von der Spundtiefe EH, um die Summe mit der Länge zu multipliciren, und dadurch den Inhalt zu finden.

§. 45.

Will man der Mühe überhoben seyn, von EH zween Drittel, und von AB einen Drittel zu nehmen, so ist das beste, wenn man die Zahlen auf der Flächenseite des Visirstabes gleich Anfangs dazu einrichtet. Es ist klar, daß man zu dem Ende diese Seite doppelt eintheilen muß. Für die erste Abtheilung nimmt man für jede drey Maaße nur zwo, und für die andere Abtheilung nur eine. Jene mag die Spundseite, diese aber die Bodenseite heißen. In diesem Fall aber muß entweder nur ein Boden gemessen, oder von beyden das Mittel genommen werden, wenn sie ungleich sind, ehe man die Zahl zu derjenigen addirt, so man bey Ausmessung der Spundtiefe gefunden.

§. 46.

Um nun auch die Genauigkeit durch angestellte Proben zu untersuchen, so sind mir folgende mitgetheilt worden. Die Fässer wurden nach der Methode des §. 43. gemessen.

Faß No.	Längenmaaß von IL	Flächenmaaß von AB	DC	EH	gemessener Inhalt
I.	9,83	18,75	18,75	29,15	255 Maaß
II.	9,80	21,45	21,35	29,15	260
III.	9,60	19,35	18,95	31,90	260
IV.	6,97	29,92	30,25	39,70	252

§. 47.

Wird nun $\frac{1}{6}$AB + $\frac{1}{6}$DC + $\frac{2}{3}$EH mit IL multiplicirt, so findet man den Inhalt

Faß	gemessen	berechnet	Unterschied
I.	255	252,4	− 2,6.
II.	260	260,3	+ 0,3.
III.	260	264,9	+ 4,9.
IV.	252	254,4	+ 2,4.

§. 48.

Der Unterschied bey dem dritten Fasse ist bey nahe 5 Maaß auf 260, folglich auf 52 Maaß eine, welches ziemlich merklich ist, und vermuthlich von der Irregularität des Fasses, oder vielleicht auch von einem kleinen Fehler in der Ausmessung herkömmt. Die Fehler bey dem ersten und vierten Fasse sind $2\frac{1}{2}$ Maaß, und daher auf 100 Maaß eine, welches erträglicher ist. Aber alle diese Fehler sind geringe gegen die, welche nach der gemeinen Art vorkommen, wo man zwischen AB und EH das Mittel nimmt, oder $\frac{1}{4}$AB + $\frac{1}{4}$CD + $\frac{1}{2}$EH mit IL multiplicirt. Denn so bekommen wir

Faß	gemessen	berechnet	Unterschied.
I	255	235,0	— 20,0.
II	260	247,6	— 12,4.
III	260	245,0	— 15,0.
IV	252	243,2	— 8,8.

§. 49.

Der kleinste Fehler beläuft sich hier auf 9 Maaß, und ist nur deßwegen geringer als die übrigen, weil bey dem 4ten Fasse die Diameter AB, EH nur um den achten Theil von einander unterschieden waren. Denn es ist klar, daß die gemeine Visirart richtig zutreffen würde, wenn diese Diameter vollkommen gleich wären. Hingegen bey dem ersten Fasse waren die Diameter AB, EH wie 4 zu 5, und daher um den 5ten Theil unterschieden, und dieser Umstand brachte den Fehler bis auf 20 Maaß. Bey dem 2ten Fasse waren die Diameter bey nahe wie 6 zu 7. Und dieses machte wiederum den Fehler kleiner. Endlich bey dem 3ten Fasse waren sie wie 7 zu 9. Und daher müßte der Fehler geringer als bey dem ersten, hingegen aber grösser als bey dem zweyten seyn. Es ist also auch hieraus offenbar, daß bey der gemeinen Visirart der Fehler zugleich mit der Krümmung der Dauben grösser wird.

§. 50.

Bey unserer Methode verhält es sich ganz anders, und man kann aus diesen Beyspielen sehen, daß sich der Fehler nicht nach der Krümmung der Dauben richtet, sondern bloß von der Irregularität des Fasses und von der Genauigkeit in der Ausmessung abhängt. Denn das erste Faß hatte die stärkste, das vierte aber die kleinste Krümmung, und die Fehler waren gleich, und zwar noch mit dem Unterschied, daß die Rechnung bey dem ersten Fasse $2\frac{1}{2}$ Maaß zu wenig, bey dem vierdten aber zu viel gab.

§. 51.

Da übrigens die Fässer mit Eymern gefüllt werden, so giebt es noch einen andern Umstand, welcher machen kann, daß das wirklich genommene Maaß fehlt, und diesen müssen wir hier anführen, weil auch bey Verfertigung der Visirstäbe viel darauf ankömmt.

§. 52.

Einmal wenn man solche Eymer zum Messen gebraucht, die bis oben angefüllt werden müssen, so läßt sich die Fläche des Wassers nicht so eben machen, als wenn man ihn mit Sand gefüllt und abgestrichen hätte. Ist der Eymer in Ruhe, und sein oberer Stand ist nicht benetzt, so kann man ungleich mehr Wasser hinein gießen, als es gebrauchte, um ihn eben anzufüllen, zumal wenn man sachte eingeußt. Man darf sich hier nur erinnern, daß man in gleichen Umständen das Wasser in in einem Glase aufthürmen kann, wenn man allmählig kleine Münzen hineinsinken läßt. Doch so sachte geht man mit dem Auffüllen nicht um, und die Eymer werden selten oder gar nicht bis oben angefüllt. Sie haben mehrentheils an der innern Seite zwey Zeichen, bis an welche die Fläche des Wassers gehen muß. Da aber wenn die innere Seite des Eymers einmal naß ist, das Wasser an derselben sich herauf zieht, und daher höher steht als in der Mitte, so wird gewöhnlich geschehen, daß in der That weniger Wasser eingegossen wird, als es seyn sollte. Hat der Eymer überdiß eine breite Fläche, so hat man bald eine Maaß und mehr weniger, als man anrechnet. Will man aber dem Maaße zugeben, so daß das Zeichen in dem Wasser stehe, so ist nichts leichters als daß man der Sache zu viel thut, und daher mehr Wasser hineingeußt, als nöthig wäre um das Maaß auszumachen.

§. 53.

Um die Ausmessung solcher Fässer, die nicht ganz angefüllt sind, leicht und genau zu machen, wozu man bißher noch kein Mittel gehabt, werden wir oben (§. 36.) angegebene allgemeine Methode gebrauchen, und zu dem Ende folgende Betrachtungen voraus schicken.

§. 54.

§. 54.

Diese Methode fordert, daß man die beyden Ausschnitte nBN, mHM ausmesse. Soll Fig. 2. man hiezu den cylindrischen Maaßstab gebrauchen, so stelle man sich zwey Gefäße vor, deren Grundfläche die Abschnitte nBN, mHM, die Höhe aber der Länge des Fasses gleich ist. Solche Gefäße sind Abschnitte von Cylindern, und ihr Inhalt wird gefunden, wenn man ihre Höhe mit der Grundfläche multiplicirt.

§. 55.

Die Höhe ist der Länge des Fasses gleich, und wird daher mit der Längenseite des Visirstabes schlechthin ausgemessen. Demnach kömmt die ganze Schwürigkeit auf die Ausmessung der Grundfläche an. Zu diesem Ende wollen wir anmerken, daß der Abschnitt mHM zu dem ganzen Circul mEMH eine bestimmte Verhältniß hat, so bald die Verhältniß zwischen dem Diameter EH und dem Theile PH bestimmt ist, und überhaupt verhalten sich ähnliche Abschnitte eines Circuls, wie die Quadrate der Diameter.

§. 56.

Wenn man demnach den Diameter EH in 100 gleiche Theile theilt, und für jeden Theil HP den Inhalt des Abschnittes mHMm in solchen Theilen berechnet, deren der ganze

 Circul

Circul 10000 hat, so entsteht eine Tabelle, in welche man für jede hundertste Theile des Diameters den Inhalt des dazu gehörigen Abschnittes in 10000ten Theilen des Inhalts des ganzen Circuls findet. Diese Tabelle ist folgende:

HP	mHM	HP	mHM	HP	mHM	HP	mHM
0	0	25	1955	50	5000	75	8045
1	17	26	2066	51	5128	76	8155
2	48	27	2179	52	5255	77	8263
3	87	28	2293	53	5382	78	8369
4	134	29	2407	54	5509	79	8473
5	189	30	2523	55	5636	80	8576
6	247	31	2641	56	5762	81	8677
7	308	32	2759	57	5888	82	8777
8	374	33	2878	58	6014	83	8875
9	443	34	2998	59	6139	84	8970
10	518	35	3119	60	6264	85	9060
11	597	36	3241	61	6389	86	9149
12	679	37	3363	62	6513	87	9236
13	764	38	3487	63	6637	88	9321
14	851	39	3611	64	6759	89	9403
15	940	40	3736	65	6881	90	9482
16	1030	41	3861	66	7002	91	9557
17	1125	42	3986	67	7122	92	9626
18	1223	43	4112	68	7241	93	9692
19	1323	44	4238	69	7359	94	9753
20	1424	45	4364	70	7477	95	9811
21	1527	46	4491	71	7593	96	9866
22	1631	47	4618	72	7707	97	9913
23	1737	48	4745	73	7821	98	9952
24	1845	49	4872	74	7934	99	9983
25	1955	50	5000	75	8045	100	10000.

§. 57.

§. 57.

Will man nun den wahren Inhalt des Abschnittes mHM vermittelst des cylindrischen Maaßstabes finden, so gebraucht man erstlich die Längenseite, und mit dieser mißt man sowohl den Diameter EH, als die die Höhe des Weins HP. Sodann macht man die Regel de Tri: Wie sich EH zu HP verhält, so verhält sich 100 zu der vierten Zahl, welche man auch in Decimaltheilen suchen muß, eben so wie auch EH und PH bis auf Decimaltheile müssen gemessen werden. Hat man nun diese vierte Zahl gefunden, so wird sie in vorstehender Tabelle in der Columne HP aufgesucht, und die nebenstehende Zahl in der Columne mHM herausgenommen, welches, wenn es vorkömmt mit dem sogenannten Proportionaltheil geschehen muß.

§. 58.

Sodann gebraucht man die Flächenseite des Visirstabes, und mit derselben mißt man nochmals den Diameter EH, um den Inhalt des ganzen Circuls EmHM in Maaßen zu finden. Diß giebt die zweyte Regel de Tri: Wie sich 10000 zu der erst aus der Columne mHM genommenen Zahl verhält, so verhält sich die gefundene Anzahl der Maaße des ganzen Circuls EmHM zu der vierten Zahl, und

diese

diese wird sodann der gesuchte Inhalt des Abschnittes mHMm seyn.

§. 59.

Auf eine ähnliche Art findet man auch den Innhalt des andern Abschnittes nBNn, und es gebraucht also in allem vier Regeln de Tri. Allein da man die Höhe des Weins PB nicht unmittelbar ausmessen kann, so muß man erstlich die beyden Diameter EH, AB messen, und sie von einander abziehen. Die Helfte des Unterschiedes ist BH, und muß von der Spundhöhe des Weins PH, die man ausgemessen hat, abgezogen werden, damit man PB bekomme.

§. 60.

Ein Beyspiel mag diese Regeln aufklären. Setzet, man habe mit der Längenseite gefunden

AB = 4,34. den Circul AnBN = 18,85
EH = 5,40. EmHM = 29,25.
PH = 3,25.

so ist

EH — AB = 5,40 — 434 = 1,06

folglich

BH = 0,53

und daher

PB = PH — BH = 3,25 — 0,53 = 2,72

Nun setzt man die Regel de Tri

5,40

5,40 : 3,25 = 100 : 60,2.
4,34 : 2,72 = 100 : 62,7.

Diese zwo Zahlen 60,2 und 62,7 werden in der ersten Columne der Tafel aufgesucht, und die nebenstehende Zahl mit ihrem Proportionaltheil ist

für 60,2 = 6314.
für 62,7 = 6600.

Hieraus folgen die zwo andern Regeln de Tri

10000 : 6314 = 29,25 : 18,45.
10000 : 6600 = 18,85 : 12,44.

folglich hält der Abschnitt

mHM = 18,45 Maaß
nBN = 12,44 Maaß

§. 61.

Ist dieses gefunden, so wird $\frac{2}{3}$ von mHM zu $\frac{1}{3}$ von nBN addirt, und die Summe mit der Länge des Fasses multiplicirt, und das Product wird der gesuchte Inhalt des Weines seyn, mit welchem das Faß bis in mM angefüllt ist.

§. 62.

Es ist nicht zu läugnen, daß diese Methode weitläuftiger ist, als die für ganz volle Fässer. Indessen ist sie für solche Fälle, die man noch nicht berechnen können, und dabey die Hoffnung sie genau zu berechnen sehr gering

war,

war, allerdings noch kurz genug. Folgende Betrachtungen werden dienen, sie noch kürzer zu machen.

§. 63.

Einmal, wenn man die vier Regeln de Tri beybehalten will, so kann man die vorstehende Tabelle vollständiger machen, und sie biß auf jede tausendste Theile des Diameters ausdehnen. Dieses wird die Mühe sparen den Proportionaltheil zu suchen, weil man denselben nicht leicht genauer gebraucht.

§. 64.

Ebenfalls wenn man die Regeln de Tri abkürzen will, kann man statt solcher Tabelle, logarithmische Tabellen gebrauchen, welche sich aus der Art wie die Regeln de Tri gebraucht werden, leicht finden und berechnen lassen. Will man es noch kürzer machen, so verfertigt man sich zween logarithmische Stäbe, welche denen, die Scheffelt beschrieben, ganz ähnlich seyn werden.

§. 65.

Allein alle diese Mittel sind für die Faßvisirer gar zu weitläuftig, welche viel lieber das Ausmessen abkürzen, und an statt sich mit Rechnungen den Kopf zu brechen, williger Octavbände von ausgerechneten Tabellen bey sich tragen, um jeden vorkommenden Fall darin berechnet zu finden. Zu diesen werde ich nun den Stoff und die Abkürzungen in der Rechnung angeben.

§. 66.

Es ist für sich klar, daß man hier Faßböden von verschiedenen Diametern, und für jeden Boden so viel Abschnitte berechnen müsse, als es nöthig ist, daß der Unterschied bey Weglassung des Proportionaltheils, welchen man aus Vergleichung zwoer Tabellen suchen müßte, sehr geringe sey. Der Proportionaltheil in einer jeden Tabelle für verschiedene Abschnitte mag beybehalten werden.

§. 67.

Da hier alles nach dem Längenmaaße genommen wird, und die Diameter der cylindrischen Maaße an verschiedenen Orten verschieden sind, so wollen wir dennoch mehrerer Deutlichkeit halben drey solche Diameter auf einen Schuh rechnen, weil die Größe der Fässer dadurch deutlicher wird.

§. 68.

Man setze, der Diameter des kleinsten Fasses sey ein Schuh, des größten aber 10 Schuh, und so weit mag also die Tabelle ausgedehnt werden. Es bleibt hiebey viel willkührliches. Es müssen daher von 3 bis 30 cylindrischen Maaßen alle Diameter angenommen werden, welche

welche von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$ von einander unterschieden sind. Hieraus entstehen so viele einzele Tabellen als Zahlen in der Reyhe 3,0; 3,1; 3,2; 3,3; 3,4 ꝛc. = = = 29,9. 30,0 sind. Diese Zahlen sind zugleich die Ueberschrift der Tabellen dazu sie gehören. Und wenn der Visirer die Spundtiefe oder den Diameter des Bodens eines Fasses bis auf zehnte Theile seiner Längenseite mißt, und z. E. 4,3 findet, so wird er die Tabelle aufschlagen können. Hiedurch haben wir also die Anzahl der Tabellen bestimmt, und jede dient für einen besondern Diameter.

§. 69.

Jeder Diameter muß ferner in eine gewisse Anzahl gleiche Theile getheilt werden, damit man die dazu gehörigen Abschnitte berechnen könne. So z. E. kann man in den ersten Tabellen von 3,0 bis 10,0 bey jeden Decimaltheilen bleiben, daß man den Diameter 3,0 in 30, den Diameter 3,1 in 31, den Diameter 3,2 in 32 Theile eintheile. Von 10,0 bis 20,0 kann man zween Decimaltheile nehmen, und von 20, bis 30,0 drey, damit man einer Tabelle nicht überflüßig viel Columnen gebe.

§. 70.

Da wir hier die cylindrische Maaß gleich hoch und weit annehmen, so giebt das Quadrat eines jeden Diameters, den Inhalt des Circuls in cylindrischen Maaßen. Daher kann vorstehende Tabelle, besonders wenn sie weiter ausgedehnt wird, zur Erleichterung der Berechnung dienen.

§. 71.

Sie wird noch auf folgende Art abgekürzt. Man nehme von 3,0, bis 30,0 nur die Primzahlen, und berechne für selbige die Tabellen, so werden sich die übrigen Tabellen aus diesen durch eine leichte Multiplication und durch Aufsuchung der Proportionaltheile geben. Z. E. aus der Tabelle 3,1 findet man die Tabelle 6,2, 9,3. 12,4. 15,5 ꝛc. wenn man ihre Zahlen mit 4, 9, 16, 25 ꝛc. multiplicirt, und die so dazwischen fehlen, einschaltet.

§. 72.

Eben so kann jede Tabelle nur bis auf die Helfte gerechnet werden, denn die andere Helfte findet man, wenn man die Zahlen der ersten von dem Inhalt des ganzen Circuls abzieht.

§. 73.

Sind diese Tabellen berechnet, so gebraucht der Visirer nur die Längenseite des cylindrischen Visirstabes. Er mißt die beyden Diameter AB, EH bis auf Decimal theile, und die Zahlen geben ihm die Tabellen an, die er Fig. I.

er aufzuschlagen hat. Sodann mißt er die Höhe des Weins durch das Spundloch, und diese sucht er in der Tabelle auf, die er für EH aufgeschlagen, so findet er gleich daneben wie viel Maaß der Abschnitt des Circuls hält, der der Durchschnitt des Fasses beym Spundloch ist. Ferner zieht er die beyden Diameter von einander, und die Helfte des Unterschiedes von der Spundhöhe des Weines ab, den Ueberrest sucht er in der andern aufgeschlagenen Tabelle auf, und da findet er die Maaß Wein, der auf dem Abschnitte des Bodens ist. Von diesen addirt er den dritten Theil zu zween Drittel der erstern, und multiplicirt die Summe durch die Länge des Fasses, welche mit eben der Längenseite gemessen wird, um den Inhalt des Weins im Fasse zu finden.

§. 74.

Diese Methode Fässer zu visiren, die nicht ganz voll sind, ist die kürzeste, die ich habe finden können. Sie erspart dem Visirer die meiste Mühe, wenn diese Tabellen ein für allemal berechnet sind. Wenn es sich der vorkommenden Fälle halber die Mühe lohnt, die Tabellen zu berechnen, so bleibt noch zu zeigen, ob es ihre Genauigkeit ebenfals verdiene. Hierüber ist mir folgender Versuch mitgetheilt worden den ich in die Kürze gezogen vortragen will.

§. 75.

Ein Faß das 54 Eymer und 7 Maaß, oder jeden Eymer zu 32 Maaß gerechnet, in allem 1735 Maaß hielte, wurde nach und nach mit Wasser angefüllt. Von drey zu drey Eymern, die man hineingosse, wurde die Spundhöhe mit einem cylindrischen Visirstabe gemessen. Da es hiebey nur auf die Proportion ankömmt, so merke ich kürzlich an, daß sich der Diameter des Fasses beym Spundloche zum Diameter des Bodens wie 1000 zu 881 oder ihre Quadrate wie 125 zu 97 verhielten. Vertheilt man demnach die 1735 so, daß der Circul EMH doppelt, hingegen AQB einfach genommen wird, um die Reductionen zu ersparen, so hat Fig. 2

2.EMHm = = 1250 Maaß
ANBn = = 485 Maaß.

Werden endlich beyde Diameter EH, AB in 1000 Theile getheilt, und in diesen Theilen die Höhen HP, BP für jede drey Eymer ausgedrückt, so kann der berechnete Inhalt aus obiger Tabelle gefunden, und mit dem gemessenen verglichen werden. Alles wird in folgender Tabelle vorgestellt:

HP	BP	gemessen	berechnet	Unterschied
118	69	96	98,0	+ 2,0
178	141	192	192,1	+ 0,1
232	201	288	287,1	— 0,9
279	253	384	380,6	— 3,4
328	309	480	481,2	+ 1,2
370	358	576	576,4	+ 0,4
417	407	672	673,5	+ 1,5
459	453	768	773,3	+ 5,3
502	502	864	871,3	+ 7,3
543	549	960	966,1	+ 6,1
585	597	1056	1051,5	— 4,5
630	647	1152	1161,5	+ 9,5
672	699	1248	1257,5	+ 9,5
716	743	1344	1344,2	+ 0,2
760	794	1440	1437,6	— 2,4
819	856	1536	1537,7	+ 1,7
880	920	1632	1632,0	+ 0,0
1000	1000	1735	1735,0	+ 0,0.

§. 76.

Die grösten Unterschiede fallen in die Mitte, weil daselbst ein geringer Fehler in der Ausmessung der Spundhöhe des Weines sich auf die gröste Fläche ausbreitet. Der gröste ist $9\frac{1}{2}$ Maaß, und beträgt folglich auf 120 Maaß kaum eine, welches allerdings sehr wenig ist, und die Genauigkeit der Methode eben so wohl als die von der Ausmessung anzeigt.

§. 77.

§. 77.

Auf dem cylindrischen Maaßstabe gebraucht man die Flächenseite, um sich eine Multiplication zu ersparen. Ohne diesen Vortheil würde die Längenseite allein zureichend seyn. Setzet z. E. die Längenseite sey AB. Man habe mit derselben die Spundtiefe AD = 5, 6 die Bodentiefe AE = 4, 1 gemessen so ist nach der zweyten Methode (§. 22.) die coäquirte Tiefe AF = 5, 1. Dieses wäre demnach der Diameter eines Cylinders, der mit dem Fasse einerley Länge AC = 9, 2 und Inhalt hätte. Fig. 4.

§. 78.

Vermöge der Einrichtung des cylindrischen Maaßstaabes wird dieser Inhalt gefunden, wenn man den coäquirten Diameter AF = 5, 1 quadrirt, und das Quadrat 26,01 mit der Länge des Fasses AC = 9, 2 multiplicirt. Der Inhalt ist demnach = $239\frac{1}{3}$ Maaß. Hätte man die Flächenseite gebraucht, so würde man darauf das Quadrat 26, 01 vermöge der obigen Methode (§. 43.) sogleich gefunden und sich daher diese erste Multiplication erspart haben. Hingegen bleibt die andere bey dieser Abkürzung noch nothwendig. Ich habe demnach auf ein Mittel gedacht, diese ebenfalls zu ersparen, welches ich nun folgender gestallt vortragen werde.

 §. 79.

§. 79.

Der cylindrische Maaßstab ist so eingetheilt, daß wenn die Länge des Fasses dem coäquirten Diameter AF gleich wäre, dieser Diameter nur dürfte cubirt werden, um den Inhalt des Fasses zu haben. Denn man müßte das Quadrat von AF mit der Länge, welche in diesem Falle ebenmäßig AF ist, multipliciren, dadurch verfällt man nothwendig auf den Cubum von dieser Zahl. Dieser so schickliche Umstand würde die Längen- und Flächenseite des Visirstabes mit einem male überflüßig machen, weil man statt der Zahlen auf der Längenseite nur ihre Cubos hinschreiben dürfte, und das cubiren würde dadurch erspart, weil diese cubische Seite sogleich den Inhalt des Fasses angeben würde. Da aber die Fässer so schicklich nicht sind, so laßt uns sehen, wie man der ungleichen Länge und Tiefe ungeacht, diese Erleichterung erreichen kann.

§. 80.

Wir haben schon oben eine Verwandlung mit dem Fasse vorgenommen (§. 27.) welche dasselbe zu einem coaequirten Cylinder von gleichem Inhalt macht. Aber dieser Cylinder behielte eben die Länge, die das Faß hat. Diese erste Verwandlung bleibt immer nothwendig, und wir werden demnach AF als seinen Diameter, AC als seine Länge ansehen.

§. 81.

Nun ist die Frage diesen Cylinder in einen andern zu verwandeln, der von gleichem Inhalte, und dessen Diameter und Länge einander gleich seyn. Setzet dieser verglichene Diameter und Länge seyen AG, so ist aus voriger Betrachtung (§. 79.) offenbar, daß sein Inhalt der Cubus von AG seyn werde. Dieser Inhalt aber ist dem von dem länglichten oder coaequirten Cylinder gleich, folglich haben wir

$$AG^3 = AF.^2 AC$$

aus dieser Formel erhellt, daß AG die erste von den zwo mittlern Proportionalflächen sey, die zwischen AF und AC fallen. Denn die Regel für diese Proportionalzahlen giebt, daß man das Quadrat von AF mit AC multipliciren, und aus dem Product die Cubicwurzel ausziehen solle.

§. 82

Würde man demnach vermittelst der beyden Puncte F und C den Punct G auf eine leichte Art finden können, so ist unstreitig, daß der Visirstab AB nur die cubische Seite (§. 79.) haben dürfte, und daß man auf solche Art bey dem Punct G die Zahl $239\frac{1}{3}$ als den Inhalt des Fasses finden würde.

§. 83.

Eben so würde man den Punct G nicht einmal nöthig haben, wenn sich der Inhalt

$AF.^2 AC$ durch solche Cubos ausdrücken liesse, welche durch die beyden F, C gefunden werden könnten.

§. 84.

Diese Mittel sind möglich. Wir wollen bey dem letztern anfangen. Da die beyden Längen AF, AC gegeben sind, so haben wir den Cubum

ihrer Summe

$$(AC+AF)^3 = AC^3 + 3\,AC.^2 AF + 3\,AC.AF^2 + AF^3$$

ihrer Differenz

$$(AC-AF)^3 = AC^3 - 3\,AC.^2 AF + 3\,AC.AF^2 - AF^3$$

diese beyde Cubos addirt, geben

$$(AC+AF)^3 + (AC-AF)^3 = 2AC^3 + 6\,AC.AF^2$$

folglich der Inhalt des Fasses

$$AC.AF^2 = \frac{(AC+AF)^3 + (AC-AF)^3 - 2\,AC.^3}{6}$$

durch solche Cubos ausgedrückt, deren Puncte sich auf dem Visirstabe finden lassen.

§. 85.

Man trage nemlich den coaequirten Diameter EF, aus dem Längenpunct C in f und e, so ist der Inhalt des Fasses

$$AF.^2 AC = \frac{Af^3 + Ae^3 - 2.AC^3}{6}$$

Wären demnach bey den Puncten e, f, C die Cubi geschrieben, so würde man bey

$$\begin{array}{lr} f & 2942 \\ e & 69 \\ \hline & 2993 \end{array}$$

finden, und von der Summe 2993 müßte man 1557 als die doppelte Zahl des Puncts C abziehen, und den Ueberrest 1436 durch 6 theilen, und so würde man den Inhalt $239\frac{1}{3}$ bekommen.

§. 86.

Will man die Tafeln von den Cubiczahlen hiebey gebrauchen, so kann man sich mit der Längenseite des Visirstabes begnügen. Die Rechnung wird folgende seyn. Man setze, der coaequirte Diameter AF sey 5, 1. Die Länge des Fasses AC sey 9, 2. Diese beyden werden addirt und subtrahirt, die Summe ist 14, 3, der Unterschied 4, 1. In den Tabellen findet man den Cubus

von der Summe	= 2924
von der Differenz	= 69
diese addirt, geben	2993
den doppelten Cubum von AC	= 1557
abgezogen bleiben	1436
Hievon der 6te Theil	= $239\frac{1}{3}$

giebt den Inhalt des Fasses.

§. 87.

Will man sich die Mühe ersparen den Cubum von AC zu verdoppeln, und den gefundenen Rest durch 6 zu theilen, so kann man sich hiezu besondere Tabellen berechnen, in welchen

welchen diese Division schon mitgenommen ist. Diese Tabellen haben drey Columnen. In der ersten stehen die Zahlen Ae, Af, AC der natürlichen Ordnung nach, in der zweyten steht der sechste, und in der dritten der dritte Theil von ihren Cubis. Die Zahlen Ae, Af, AC können mit ihren Decimaltheilen genommen werden. Diese Tabellen würden ungefehr so aussehen:

Theile	Summe und Differenz	Länge
1, 0	0, 2	0, 3
1, 1	0, 2	0, 4
1, 2	0, 3	0, 6
1, 3	0, 4	0, 7
1, 4	0, 5	0, 9
1, 5	0, 6	1, 1
1, 6	0, 7	1, 4
1, 7	0, 8	1, 6
1, 8	1, 0	1, 9
1, 9	1, 1	2, 3
2, 0	1, 3	2, 7
2, 1	1, 5	3, 1
2, 2	1, 8	3, 5
2, 3	2, 0	4, 1
2, 4	2, 3	4, 6
2, 5	2, 6	5, 2
2c.	2c.	2c.

§. 88.

Aus dieser Tabelle würde man für das vorige Exempel in der ersten Columne die Zahlen 14, 3; 4, 1 und 9, 2 aufsuchen. Neben den beyden erstern würde man in der zweyten Columne die Zahlen 487, 3 und 11, 5 finden, davon die Summe = 498, 8 ist. Von dieser Summe müßte man die Zahl 259, 5 welche in der dritten Columne neben der Länge des Fasses 9, 2 stünde, abziehen, und der Ueberrest 239, 3 oder 239⅓ würde den Inhalt des Fasses geben.

§. 89.

Es ist für sich klar, daß man die cubische Seite des Visirstabes auf eine ähnliche Art doppelt eintheilen kann. Wo auf der Längenseite die Längenmaaße würden zu stehen kommen, da müßte man auf der einen Eintheilung der cubischen Seiten den sechsten, auf der andern aber den dritten Theil des Cubi der Längenmaße hinschreiben. Die beyden Puncte e, f würden auf der ersten Eintheilung, der Punct C aber der zweyten genommen werden.

§. 90.

Da man den coäquirten Diameter AF von dem Längenpunct C an bis in f austragen muß, welches vermittelst eines jeden andern Stabes geschehen kann, so ist Af die Summe von dem Diameter und der Länge des Fasses. Hat demnach das Faß eine ansehnliche Größe, so ist leicht zu erachten, daß der Visirstab sehr lang seyn müßte, wenn man bey großen Fässern damit ausreichen wollte.

wollte. Man kann sich aber hiebey eines Vortheils bedienen, den wir bey dem einfachen cubischen Visirstabe (§. 79) durch ein Beyspiel erläutern wollen.

§. 91.

Es sey der Visirstab AB, der coaequirte Diameter AF, die Länge des Fasses AC. Da Fig. 5. nun der Stab zu kurz ist, als daß er sollte die Summe von AC und AF fassen können, so merke man die Zahlen, so bey den Puncten C und F stehen. Diese sind 800 und 150. Für diese nehme man die zehnfach kleinere 80 und 15 bey c und f. Man trage sodann Af aus c in e und f, woselbst sie die Zahlen 6, 3 und 310, 8 abschneiden, welche ebenfalls zehnfach kleiner sind. Nun ist der Inhalt des Fasses

$$= 10. \left(\frac{Ae + Ag - 2\,Ac}{6}\right)$$

folglich

$$= \frac{10.(6,3 + 310,8 - 160)}{6} = 262 \text{ Maaß.}$$

§. 92.

Man sieht leicht, daß man statt des zehnten Theils auch nur die Helfte den dritten, vierten oder jeden andern Theil hätte nehmen können, weil man hiedurch die Ausmessung eines grössern Fasses auf ein anderes reducirt, daß der halbe, dritte, vierte 2c. zehnte Theil von dem

dem vorgegebenen ist, und in allem gleiche Proportion mit demselben hat. Je weniger man hiebey verkleinern darf, desto genauer wird auch die Ausmessung, weil man in diesem Falle auf dem Stabe noch kleinere Theile unterscheiden kann. Der hier beschriebene Vortheil erstreckt sich ebenfalls auf die gedoppelte Eintheilung wovon wir vorhin (§. 89.) geredt haben.

§. 93.

Bey der Visirung ganzer Fässer, die wir hier angegeben haben, kömmt ein Umstand vor, welcher verdient mit andern Worten ausgedruckt zu werden, damit er desto klarer in die Augen falle. Denn will man das Faß in einen Cylinder verwandeln, der von gleichem Diameter und Länge sey, so muß man zwischen der Bodentiefe AE, der Spundtiefe Fig. 4. AD und der Länge des Fasses AC auf zweyerley Art eine von zwo mittlern Proportionalgrößen suchen, und zwar

1.° Zwischen den beyden Diametern AD und AE sucht man zwo arithmetische mittlere Proportionalgrößen, davon man die behält, die näher bey D ist, nemlich AF. Dieses geschieht schlechthin indem man ED in 3 Theile theilt, und einen dritten Theil aus D in F trägt.

2.° Hat man F arithmetisch gefunden, so müssen zwischen AF, als dem coaequirten Diameter und der Länge des Fasses AC, zwo

zwo geometrische mitlere Proportional-größen gesucht werden, von welchen man die behält, die näher bey AF ist, nemlich AG, und diese wird der Diameter und die Länge des Cylinders seyn, der mit dem Fasse gleichen Inhalt hat (§. 81.)

§. 94.

Der Punct G kann nicht dadurch gefunden werden, daß man FC in drey gleiche Theile theile, und FG = $\frac{1}{3}$ FC mache, weil die Proportionalität geometrisch ist. Hingegen kann es durch die Logarithmen geschehen. Man ziehe von dem Logarithmo von AC den Logarithmum von AF ab. Von dem Ueberrest nehme man den dritten Theil, und addire ihn zum Logarithmo von AF, so findet man den Logarithmum von AG, und folgends AG.

§. 95.

Um sich den Gebrauch der Tabellen hiebey zu ersparen, so kann man die Logarithmen auf den Visirstab tragen, indem man jeden dahin schreibt, wo auf der Längenseite die ihm entsprechende Zahl steht, z. E. bey 1 schreibt man 0, bey 10 wird 1 gesetzt, und die übrigen Stellen vermittelst der Logarithmischen Tabellen ausgefüllt.

§. 96.

Da man auf diese Art neben den Puncten F, C sogleich ihre Logarithmen findet, so darf man

man nur den dritten Theil ihres Unterschiedes zu dem Logarithmo von F addiren, und dadurch wird man den Punct G finden, welcher auf der cubischen Seite die Anzahl der Maassen angeben wird, die das Faß hält (§. 82.)

§. 97.

Bey dieser Methode gebraucht man nur die cubische Eintheilung nebst den Logarithmen. Denn die drey Puncte E, D, C hat man durch die wirkliche Ausmessung. Man kann sie sogleich auf der logarithmischen Seite nehmen. Den Punct F findet man, weil DF = $\frac{1}{3}$ ED ist, und den Punct G mittelst der Logarithmen auf die erst beschriebene Art (§. 96.) Es ist demnach diese Methode für Fässer die ganz voll sind, unter allen die kürzeste, und hat mit den übrigen, die wir angegeben haben, gleiche Genauigkeit.

§. 98.

Um es aber an Methoden, den Visirstab auf alle Arten zu gebrauchen nicht ermangeln zu lassen, so wollen wir noch folgende beyfügen, welche zeigt, wie man den Inhalt des Fasses vermittelst der Längen- und Flächenseiten ohne Multiplication finden könne.

§. 99.

Auf der Längenseite nehme man die Länge des Fasses AC zum Exempel 10, auf der Flächenseite die coaequirte Fläche AF z. E. 26. Fig. 6.

Von

Von diesen beyden Zahlen nimmt man die Helften 5, 13. Man addirt und subtrahirt sie, so hat man 18 und 8. Diese beyden Zahlen werden auf der Längenseite aufgesucht, in K und H, so findet man auf der Flächenseite die entsprechenden Zahlen 324 und 64, welche von einander abgezogen, 260 als den Inhalt des Fasses geben.

§. 100.

Der Beweiß dieser Regel gründet sich darauf, daß wenn man von zwoen Zahlen z. E. 26 und 10, ihre halbe Summe 18 und halbe Differenz 8 quadrirt, der Unterschied dieser Quadrate eben das giebt, was herausgekommen wäre, wenn man die beyden vorgegebenen Zahlen mit einander multiplicirt hätte. Die halbe Summe und halbe Differenz ist leicht genommen, das Quadriren wird erspart, weil die Zahlen der Flächenseite an und für sich schon die Quadrate der Zahlen auf der Längenseite sind.

§. 101.

Wenn der Visirstab nicht lang genug ist, um die halbe Summe auf der Längenseite zu finden, so darf man nur von derselben und von der halben Differenz den halben, dritten, vierten 2c. Theil nehmen, und damit eben so verfahren, und man wird den Inhalt eines Fasses finden, welches 4, 9, 16 2c. mal kleiner ist.

III. An-

III.
Anmerkungen und Zusätze
zur
Trigonometrie.

§. 1.

Man kann die Trigonometrie als eine Wissenschaft ansehen, welche in Absicht auf ihre Vollständigkeit den übrigen Wissenschaften zum Muster dient. Sie zählt alle mögliche Fälle vor, die bey Auflösung der Triangel sich ereignen können. Sie vertheilt dieselben in ihre behörigen Classen, und da sie beweißt, daß weder mehr noch minder Fälle möglich sind, so giebt sie von jedem die Auflösung, und setzt dadurch ihre Besitzer in den Stand, ein jedes Stück eines Triangels aus denjenigen, die dazu nothwendig und zureichend sind, in jedem Falle zu finden. Wenn man sich dermalen noch Mühe giebt, etwas zu dieser Wissenschaft beyzutragen, so geschieht dieses nicht, um die Anzahl der möglichen Fälle zu vermehren, weil sich keine mehr hinzu setzen lassen, sondern nur um die Auflösung der Aufgaben schöner, kürzer und zu jeden Absichten bequemer zu machen, und hierinn läßt sie allerdings noch ein weites Feld zum Nachsinnen offen.

§. 2.

Die Abkürzung der Auflösungen richtet sich schlechthin nach den Absichten, zu denen man die trigonometrischen Aufgaben gebraucht. Wir können dieselben in drey Classen eintheilen. Einmal giebt es unzählige Fälle, wobey die bekannte Stücke eines Triangels in Zahlen gegeben sind, und auch die gesuchten in Zahlen verlangt werden. Dazu sind nun die trigonometrischen Tafeln gewidmet, und diejenige Auflösung wird für die schönste gehalten, welche zeigt, wie man das gesuchte vermittelst der Tabellen am kürzesten, und ohne überflüßige Rechnungen zu machen, finden könne. Schon vor der Erfindung der Logarithmen hat man sich bemühet alle Auflösungen in bloße Proportionen zu bringen, und nachdem der unsterblich verdiente Nepper die Logarithmen eingeführt, so ist diese Absicht noch ungleich nothwendiger geworden.

§. 3.

Sodann hat man angefangen die Trigonometrie mit großem Vortheil in den algebraischen Aufgaben, und daher hinwiederum die Algeber in den trigonometrischen zu gebrauchen. Jenes geschahe, um sich bey Berechnung allgemeiner Lehrsätze nicht nur der Linien und des pythagorischen Lehrsatzes, sondern auch der Winkel zu bedienen. Dadurch wurden

den viele Wurzelzeichen aus den Gleichungen weggeschaft, die Ausdrücke selbsten geschmeidiger gemacht, die Irrationalitäten in bloße Verhältnisse verwandelt, viele und verschiedene Verhältnisse durch einen einigen Winkel ausgedrückt, und die Lehrsätze, welche man zu Verwandlung der Irrationalgrößen jedesmal aus dem pythagorischen Lehrsatze und seinen Folgen herleiten mußte, wurden trigonometrische Lehrsätze, welche man sich nur wohl bekannt machen durfte, um Rechnungen zum Ende zu bringen, welche ohne dieselben ungemein weitläuftig und verwirrt würden gewesen seyn.

§. 4.

Diese Vortheile machten die Anwendung der Algeber auf die Trigonometrie noch nothwendiger, und es mußten für alle Fälle, die in derselben vorkommen, allgemeine Formeln gefunden werden, welche zu jeden besondern Absichten die bequemsten wären. Die Regeln, welche diese Formeln angeben, sind von denen, so man für die Zahlen gefunden, fast nothwendig verschieden. Sie treffen nur da zusammen, wo die ganze Auflösung in einer einigen Proportion besteht. Sobald man aber Perpendicularen fällen, Winkel und Seiten dadurch theilen, einen Theil durch den andern bestimmen, und nebst den Proportionen noch Winkel oder Seiten addiren und subtrahiren muß, da gebrauchen die algebraischen Auflösungen andere Kunstgriffe, und gehen von den Regeln, so man für Zahlen gebraucht, dadurch nothwendig ab.

§. 5.

Die dritte Absicht, wozu man angefangen, die Trigonometrie mit Vortheil zu gebrauchen, findet bey der Infinitesimalrechnung statt. Im Integriren verfällt man öfters und ohne Vermuthen auch da auf Circulbögen, ihre Sinus und Tangenten, wo man bey der ganzen Rechnung an keine Figur gedacht hatte. Die Integralrechnung würde uns gelehrt haben, die Winkel, Circulbögen und ihre Linien als Verhältnisse ansehen, wenn man auch sonsten nicht darauf gefallen wäre. Es ist leicht zu erachten, daß man auch hier auf neue Formeln in der Trigonometrie hat bedacht seyn müssen, welche von den beyden erstern Arten um so viel mehr verschieden waren, da es hier auf Differentialgleichungen und ihre Integration ankömmt. Und da dieser Theil der Trigonometrie ganz neu ist, so ist sich nicht zu verwundern, daß man die Anzahl der möglichen Fälle zur Zeit noch nicht bestimmt, noch in ihre gehörigen Classen gebracht hat. Es wird sich dieses auch nicht so leicht thun lassen, weil die Anzahl der Stücke, die in einer Differentialformel vorkommen können, nothwendig unbestimmt ist. Doch würde es Mittel geben,

geben, die einfachern Classen derselben zu durchgehen, und vollständige Auflösungen davon zu geben.

§. 6.

Wir können diese drey Absichten als den Umfang der Trigonometrie ansehen, bis sie sich mit der Zeit noch weiter entwickelt. Man sieht leicht, daß, was man hierinn noch thun kann, keine bloße Nachlese ist, sondern daß besonders in den zwo letztern Absichten noch Hauptstücke zurück bleiben, die weder so leicht noch so bald werden ins reine gebracht werden. Ich werde in dieser Abhandlung dasjenige vortragen, was mir gelegentlich darüber eingefallen, und es wird dem Leser nicht unangenehm seyn, wenn es mit schon bekannten Stücken vereinigt so vorgestellt wird, daß man, was zusammen genommen ein ganzes ausmacht, auf einen Anblick übersehen kann. In der Trigonometrie ist dieses so nothwendig als nützlich.

§. 7.

Man hat sich bisher in der sphärischen Trigonometrie einer Induction bedient, welche allerdings nach den strengsten Regeln zulässig ist, aber dabey man doch einen eigentlichen Beweiß verlangen kann, weil derselbe allemal auch vor der strengsten Induction merkliche Vorzüge hat. Man erweißt nemlich, daß bey den rechwinklichten sphärischen

Triangeln in allen 30 Fälle vorkommen. Der rechte Winkel weggelassen, sind noch fünf Stücke übrig. Von diesen fünf Stücken kann jedes ein Quäsitum seyn, und um dasselbe zu finden, muß man noch zwey von den vier übrigen wissen. Diese lassen sich auf sechserley Arten mit einander zu zwey und zwey combiniren. Daher kann jedes von den fünf Stücken auf sechserley Arten gefunden werden. Diß giebt in allem 5.6 = 30 Fälle.

§. 8.

Diese 30 Fälle lassen sich auf 10 bringen, wenn man zwischen den datis und dem quæsito keinen Unterschied macht, sondern nur auf die Verhältniß sieht, wodurch die fünf Stücke in einem rechtwinklichten Triangel zu 3 und 3 genommen einander bestimmen. Und auch diese 10 Fälle werden auf 6 gebracht, wenn man nicht auf die Lage der Theile sieht, sondern die so auf beyden Seiten des rechten Winkels liegen, oder die Cathetos und die an der Hypothenusa liegende Winkel verwechselt. Wir lassen es aber hier bey den 10 Fällen bewenden, um auch noch auf die Verschiedenheit der Lage zu sehen. Die Induction ist nun folgende.

§. 9.

Man erweißt die Verhältniß für jeden von diesen 10 oder auch von den 6 Fällen besonders

sonders. Und dabey blieb es, bis Nepper, dem wir so vieles in der Trigonometrie zu danken haben, auf den Einfall kam, diese zehen Auflösungen unter einander zu vergleichen, und etwas allgemeines dabey wahrnahm. Bey fünfen fand er die Verhältniß durch lauter Sinus, und bey den andern fünfen durch Sinus und Tangenten ausgedruckt. Dadurch und durch eine geschickte Benennung der Theile wurden alle 10 und daher auch alle 30 Fälle, so bey rechtwinklichten sphärischen Triangeln vorkommen können, auf zwo allgemeine Regeln gebracht, die man nun in allen Anfangsgründen der Sphäric findet, und mit großem Vortheil gebraucht.

§. 10.

Allerdings ist diese Induction so strenge, als man sie immer fordern kann. Man weiß alle mögliche Fälle: Man theilt sie in zwo Classen. Von jedem der zu einer dieser Classen gehört erweißt man eine gleiche Regel: Und man schließt mit Recht: **Was von jedem insbesondere gilt das gilt von allen, und folglich von der ganzen Classe.** Wären alle unsere allgemeine Sätze in der Naturlehre so richtig!

§. 11.

Allein sollte man wohl in der Meßkunst vermuthen, daß es darinn eine so richtige all-

 gemeinere

gemeinere Regel gäbe, und dennoch der Beweiß nicht anders als durch eine Induction aus jeden einzeln Beweisen könnte gefunden werden? Sollte nicht der Beweis so allgemein seyn können, als die Regel ist, oder muß man denselben hier nothwendig in fünf Theile zerfällen, und je einen Theil aus dem andern beweisen? Dieses letztere scheinet daher nothwendig zu seyn, weil die Nepperische Regel ohne Absicht auf den Unterschied zwischen Winkel und Seiten, die drey Theile des Triangels schlechthin den mittlern und die beyden anliegenden, oder die beyden abgesonderten benennt. Hingegen kommt in den Fällen selbsten der Unterschied zwischen Winkel und Seiten vor, und die Vorbereitung zum Gebrauch der Regel will, daß man für die Cathetos ihre Complemente nehmen soll.

§. 12.

Der allgemeine Beweiß dieser Regel setzt also die Verwandlung der Seiten in Winkel und der Winkel in Seiten zum voraus, und man sieht leicht daß fünf dergleichen Verwandlungen vorgehen müssen. Man nenne die beyden Winkel A, B, die Hypothenusa H, den Cathedum am Winkel A nenne man C, und den andern K, so hat man 1.° Für den mittlern und die anliegende Theile

HAB, ACH, CKA, BKH, KCB

für die beyden abgesonderten

HCK, ABK, CHB, BAC, KAH

Es entstehen daher fünf Triangel, da von jedem die Seiten und Winkel in die Seiten und Winkel vom folgenden oder in deren Complemente verwandelt werden, und es ist leicht zu erachten, daß die Complemente vorkommen müssen, so bald die Verwandlung einen Cathetum betrift. Diß folgt aus der erstbemeldten Vorbereitung zum Gebrauch der Nepperischen Regel.

§. 13.

Ein Versuch, den ich hierüber angestellt, hat mich gelehrt, daß diese fünf Triangel auf der Kugelfläche wirklich nicht nur hinter einander liegen, sondern daß sie um die Kugel herum einen Kreyß schliessen, und der fünfte eben so an den ersten stößt, wie der erste an den zweyten, und dieser an den dritten u. s. f. Die erste Figur stellt sie nach eben der Projection vor, nach welcher die Astrolabia entworfen werden, wenn das Aug im Pole und die Tafel in der Fläche des Aequators ist.

§. 14.

Es seyn AadF und ADcH zween gröste Circul der Kugel, P und C ihre Pole. Durch diese gehe der Circul cQPa, welcher zufolge Fig. I.

der Projection hier als eine gerade Linie erscheinet, weil das Auge im Nadir des Pols P ist. Ferner sey dPC ein jeder anderer Circul, durch den Pol P gezogen, welcher in C einen rechten Winkel macht, und den Triangel ABC ausbildet, den wir den ersten nennen wollen. Endlich ziehe man den Circul HGQb durch den andern Pol Q auf dC senkrecht, so werden durch die gezogenen Circul die fünf Triangel, die wir in der Figur schattirt haben, abgeschnitten, und es ist zu beweisen, daß es die verlangten sind. Hiebey kömmt es auf folgende Sätze an, die man aus den ersten Grundlehren der Sphäric leicht einsehen wird.

1.° Bey C, D, E, F, G sind die fünf rechte Winkel zu den fünf Triangeln.

2.° Die Bögen Aa, AD, Ac, AF, PC, Pd, Pa, PF, QD, Qc, QG, Qb sind Quadranten.

3.° Die Puncte A, B, H sind die Pole der Circul cPa, GQb, dPC. Daher sind auch

4.° Die Bögen Bb, BG, HC, Hd, HE Quadranten, woraus man leicht sieht, welche Bögen Complemente von den andern sind.

5.° Die Bögen Da = cF, Eb, aC = Fd, Db = cG und dE sind das Maaß der Winkel A, B, P, Q, H, weil ihre Schenkel Quadranten sind, und auf diesen Bögen

Bögen stehen. Hieraus ergiebt sich die Verwandlung der Winkel in Seiten und der Seiten in Winkel.

§. 15.

Wenn wir z. E. den Winkel A in seinen Verwandlungen durch alle fünf Triangel verfolgen, so finden wir

A = aD = 90° — DB = QP = 90° — FQ = cF = A.

Er bleibt also im ersten und fünften ein Winkel, im dritten wird er zur Hypothenusa, und im zweyten und vierten ist sein Complement ein Cathetus. Der Winkel B hat eben diese Verwandlungen, wenn wir vom 2ten Triangel den Anfang machen, oder vom ersten auf den fünften rückwerts gehen.

§. 16.

Ueberhaupt sieht man, daß jede Hypothenuse ihre zwey Complemente neben sich hat, welche in den anstoßenden Triangeln Catheti werden, und in den zwey entferntesten wird sie zum Scheitelwinkel, welcher in dem Fünfecke ABPQH der Hypothenuse gegen über liegt.

§. 17.

Wenn wir die Cathetos in ( ) einschliessen, und dadurch ihre Complemente verstehen,

hen, so wird folgende Tabelle alle Verwandlungen vorstellen.

Triangel

1		2		3		4		5
A	=	(PD)	=	QP	=	(FQ)	=	A
B	=	B	=	(QE)	=	QH	=	(HG)
(AC)	=	P	=	P	=	(FH)	=	AH
(BC)	=	PB	=	(EP)	=	H	=	H
AB	=	(BD)	=	Q	=	Q	=	(AG)
C	=	D	=	E	=	F	=	G

§. 18.

Man sieht hieraus, daß jede Linie und Winkel des ersten Triangels in jedem der übrigen Triangel eine besondere Stelle hat, und daß folglich diese fünf Triangel alle mögliche Verwandlungen derselben vorstellen. Ferner ist dieses besonders dabey, daß eben die Theile die nach der Neperischen Regel die mittlern und anliegenden, oder die mittlern und abgesonderten heissen, durch alle fünf Verwandlungen ihre Natur nicht ändern. Denn alle fünf Stücke liegen in allen fünf Triangeln in eben der Ordnung, wenn man den rechten Winkel wegläßt, weil sich dieser in jedem Triangel zwischen zwey andere von den fünf Stücken einrückt, und daher durch alle fünf Stellen geht.

§. 19.

§. 19.

Damit diese wunderliche Verwechslung deutlicher in die Augen falle, habe ich in der 2ten Figur eben diese Triangel entworfen, die Winkel und Seiten besonders, und zwar die Cathetos, für welche man immer ihre Complemente nehmen muß, durch die Buchstaben des kleinern Alphabets vorgestellt. So sieht man auf einen Anblick die fünf Stücke A, B, C, D, E in jedem Triangel in eben der Ordnung herum liegen, sich in ihre Complemente verwandeln, und aus diesen wieder ihre erste Größe erlangen. Fig. 2.

§. 20.

Alle fünf Triangel werden durch fünf Circul bestimmt. Jeder dieser Circul giebt zween Cathetos und eine Hypothenuse, und jene beyde sind das Complement von dieser, welche in die Mitte zwischen ihre anliegenden Cathetos fällt. Die fünf Hypothenusen schließen das Fünfeck, welches innerhalb den Triangeln liegt, und die fünf rechten Winkel liegen aussen herum.

§. 21.

Ferner sind die Puncte, wo zwo Hypothenusen zusammen stoßen die Pole des Circuls, welcher die in dem Fünfeck gegenüberliegende Hypothenuse enthält. Diese ist den Winkeln, so die zween Triangel

an

an ihrem Pole einander entgegen kehren, gleich, daher man sie auch in der Figur mit eben den Buchstaben bezeichnet findet.

§. 22.

Sodann steht jeder dieser Pole von den den zween gegenüberstehenden 90 Grad ab, weil diese auf dem Circul liegen, der aus jenem beschrieben wird.

§. 23.

Die fünf Pole haben auf der andern Helfte der Kugel ihre Nadir, in welchen sich die fünf Circul ebenfalls durchschneiden. Daher kommen das Fünfeck und die fünf Triangel auf der Kugel doppelt vor, und jedem Triangel steht ein anderer gegen über, welcher demselben in allen Stücken gleich und ähnlich ist.

§. 24.

Ueberdiß ist das ganze System allemal so eingeschlossen, daß die Fläche der fünf Triangel und die gedoppelte Fläche des Fünfeckes zusammen genommen $\frac{3}{8}$ von der Fläche der ganzen Kugel, oder $\frac{3}{4}$ von der halben Kugelfläche ist.

§. 25.

Um dieses zu beweisen, wollen wir die ganze Kugelfläche in 720 Theile eintheilen, welche

che man Grade nennen kann. Jeder von diesen Graden ist einem Triangel gleich, dessen zween grössere Schenkel Quadranten sind, und einen Winkel von einem Grade einschliessen. Es scheinet dieses der bequemste Maaßstab zu seyn, um die Theile einer Kugelfläche durch die ganze zu bestimmen. Denn in solchen Theilen kann man den Inhalt eines jeden sphärischen Triangels, dessen Seiten Bögen von grösten Circuln sind, sehr leicht aus den Winkeln des Triangels finden, wenn man diese zusammen addirt, und von der Summe 180° als die Summe der Winkel eines geradlinichten Triangels abzieht. Der Ueberschuß wird den Inhalt des sphärischen Triangels in solchen Theilen oder Graden angeben, davon die ganze Kugelfläche 720 hat.

§. 26.

Eben so findet man in gleichen Theilen den Inhalt eines jeden Viereckes der Kugelfläche, wenn man von der Summe seiner Winkel die Summe der Winkel eines geradlinichten Vieleckes von gleich vielen Seiten abzieht.

§. 27.

Man nenne demnach die Fläche des Fünfeckes $= V$, die Summe der Flächen der fünf Triangel $= \Delta$, so ist

$$V = 5 \cdot 190° - A - B - C - D - E - 3 \cdot 180°$$

Daher

Daher

$$V = 360° - (A + B + C + D + E)$$

Ferner ist

$$\Delta = 2(A + B + C + D + E) + 5.90° - 5.180°$$

folglich

$$\Delta = 2(A + B + C + D + E) - 450.°$$

und demnach

$$2V + \Delta = 270.° = \tfrac{270}{720} = \tfrac{3}{8} \text{ der Kugelfläche.}$$

§. 28.

Man findet also den Inhalt des Fünfeckes, wenn man die Summe seiner Seiten von 360° abzieht. Und da man die Gleichung

$$\Delta = 2(A + B + C + D + E) - 450°$$

leicht in folgende verwandelt

$$\Delta = A + B + C + D + E - a - b - c - d - e$$

so findet man den Inhalt aller fünf Triangel, wenn man von der Summe ihrer Hypothenusen die Summe ihrer Complementen abzieht.

§. 29.

Die fünf Circul, welche das ganze System ausmachen, durchschneiden einander so, daß jeder in acht Theile zerfällt, davon je eines das Complement des folgenden ist. Endlich

lich liegen auf der Kugelfläche außerhalb den 2 Fünfecken und 10 Triangeln noch 10 Vierecke, davon alle Seiten bekannt sind. Jedes derselben hat drey rechte Winkel, und kann folglich in zween rechtwinklichte Triangel zerfällt werden, von welchen man die Cathetos weiß. Sie sind nemlich eine Seite des Fünfeckes, und das Complement der anliegenden. Daher ist die ganze Kugelfläche in 2 Fünfecke und dreyßig rechtwinklichte Triangel eingetheilt. Die Seiten der Fünfecke sind A, B, C, D, E, und die Catheti der Triangel

ab, bc, cd, de, ea.
aB, bC, cD, dE, eA.
Ab, Bc, Cd, De, Ea,

§. 30.

Man kann zu dieser aufgehäuften Menge von Aehnlichkeiten noch diese beyfügen, daß, da jeder von den fünf Circuln die Kugelfläche in zwey gleiche Theile theilt, hiedurch 10 halbe Kugelflächen entstehen, auf deren jeder einerley Stücke liegen, wie auf den andern, nemlich das Fünfeck, nebst 15 rechtwinklichten Triangeln, von denen wir erst die Cathetos angegeben haben.

§. 31.

Ungeacht ich vermuthe, daß unter so vielen Uebereinstimmungen noch verschiedene allgemeine

gemeine Gesetze verborgen liegen, so habe ich ausser dem Beweise der Nepperischen Regel kein anderes finden können. So z. E. ist daraus, daß die fünf Triangel um das Fünfeck herum liegen, und einen Creys schließen, daß drey von diesen Triangeln die übrigen zwey bestimmen, und daß endlich ihr Inhalt und der doppelte Inhalt des Fünfeckes ein bestimmtes Verhältniß zu der ganzen Kugelfläche haben, zu vermuthen, daß sich aus den fünf Stücken eines rechtwinklichten sphärischen Triangels, das eine durch die übrigen vier noch auf eine andere Art bestimmen lasse, als durch die bißherigen trigonometrischen Regeln, ungeacht durch diese aus zweyen die übrigen drey gefunden werden.

§. 32.

Der Beweis der beyden Nepperischen Regeln wird nun keine Schwürigkeit geben. Die dritte und vierte Figur stellen die ganze Trigonometrie der sphärischen rechtwinklichten Triangel vor, und die dabey gesetzten zwo Gleichungen legen sie aus, ohne daß es viele Erläuterung gebrauchte. Denn die dritte Figur enthält die fünf Fälle für den mittlern, und die abgesonderten Theile, die vierte aber für den mittlern, und die anliegenden (§. 12, 18.)

§. 33.

Hat man also die bey der Figur geschriebene Verhältniß für einen der fünf Triangel erwiesen, so ist klar, daß auch der Beweis für die übrigen vier gilt, und die Neppersche Regel sich von selbsten auf alle fünf Fälle erstreckt. Dadurch wird also der Beweis für jeden Fall besonders überflüßig gemacht, und die Induction, deren man sich hiebey bedient hatte, abgeschaft.

§. 34.

Da alle Fälle bey den rechtwinklichten Triangeln durch eine einzige Analogie aufgelößt werden, so lassen sich die Logarithmen dabey gebrauchen, und die algebraische Auflösung ist von der Auflösung in Zahlen nicht verschieden. Dieser Unterschied äußert sich bey dem schiefwinklichten Triangeln in den meisten Fällen, und es kommen dabey mehrere Umstände vor, welche verursachen, daß man sie nicht auf so einfache Regeln bringen kann, weil mehrentheils zwo Analogien und noch eine Vorbereitung dabey erfordert wird. Wir wollen einige bereits bekannte Formeln voraus setzen, welche eben so viele trigonometrische Lehrsätze sind, und in allen Rechnungen, wobey Winkel vorkommen einen allgemeinen Nutzen haben.

§. 35.

Es seyn y, z zween Circulbögen oder Winkel, und $y > z$, so ist

1.° $\sin(y+z) = \sin y . \cos z + \cos y \sin z$
2.° $\cos(y+z) = \cos y . \cos z - \sin y . \sin z$
3.° $\sin(y-z) = \sin y . \cos z - \cos y . \sin z$
4.° $\cos(y-z) = \text{cosin}\, y . \cos z + \sin y . \sin z$

5.° $2 . \sin y . \cos z = \sin(y+z) + \sin(y-z)$
6.° $2 . \cos y . \sin z = \sin(y+z) - \sin(y-z)$
7.° $2 . \cos y . \cos z = \cos(y-z) + \cos(y+z)$
8.° $2 . \sin y . \cos z = \cos(y-z) - \cos(y+z)$

9.° $\sin y + \sin z = 2 . \sin \frac{y+z}{2} . \cos \frac{y-z}{2}$

10.° $\sin y - \sin z = 2 . \cos \frac{y+z}{2} . \sin \frac{y-z}{2}$

11.° $\cos y + \cos z = 2 . \cos \frac{y+z}{2} . \cos \frac{y-z}{2}$

12.° $\cos y - \cos z = 2 . \sin \frac{y+z}{2} . \sin \frac{y-z}{2}$

3.° $\text{tang}(y+z) = (\text{tang}\, y + \text{tang}\, z):(1 - \text{tang}\, y\, \text{tang}\, z)$
4.° $\cot(y+z) = (1 - \text{tang}\, y\, \text{tang}\, z):(\text{tang}\, y + \text{tang}\, z)$

5.° $\sin y\, (+ \sin z):(\sin y - \sin z) = \text{tang}\, \frac{a+b}{2} : \text{tang}\, \frac{a-b}{2}$

6.° $(\cos y + \cos z):(\cos z - \cos y) = \cot \frac{a+b}{2} : \text{tang}\, \frac{a-b}{2}$

17.° sin

17.° $(\sin y + \sin z):(\cos z + \cos y) = \text{tang}\, \frac{y+z}{2} : 1$

18.° $(\sin y + \sin z):(\cos z - \cos y) = 1 : \text{tang}\, \frac{y-z}{2}$

19.° $(\sin y - \sin z):(\cos z + \cos y) = \text{tang}\, \frac{a-b}{2} : 1$

20.° $(\sin y - \sin z):(\cos z - \cos y) = 1 : \text{tang}\, \frac{y+z}{2}$

21.° $(\sin y + \sin z):(\cos z + \cos y) = (\cos z - \cos y):(\sin y - \sin z)$
22.° $(\sin y + \sin z).(\sin y - \sin z) = \sin(y+z).\sin(y-z) : 1$

23.° $(\text{tang}\, y + \text{tang}\, z):(\text{tang}\, y - \text{tang}\, z) =$
24.° $(\cot z + \cot y):(\cot z - \cot y) =$ $\sin(y+z):\sin(y-z)$

25.° $(\text{tang}\, y + \text{tang}\, z):(\cot z + \cot y) =$
26.° $(\text{tang}\, y - \text{tang}\, z):(\cot z - \cot y) =$ $(\sin y . \sin z):(\cos y . \cos z)$

Ferner um bey den verschiedenen Functionen eines gleichen Winkels die Irrationalität zu heben

27.° $\sin 2y = 2\, \text{tang}\, y : (1 + \text{tang}\, y^2)$
28.° $\cos 2y = (1 - \text{tang}\, y^2) : (1 + \text{tang}\, y^2)$
29.° $\text{tang}\, 2y = 2\, \text{tang}\, y : (1 - \text{tang}\, y^2)$
30° $\cot 2y = (1 - \text{tang}\, y^2) : 2\, \text{tang}\, y$
31.° $\sec 2y = (1 + \text{tang}\, y^2) : (1 - \text{tang}\, y^2)$
32.° $\text{cosec}\, 2y = (1 + \text{tang}\, y^2) : 2\, \text{tang}\, y.$

Endlich, um in der 5ten Figur die Verhältniß der gleichnamigten Theile eines schiefwinklichten Triangels auf beyden Seiten des

 Senk-

Senkstriches vorzustellen, kommen noch folgende Formeln hinzu

33.° $\cos A : \cos B = \cos a : \cos b$.
34.° $\cos C : \sin D = \cos c : \sin d$.
35.° $\sin A : \sin a = \sin c : \sin C$.
36.° $\cos D : \cot A = \cos d : \cot a$.
37.° $\sin B : \cot C = \sin b : \cot c$.
38.° $\tang B : \tang b = \cot d : \cot D$.

Diese sechs letzten Formeln fliessen fast unmittelbar aus den Nepperischen Regeln, die übrigen aber sind der Ordnung nach aus den 4 ersten hergeleitet. Bey allen aber wird der Halbmesser = 1 gesetzt.

§. 36.

In jeden sphärischen Triangel sind drey Stücke zureichend um jedes der übrigen drey zu bestimmen. Es kommen also bey allen Auflösungen vier Stücke vor, und auf so vielerley Arten alle 6 Stücke zu 4 und 4 können combinirt werden, so viele Verhältnisse giebt es. Da nun diese Combination 15mal angeht, so sind 15 Verhältnisse, und daher in allem 60 Fälle, weil von jeden 4 Stücken eines Verhältnisses ein jedes derselben als unbekannt kann angesehen werden.

§. 37.

Es lassen sich aber diese 60 Fälle sehr in die Kürze ziehen. Denn läßt man den Unterschied

terschied zwischen den bekannten und unbekannten weg, so bleiben nur 15. Wenn man ferner nur auf die Ordnung sieht, wie die fürgegebenen 4 Stücke in dem Triangel auf einander folgen, und den Unterschied, ob es Winkel oder Seiten sind, beybehält, so bleiben nicht mehr als vier Fälle. Denn unter den 4 Stücken ist entweder

1.° Eine Seite und da müssen alle drey Winkel seyn.

2.° Oder man hat alle 3 Seiten, und da muß noch ein Winkel dazu kommen.

3.° Oder man hat zwo Seiten und da gebraucht es noch zween Winkel. Diese aber können entweder den Seiten gegenüber liegen, oder

4.° Sie liegen so, daß einer derselben zwischen die Seiten fällt.

Denn da in diesem Fall ein Winkel weg bleibt, so ist es entweder der so zwischen den Seiten liegt, oder er liegt an dem Ende einer der Seiten.

§. 38.

Da jeder Triangel sich in einen andern verwandeln läßt, in welchem die Seiten zu Winkeln, und diese zu Seiten werden, so hat der erste und zweyte von diesen 4 Fällen einerley Auflösung. Man kann also alle 60

 Fälle

Fälle bey schiefwinklichten Triangeln auf diese 3 bringen, denn die 4 Stücke sind

1.° Endweder einander entgegen liegend: *Partes oppositae.*

2.° Oder sie folgen auf einander: *Partes continuae.*

3.° Oder eines ist von den andern abgesondert: *Partes seiunctae.*

Im ersten Falle liegen zwey und zwey Stücke an einander, und zwey und zwey stehen einander gegen über.

Im dritten Fall liegen drey Stücke an einander, und das vierte steht dem mittlern gegen über.

Im 2ten Fall hängen alle 4 Stücke an einander, und die äussersten stehen einander gegenüber.

Man kann sie demnach auch durch dieses entgegen stehen von einander unterscheiden. *Oppositio reciproca, media, extrema,* da nemlich die vier Stücke 1° wechselweise, 2° oder nur die mittlern, 3° oder nur die äussersten einander gegenüber stehen.

§. 39.

Wir werden aber diese letzte Abkürzung nicht gebrauchen, weil sie auf der Verwechslung der Winkel und Seiten beruht, welche so gar unbedingt nicht vorgeht, und der Unterschied

terschied, so dabey vorkömmt, aus den Formeln selbst deutlicher ersehen werden kann. Wir behalten demnach die vorhin (§. 37.) erwähnten vier allgemeinen Fällen. Für diese hat man längst schon eben so viel allgemeine algebraische Formeln gefunden, und dadurch die ganze sphärische Trigonometrie auf vier Gleichungen gebracht. Diese Gleichungen thun bey analytischen Auflösungen der sphärischen Aufgaben gute Dienste. Hingegen sind sie nicht alle gleich bequem, wo man mit Zahlen und besonders mit Logarithmen arbeiten will. Da sie sich aus den oben (§. 35.) gegebenen Formeln sehr leicht herleiten lassen, so werden wir sie kürzlich hier anbringen, besonders auch wegen der Art, sie so zu zeichnen, daß man sich ohne Figur jedesmal darein finden kann.

§. 40.

Zu diesem Ende

1.° Benenne ich die drey Seiten des Triangels mit den drey ersten Buchstaben des grössern Alphabets, und ihre gegenüberstehenden Winkel mit eben den Buchstaben des kleinern Alphabets, so daß A dem a, B dem b und C dem c gegen überstehe.

2.° Werde ich die Formeln so einrichten, daß A und a nothwendig darinn vorkommen.

kommen. Denn da in allen Fällen nothwendig wenigstens eine Opposition zweener Theile vorkömmt (§. 38.) so mache ich damit den Anfang, daß die Seite A und der Winkel a genennt wird. Die übrigen zwey Stücke geben sich von selbsten. Denn kömmt noch eine Seite vor, so heißt sie B, in den übrigen Fällen und Stücken bleibt nach dieser Voraussetzung keine Wahl mehr.

§. 41.

Hiedurch wird man in Stand gesetzt, jeden vorkommenden Fall zu zeichnen, und die dazu dienende Formel ohne andere Figur, als die man sich nach dieser Regel entwirft, zu erkennen, denn man wird für

3 Seiten und einen Winkel	A, a, B, C
3 Winkel und eine Seite	a, A, b, c
4 aufeinander folgende Stücke	A, a, B, c
4 gegenüberstehende Stücke	A, a, B, b

bekommen, und die dazu dienende Formel erkennen können.

§. 42.

Diß sind alle 4 mögliche Fälle, welche in der 6, 7, 8, 9 Figur vorgestellt werden. Die Buchstaben sind das Maaß der ganzen Winkel und Seiten. Es versteht sich von selbsten daß der Bogen, welcher durch jeden dieser Triangel geht die Perpendicular ist, die denselben in zween rechtwinklichte zerfällt. Dieser Bogen theilt entweder eine der Seiten oder einen der Winkel, so in die Rechnung kommen. Der eine Theil ist mit x, der andere mit seinem Zusatze zum Ganzen bezeichnet. Nach dieser Vorbereitung besteht die Erfindung von dem Beweiß der gesuchten 4 Gleichungen schlechthin in einer Anwendung der Nepperischen Regel und einer der §. 35. gegebenen Formeln.

I. Fall.

§. 43.

Verhältniß zwischen 3 Seiten und einem Winkel.

Hier hat man Fig. 6.

$\cos A : \cos C = \cos(B - x) : \cos x$ (§. 35. No. 33)

$\cos(A - x) = \cos B \cos x + \sin B \sin x$ (§. 35. No. 4.)

folglich

$\cos A = \cos B \cos C + \sin B . \cos C . \tan x$

Nach der Nepperischen Regel ist

$\tan x = \tan C . \cos a$

Daher

$\cos A = \cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a .$

die gesuchte Formel.

II. Fall.

§. 44.

Verhältniß zwischen den 3 Winkeln und einer Seite.

Hier

Hier ist

Fig. 7. $\cos a : \cos b = \sin(c - x) : \sin x$ (§.35. No.34)

$\sin(c - x) = \sin c . \cos x - \cos c . \sin x$ (§.35. No. 3)

folglich

$\cos a = \cos b . \sin c . \cot x - \cos b . \cos c$

Nach der Nepperischen Regel

$\cot x = \cos A . \tan b$

Daher

$\cos a = \sin c . \sin b . \cos A - \cos b . \cos c$

die gesuchte Formel.

III. Fall.

§. 45.

Verhältniß zwischen 4 auf einander folgenden Stücken.

Hier ist

Fig. 8. $\cot A : \cot B = \cos(c - x) : \cos x$ (§.35. No.35)

$\cos(c - x) = \cos c . \cos x + \sin c . \sin x$ (§.35. No.4)

folglich

$\cot A . \tan B = \cos c + \sin c . \tan x.$

Nach der Nepperischen Regel ist

$\tan x = \cot a : \cos B$

Daher

$\sin B . \cot A = \cos c . \cos B + \sin c . \cot a$

die gesuchte Formel.

IV. Fall.

§. 46.

Verhältnis zwischen 4 gegenüber liegenden Stücken.

Hier

Hier ist schlechthin (§. 35. No. 35.) Fig. 9.

$\sin A : \sin a = \sin B : \sin b.$

§. 47.

Es sind also die 4 allgemeinen Formeln für alle Fälle bey schiefwinklichten sphärischen Triangeln folgende:

I.° $\cos A = \sin B . \sin C . \cos a + \cos B . \cos C.$ Fig. 10.

II.° $\cos a = \sin b . \sin c . \cos A - \cos b . \cos c.$

III.° $\sin B . \cot A = \cos c . \cos B + \sin c . \cot a.$

IV.° $\sin A . \sin b = \sin B . \sin a.$

§. 48.

Diese vier Formeln sind zureichend, wenn man weiter nichts sucht als das Verhältniß zwischen jeden 4 gegebenen Stücken eines Triangels. Wir haben dabey alle Seiten und alle Winkel kleiner als 90° angenommen, damit die Cosinus, Tangenten und Cotangenten positiv blieben, wie man sie in der That annimmt. Wird aber ein Winkel oder eine Seite grösser als 90 Grad, so muß man bey seinem Cosinus, Tangente oder Cotangente das Zeichen ändern, wenn er gegeben ist. Ist er aber der gesuchte, so ändert sich das Zeichen von sich selbst. Die mechanische Einrichtung der Buchstaben Rechnung zieht dieses Phänomenon nothwendig nach sich. Man sieht leicht, daß die erste und zweyte dieser Formeln nur in dem Zeichen unterschieden sind, welches auch aus der bekannten

kannten Verwechslung der Winkel und Seiten nothwendig seyn muß.

§. 49.

In allen 4 Formeln lassen sich die gegenüberstehenden Stücke leichter finden, als die beyden übrigen, und die Leichtigkeit verdoppelt sich, wenn auch diese einander gegen überstehen, wie in der vierten Formel. Denn sie kommen nur einmal vor. Hingegen kommen die übrigen beyden in den drey ersten Formeln nicht nur zweymal, sondern auf eine Irrationale Art vor, weil jedes durch seinen Sinus und Cosinus ausgedruckt ist.

§. 50.

Ferner sind in der ersten Formel die Seiten B, C, und in der zweyten die Winkel b, c auf eine ähnliche Art eingeflochten. Man findet also eines auf eben die Weise wie das andere, weil sie sich gegen einander verwechseln lassen. Wenn man nicht auf den Unterschied der Zeichen sehen will, so kann die eine von diesen Formeln weggelassen werden. Wir werden aber mehrerer Deutlichkeit halber beyde beybehalten, weil die Verwechslung der Winkel und Seiten, die die Wahl der Zeichen bestimmen müßte, zu weitläuftig ist.

§. 51.

Macht man zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken einen Unterschied, so entstehen

stehen aus jeder der beyden ersten Formeln drey und aus der dritten vier andere. Die vierte Formel lassen wir, wie sie ist, weil sie nicht leichter kann gemacht werden.

§. 52.

Die Irrationalität, so bey den 3 ersten Fällen entsteht, kann auf verschiedene Art ausgedruckt werden. Am einfachsten geschieht es durch die Tangente des halben Winkels oder der halben Seite. Wir wollen es in einem Fall erläutern, weil sich die übrigen auf eben die Art finden.

§. 53.

Es sey demnach in der ersten Formel
$\cos A = \cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a$
die Seite B zu suchen. Man setze die Tangente ihrer Helfte $= z$, so ist $\tan \frac{1}{2} B = z$, und (§. 35. No. 27.)

$$\sin B = 2z : (1 + zz)$$
$$\cos B = (1 - zz) : (1 + zz)$$

folglich

$$\cos A = \frac{1 - zz}{1 + zz} . \cos C + \frac{2z}{1 + zz} . \sin C . \cos a$$

$$\cos A + zz . \cos A = \cos C - zz \cos C + 2z . \sin C . \cos a$$

Daher

$$z = \frac{\sin C . \cos a + \sqrt{(\sin C.^2 \cos a^2 + \cos C^2 \quad \cos A^2)}}{\cos C + \cos A}$$

oder

oder kürzer

$$\tang \tfrac{1}{2}B = \frac{\sin C.\cos a + \sqrt{(\sin A^2 - \sin a.^2 \sin C^2)}}{\cos C + \cos A}$$

§. 54.

Sucht man auf eben die Art in der 2ten und 3ten Formel die halbe Tangente von b, B und c, so wird man für jede Data und Quaesita folgende 11 Formeln heraus bringen.

I. Fall. Drey Seiten und einen Winkel.

1.° $\cos A = \sin B.\sin C.\cos a + \cos B.\cos C$

2.° $\cos a = (\cos A - \cos B.\cos C) : \sin B.\sin C$

3.° $$\tang \tfrac{1}{2}B = \frac{+\sin C.\cos a + \sqrt{(\sin A^2 - \sin C^2 \sin a^2)}}{\cos C + \cos A}$$

II. Fall. Drey Winkel und eine Seite.

4.° $\cos a = \sin b.\sin c.\cos A - \cos b.\cos c$

5.° $\cos A = (\cos a + \cos b.\cos c) : \sin b.\sin c$

6.° $$\tang \tfrac{1}{2}b = \frac{-\sin c.\cos A + \sqrt{(\sin a^2 - \sin c^2.\sin A^2)}}{\cos c - \cos a}$$

III. Fall. Vier auf einander folgende Stücke.

7.° $\cot A = (\cos c \cos B + \sin c.\cot a) : \sin B$

8.° $\cot a = (\sin B.\cot A - \cos c.\cos B) : \sin c$

9.° $$\tang \tfrac{1}{2}B = \frac{-\cos A.\sin a + \sqrt{(\sin a^2 - \sin c.^2 \sin A^2)}}{\sin A.\sin (a - c)}$$

10.° $$\tang \tfrac{1}{2}c = \frac{+\sin A.\cos a + \sqrt{(\sin A^2 - \sin B^2 \sin a^2)}}{\sin a.\sin (B + A)}$$

IV. Fall.

IV. Fall.

Vier entgegen stehende Stücke.

11. $\sin A.\sin b = \sin B.\sin a.$

Diese Formeln sind die einfachsten, die man herausbringt, ohne in der Benennung der 4 Stücke eine merkliche Veränderung zu machen. Da man dieselben nicht leicht anders als bey der Erfindung allgemeiner sphärischer Lehrsätze und bey Differentialrechnungen gebraucht, wo man gewöhnlich die Winkel und Bögen selbsten beybehalten muß, so haben wir keine solche Veränderung dabey vorgenommen, und die beyden Ausdrücke $\sin (a - c)$ und $\sin (A + B)$ die wir in der 9ten und 10ten Formel gebraucht haben, werden vermittelst der obigen Lehrsätze (§. 35.) leicht wieder in einfachere aufgelößt, wenn man die Theile besonders haben muß.

§. 55.

Da die Größe unter den Wurzelzeichen sowohl positiv als negativ kann genommen werden, so geben die Formeln, in denen sie vorkommen zween Werthe, welche beyde gleich möglich sind, und nicht bloß von einer Vermischung der spitzen und stumpfen Winkel herrühren, die man hätte vermeiden können. Man muß also aus andern Umständen schliessen, welchen von diesen beyden Werthen man vorzüglich gesucht hat, oder gebrauchen will.

Da bey allen sphärischen Triangeln die Tangente eines halben Bogens oder eines halben Winkels nothwendig positiv ist, so muß auch die 3, 6, 9 und 10te Formel zween positive Werthe geben. Ist demnach einer darunter negativ, so fällt die Seite oder der Winkel so dadurch herauskömmt, ausserhalb denjenigen, den man suchte, und hat eine ganz entgegen gesetzte Lage. Doch hiebey werden wir uns nicht aufhalten, weil diese Formeln in den Rechnungen, wo man sie gebraucht, gemeiniglich durch die Bedingungen der Aufgaben, ihre Gestallt wieder ändern. Zu blosser Auflösung eines Triangels in Zahlen hat man andere Wege (§. 4.)

§. 56.

Hingegen läßt sich dieses hier anmerken, daß die Irrationalgrößen in diesen Formeln einander sämtlich ähnlich sind. Sie bestehen aus zweyen einander gegenüber stehenden Stücken, und noch einem dritten. Wenn man aus derselben nach der 11ten Formel das Stück sucht, so diesem dritten gegen über steht, so läßt die Irrationalgröße eine Reduction zu, durch welche sie ganz aufgehoben wird. So z. E. in der 3ten Formel ist.

$$\sin C . \sin a = \sin A . \sin c$$

folglich

$\sqrt{}$ (sin

$$\sqrt{(\sin A^2 - \sin C^2 \sin a^2)} = \sqrt{(\sin A^2 - \sin A^2 \sin c^2)} = \sin A . \cos c.$$

§. 57.

Wird diese Reduction vorgenommen, so haben wir

$3.°\ \text{tang}\ \frac{1}{2} B = (\sin C . \cos a + \sin A . \cos c) : (\cos C + \cos A)$

$6.°\ \text{tang}\ \frac{1}{2} b = (- \sin c . \cos A + \sin a . \cos C) : (\cos c - \cos a)$

$9.°\ \text{tang}\ \frac{1}{2} B = (- \cos A . \sin a + \sin a . \cos C) : (\sin A . \sin (a - c))$

$10.°\ \text{teng}\ \frac{1}{2} c = (\sin A . \cos a + \sin A . \cos b) : (\sin a . \sin (B + A))$

§. 58.

Hieraus erhellet, daß die Irrationalgrösse den Cosinum einer Seite oder eines Winkels in sich schlosse, welcher unter den 4 Stücken der Formel nicht begriffen war, und eben so wohl grösser als kleiner denn 90° seyn konnte.

§. 59.

Diese Formeln, welche das gesuchte Stück durch die Tangente seiner Helfte ausdrücken, sind die einfachsten, weil das Wurzelzeichen keinen andern Coefficienten hat. Wenn man aber den Sinus oder Cosinus statt dieser Tangente sucht, so wird die Formel der gefundenen ähnlich, allein es sind mehr Factores darinn. So z. E. findet man

$$3.°\ \sin B = \frac{\cos A . \sin C . \cos a + \cos C \sqrt{(\sin A^2 - \sin a^2 \sin C^2)}}{1 - \sin C^2 \sin a^2}$$

 3. cos

$$3°\ \cos B = \frac{\cos A.\cos C + \sin C.\cos a \sqrt{(\sin A^2 - \sin a^2 \sin C^2)}}{1 - \sin C.^2\ \sin a^2}$$

$$6°\ \sin b = \frac{\cos a.\sin c.\cos A + \cos c \sqrt{(\sin a^2 - \sin A^2 \sin c^2)}}{1 - \sin c^2 \sin A^2}$$

$$6°\ \cos b = \frac{-\cos a.\cos c + \sin c.\cos A \sqrt{(\sin a^2 - \sin A^2 \sin c^2)}}{1 - \sin c^2 \sin A^2}$$

$$9°\ \sin B = \frac{\sin A.\cos A.\cos a.\sin c + \sin A.\cos c \sqrt{(\sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 c)}}{\sin a\,(1 - \sin A^2 \sin c^2)}$$

$$9°\ \cos B = \frac{-\cos c.\sin c.\sin A^2 \cos a + \cos A \sqrt{(\sin^2 a - \sin^2 A.\sin^2 c)}}{\sin a\,(1 - \sin A^2 \sin c^2)}$$

§. 60.

Die Verhältniß zwischen dem Sinus einer jeden Seite und ihres gegenüberstehenden Winkels wird aus den drey Seiten oder aus den drey Winkeln auf folgende Art gefunden.

1° Aus den Seiten. Hier ist (§. 54. No 1.)

$$\cos A = \sin B.\sin C.\cos a + \cos B.\cos C$$

Ferner (§. 38. No. 1. 2.)

$$\cos a = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} a^2 = 2 \cos \tfrac{1}{2} a^2 - 1.$$

folglich

$$\cos A = \cos B.\cos C + \sin B.\sin C - 2 \sin B.\sin C.\sin \tfrac{1}{2} a^2$$
$$= \cos B.\cos C - \sin B.\sin C + 2 \sin B.\sin C.\cos \tfrac{1}{2} a^2$$

Nun ist (§. 37. No. 4. 2.)

$$\cos B.\cos C + \sin B.\sin C = \cos(B - C)$$
$$\cos B.\cos C - \sin B.\sin C = \cos(B + C)$$

Daher

$$2 \sin P.\sin C \sin \tfrac{1}{2} a^2 = \cos(B - C) - \cos A$$
$$2 \sin B.\sin C.\cos \tfrac{1}{2} a^2 = \cos A - \cos(B + C)$$

und (§. 37. No. 12.)

$$2 \sin B.\sin C.\sin \tfrac{1}{2} a^2 = 2 \sin \frac{A + B - C}{2}.\sin \frac{A - B + C}{2}$$

$$2 \sin B.\sin C.\cos \tfrac{1}{2} a^2 = 2 \sin \frac{B + C + A}{2}.\sin \frac{B + C - A}{2}$$

folglich

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \frac{\sqrt{\left(\sin \frac{A + B - C}{2}.\sin \frac{A - B + C}{2}\right)}}{\sqrt{\sin B.\sin C}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \frac{\sqrt{\left(\sin \frac{A + B + C}{2}.\sin \frac{B + C - A}{2}\right)}}{\sqrt{\sin B.\sin C}}$$

§. 61.

Hiedurch wird also der Sinus und Cosinus des halben Bogens besonders gefunden. Nun ist

$$\sin \tfrac{1}{2} a.\cos \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} \sin a$$

folglich

$\sin a$

$$\sin a = \frac{2\sqrt{\left(\sin\frac{A+B+C}{2}.\sin\frac{A+B-C}{2}.\sin\frac{A-B+C}{2}.\sin\frac{B+C-A}{2}\right)}}{\sin B.\ \sin C}$$

und daher

$$\sin a : \sin A = \frac{2\sqrt{\left(\sin\frac{A+A+C}{2}.\sin\frac{A+B-C}{2}.\sin\frac{A+C-B}{2}.\sin\frac{B+C-A}{2}\right)}}{\sin A.\ \sin B.\ \sin C}$$

2.° Aus den Winkeln. Wird auf eben die Art gefunden:

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left[\left(-\cos\frac{a+b+c}{2}.\cos\frac{c+b-a}{2}\right):\sin b.\sin c\right]}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left[\left(+\cos\frac{a+c-b}{2}.\cos\frac{a-c+b}{2}\right):\sin b.\sin c\right]}$$

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\left(-\cos\frac{a+b+c}{2}.\cos\frac{a+b-c}{1}.\cos\frac{a+c-b}{2}.\cos\frac{b+c-a}{2}\right)}}{\sin b.\ \sin c}$$

$$\sin A : \sin a = \frac{2\sqrt{\left(-\cos\frac{a+b+c}{2}.\cos\frac{a+b-c}{2}.\cos\frac{a+c-b}{2}.\cos\frac{b+c-a}{2}\right)}}{\sin a.\ \sin b.\ \sin c}$$

§. 62.

§. 62

Die Größe des Wurzelzeichens in den 2 letzten Formeln ist negativ, und scheint daher einen unmöglichen Werth zu geben. Allein da die 3 Winkel in einem sphärischen Triangel nothwendig grösser sind als 180 Grad, so ist die Helfte ihrer Summe grösser als 90 Grad, und daher wird der $\cos\frac{(a+b+c)}{2}$ negativ, und die scheinbare Unmöglichkeit verschwindet.

§. 63.

Diese Formeln sind so beschaffen, daß man die vorgegebene Verhältniß durch Logarithmen finden kann. Denn die 4 Factores im den Wurzelzeichen sind die Helfte der Summe, und ihr Ueberschuß über jeden der 3 Seiten oder der drey Winkel. Addirt man demnach die Logarithmen ihrer Sinus oder ihrer Cosinus, so muß von der Summe die Helfte genommen, und von dieser Helfte die Summe der Sinus aller 3 Seiten oder Winkel abgezogen werden. Der Ueberrest ist der Logarithmus von der gesuchten Verhältniß doppelt genommen.

§. 64.

§. 64.

Wenn der Triangel als unendlich klein angesehen wird, so kann man für die Sinus der Seiten, die Seiten selbst setzen, ihre Cosinus werden $=1$, wenn sie in der Formel nicht allein vorkommen. Kommen sie aber allein oder nebst den Quadraten der Sinus vor, so wird $\cos A = 1 - \frac{1}{2} A^2$, $\cos B = 1 - \frac{1}{2} B^2$, u. s. w. und die höhern Dignitäten von der Seite werden weggelassen. Hiedurch verwandeln sich die obigen Formeln in solche, welche für geradlinichte Triangel dienen, wie man sie auch aus der Beschaffenheit dieser Triangel geradenwegs findet. Es sind folgende:

I. Fall. Drey Seiten und ein Winkel.

1.° $A^2 = B^2 + C^2 - 2\,BC.\cos a$

2.° $\cos a = (B^2 + C^2 - A^2) : 2\,B\,C$

3.° $B = C.\cos a + \sqrt{(A^2 - C^2 \sin a^2)}$

4.° $\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\left[\left(\frac{A+B-C}{2} \cdot \frac{A-B+C}{2}\right) : BC\right]}$

5.° $\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\left[\left(\frac{A+B+C}{2} \cdot \frac{B+C-A}{2}\right) : BC\right]}$

6.° $\sin a = 2\sqrt{\left(\frac{A+B+C}{2} \cdot \frac{A+B-C}{2} \cdot \frac{A+C-B}{2} \cdot \frac{B+C-A}{2}\right) : BC}$

II. Fall. Drey Winkel und eine Seite. Ist unbestimmt.

III. Fall. Vier auf einander folgende Stücke.

7.° $B = A(\cos c + \sin c.\cot a) = A.\sin(a+c) : \sin a$

8.° $\cot a = (B - A.\cos c) : \sin c.\,A.$

9.° $A = B : (\cos c + \sin c.\cot a) = \sin a.\,B : \sin(a+c)$

10.° $\tan \frac{1}{2} c = \frac{A.\cos a + \sqrt{(A^2 - B^2 \sin a^2)}}{(A+B)\sin a}$

IV. Fall. Vier entgegen stehende Stücke.

11.° $A.\sin b = B.\sin a.$

§. 65.

Ungeachtet man die Perpendicular gewöhnlich nur deßwegen fällt, damit man den Triangel auflösen könne, so giebt es doch Fälle, wo man dieselbe selbsten finden muß. Unter diesen sind die schwersten diejenige, wo man nur die drey Seiten oder die drey Winkel des Triangels, oder die zwo Seiten, und den Winkel hat, aus welchem sie fällt. Wir wollen dazu zween Wege angeben, deren der erste für die Exempel, so man in Zahlen rechnet, der andere aber für die algebraischen Rechnungen dienlicher ist.

§. 66.

Man soll demnach aus den 3 Seiten A, B, C, die Perpendicular AC finden. Nun ist Fig. I (§. 35. No. 33.)

$\cos B : \cos C = \cos(A - y) : \cos y$

Daher durch eine leichte Verwandlung

$$(\cos B + \cos C) : (\cos C - \cos B) = [\cos(A-y) + \cos y] : [\cos y - \cos(A-y)]$$

folglich (§. 35. No. 16.)

$$\mathrm{tang}\,\frac{B+C}{2} . \mathrm{tang}\,\frac{B-C}{2} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}A . \mathrm{tang}\,\frac{(A-y)}{2}$$

$$\mathrm{tang}(\tfrac{1}{2}A - y) = \frac{\mathrm{tang}(\frac{1}{2}B+C) . \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(B-C)}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}A}$$

Da man durch diese Proportion $\frac{1}{2}A - y$, und daher auch y findet, so hat man ferner

$$\cos p = \cos C : \cos y$$

§. 67.

Die algebraische Formel findet sich aus den Gleichungen.

$$\cos B : \cos C = \cos(A-y) : \cos y$$
$$\cos p = \cos C : \cos y$$

Denn es ist (§. 35. No. 4.)

$$\cos(A-y) = \cos A . \cos y + \sin A . \sin y$$

folglich

$$\cos B = \cos C . \cos A + \cos C . \sin A . \cot y$$

oder

$$\mathrm{tang}\, y = \cos C . \sin A : (\cos B - \cos C . \cos A)$$

Da nun

$$\mathrm{tang}.\, y^2 + 1 = \sec y^2 = 1 : \cos y^2$$

und

$$1 : \cos y = \cos p : \cos C$$

so

so findet man hieraus

$$\cos p = \frac{\cos C . \sqrt{(\cos B^2 + \cos C^2 - 2\cos B . \cos C . \cos A)}}{\cos B - \cos C . \cos A}$$

§. 68.

Auf eine ähnliche Art, wenn B, C und a gegeben, findet sich

$$\cot p = \frac{\sqrt{(\cot B^2 + \cot C^2 - 2\cot B . \cot C . \cos a)}}{\sin a}$$

Diese Formel läßt sich mit der ersten, so wir (§. 64.) für geradlinichte Triangel gegeben haben, vergleichen. Denn wenn man aus $\cot B$ und $\cot C$ Seiten eines Triangels macht, die den Winkel a einschließen, so wird die dritte Seite $= \cot p . \sin a$ seyn.

§. 69.

Wenn man in einem vorkommenden Fall mit Zahlen zu rechnen hat, so finden sich unter den bißher gegebenen Formeln wenige, bey welchen man füglich Logarithmen gebrauchen könnte. Indessen sind es gerade diejenigen, wo man die Logarithmen fast nicht wohl anders gebrauchen kann, als nach Anleitung der Formeln, nemlich für die gegen einander überstehende Theile die 4te Formel des §. 47. und für den Fall, wo man aus den Seiten einen Winkel, oder aus den Winkeln eine Seite zu finden hat, eine der Formeln des

§. 60

§. 60 und § 61. Diese Fälle haben in der Anwendung der Logarithmen etwas besonders, und gehen von den übrigen ab, welche sich auf eine allgemeine Regel bringen lassen. Doch wir müssen die Sache im Ganzen betrachten, weil der Gebrauch der Logarithmen Analogien fordert, und dabey auch zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken ein Unterschied muß gemacht werden. Dieser Unterschied aber macht, daß wir uns nicht mehr an 4 allgemeinen Fällen begnügen können, sondern derselben in allen 12 finden, die sich aus den 4 allgemeinen (§. 41.) auf folgende Art herleiten lassen.

I. Bey drey Seiten und einem Winkel A, a, B, c giebt es 3 Fälle, weil man entweder den Winkel a, oder die gegenüberstehende Seite A, oder eine der anliegenden B, C zu finden hat.

II. Auf gleiche Art gibt es drey Fälle bey den 3 Winkeln und einer Seite. Denn man sucht entweder A oder a, oder einen der Winkel b, c.

III. Bey den auf einander folgenden Stücken A, a, B, c giebt es 4 Fälle, weil hier keine Gleichgültigkeit der Lage vorkömmt, folglich jedes dieser 4 Stücke etwas besonders hat.

IV. Bey den gegenüberstehenden Stücken A, a, B, b giebt es zween Fälle, indem man entweder eine der Seiten oder einen der Winkel sucht.

§. 70.

Von diesen 12 Fällen haben die von den gegenüberstehenden Stücken, und die, wo aus den Seiten ein Winkel, und aus den Winkeln eine Seite zu suchen ist, ihre eigene Auflösung, die wir schon oben angezeigt haben (60. 61. 47.) Bey den übrigen acht Fällen muß man eine Perpendicular fällen, um vermittelst zwoer Analogien das gesuchte zu finden. Man kann aber eine allgemeine Methode dazu angeben, und vermittelst einer schicklichen Bezeichnung der Theile alle acht Fälle auf einerley Art tractiren, und sie in allgemeinen Formeln vorstellen.

§. 71.

Wenn man sich die 4 Stücke des Triangels, welche in die Rechnung kommen, bemerkt hat, so ziehe man die Perpendicular dergestalt, daß sie nur eines dieser Stücke theile, und zwey andere bekannte auf einer Seite lasse. Diese zwey Stücke werden der Ordnung nach an dem getheilten liegen. Man nenne das getheilte Stück C, das anliegende oder mittlere A, das folgende oder äussere B, so wird das vierte a oder b seyn, je nachdem es dem A oder B gegenübersteht. Ferner benenne man die zween Theile le, worein C durch den Senkstrich zerfällt wird x und y, so daß x an dem A zu liegen komme.

§. 72.

Ist dieses geschehen, so wird man folgende Formeln bekommen.

1° $x + y = C$
2° $\tang x = \cos A . \tang B$
3° $\cos x . \cos a = \cos y . \cos B$
4° $\sin x . \tang A = \sin y . \tang b$.

Bey welchen zu merken, daß wenn C ein Winkel ist, man für x und y ihre Erfüllung zu 90 Grad nehmen müsse.

§. 73.

Von diesen 4 Formeln bleibt die dritte oder die vierte in jedem vorkommenden Fall weg, je nach dem man a oder b nicht unter den 4 Stücken hat, die in der Rechnung vorkommen. Das gesuchte Stück selbst wird immer C oder a oder b, und die Fälle selbst werden folgende seyn

aus	A, B, a	sucht man	C.
	A, B, b		C.
	A, B, C		a.
	A, B, C		b.

§. 74

Die Ordnung der Rechnung ergiebt sich von selbsten. Man fängt immer bey der 2ten Formel an, wodurch man x findet. Ist C bekannt, so findet sich y durch die erste Formel, und sodann a oder b durch die dritte oder vierte. Ist aber C zu suchen, so findet man y durch die 3te oder 4te Formel, und sodann C durch die erste. Die 12, 13, 14 15 Figur stellen alle hiebey vorkommende Fälle vor.

§. 75.

Da man bey allen diesen Fällen zwo Analogien gebrauchen muß, so sind sie desto beschwerlicher, wenn man ganze Tabellen zu berechnen hat. Es wird sich daher allerdings der Mühe lohnen, zu sehen, ob man sodann durch eine schickliche Vorbereitung nicht eine Analogie ersparen könne? Es ist klar, daß die Arbeit dadurch um die Helfte abgekürzt würde. Ich habe gefunden, daß dieser Vortheil in verschiedenen Fällen angeht, und werde demnach die Methode, so ich dabey gebraucht, hier angeben.

§. 76.

Man habe aus einem Winkel und den beyden anliegenden Seiten die gegenüberstehenden zu finden. Dieser Fall kommt bey Berechnung von Tabellen der Sonnenhöhe, und daher sehr häufig vor. Denn der Winkel ist der Stundenbogen, die beyden anliegenden Seiten sind der Zusatz der Polhöhe und Abweichung der Sonne, und die dritte

dritte dem Winkel gegenüberstehende Seite ist der Abstand der Sonne vom Scheitelpunct. Da wir demnach drey Seiten und einen Winkel haben, so gilt unter den Formeln des §. 47. die erste

$$\cos A = \cos B.\cos C + \sin B.\sin C.\cos a$$

Diese werden wir nun folgender Gestallt verwandeln. Erstlich ist

$$\cos a = 1 - 2\ \sin\tfrac{1}{2}a^2$$

folglich

$$\cos A = \cos B.\cos C + \sin B.\sin C.(1 - 2\sin\tfrac{1}{2}a^2)$$

Hieraus wird

$$\frac{\cos A}{2\sin B.\sin C} = \frac{\cos B.\cos C + \sin B.\sin C}{2\sin B.\sin C} - \sin\tfrac{1}{2}a^2$$

Nun ist (§. 35. No. 4.)

$$\cos B.\cos C + \sin B.\sin C = \cos(B - C)$$

folglich

$$\frac{\cos A}{2\sin B.\sin C} = \frac{\cos(B - C)}{2\sin B.\sin C} - \sin\tfrac{1}{2}a^2$$

Man setze nun

$$\frac{\cos(B - C)}{2\ \sin B.\sin C} = \sin\tfrac{1}{2}\phi^2$$

so hat man

$$\frac{\cos A}{2\sin B.\sin C} = \sin\tfrac{1}{2}\overset{2}{\phi} - \sin\tfrac{1}{2}\overset{2}{a} = (\sin\tfrac{1}{2}\phi + \sin\tfrac{1}{2}a).(\sin\tfrac{1}{2}\phi - \sin 2a)$$

$$= \sin(\tfrac{1}{2}\phi + \tfrac{1}{2}a).(\sin\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{2}a)$$ (§.35.N.22.)

folglich

folglich

$$\cos A = 2.\sin B.\sin C.\ \sin\frac{(\phi + a)}{2}.(\sin\frac{\phi - a)}{2}$$

welches die gesuchte Formel ist.

§. 77.

Wird diese Formel auf die Berechnung der Sonnenhöhen angewandt, so ist a der Stundenbogen, C der Abstand des Pols vom Scheitelpunct, B der Abstand der Sonne vom Pol, und 90 — A die Höhe der Sonne. Für einen gleichen Tag ist C und B folglich auch ϕ beständig. Hat man demnach ϕ gefunden, so sucht man den Logarithmus von 2 sin B. sin C, und die letzte Formel wird den Logarithmus des Sinus der Sonnenhöhe durch die bloße Addition zweyer Logarithmen zu demselben geben.

§. 78.

Es wird nicht schwer zu bestimmen, was in diesem Fall der Bogen ϕ vorstelle, welchen wir zur Abkürzung der Rechnung gebraucht haben. Zu diesem Ende setze man in der Gleichung

$$\frac{\cos A}{2\sin B.\sin C} = \sin\tfrac{1}{2}\phi^2 - \left(\frac{\sin a^2}{2}\right)$$

den $\cos A = 0$, und folglich $A = 90$ Grad, so hat man

$$0 = \sin\tfrac{1}{2}\phi^2 - \sin\tfrac{1}{2}a^2$$

daher

$$\sin \tfrac{1}{2}\Phi = \sin \tfrac{1}{2} a$$

$$\Phi = a$$

Demnach ist Φ der Winkel a, wenn der Bogen A = 90 Grad wird.

§. 79.

Wird dieses auf die Berechnung der Sonnenhöhe angewandt, so ist A = 90 Gr. wenn die Sonne am Horizont ist, daher ist a in solchem Fall der halbe Tagbogen, und so groß ist folglich φ. In der gefundenen Formel haben wir $\frac{1}{2}(\varphi + a)$ und $\frac{1}{2}(\varphi - a)$. Diese beyden Bögen stellen demnach den Abstand der Sonne vom Aufgang und vom Untergang in Graden des Stundenbogens vor, und beyde zusammen geben den Tagbogen.

§. 80.

Wenn man demnach die Tageslänge weiß, so läßt sich die Höhe der Sonne für jeden Augenblick durch die bloße Addition dreyer Logarithmen finden. Man verwandelt nemlich die Helfte der Zeit vom Aufgang der Sonne bis zu dem fürgegebenen Augenblick, und von diesem bis zum Untergang der Sonne in Grade, so hat man $\frac{1}{2}(\varphi + a)$ und $\frac{1}{2}(\varphi - a)$. Zu den Logarithmen der Sinus dieser Bögen addire man den Log. von 2 sin B. sin C, so hat man den Log. des Sinus der Sonnenhöhe.

§. 81.

An denen Orten und Tagen, wo die Sonne nicht untergeht, läßt sich diese Regel nicht gebrauchen, weil daselbst der Ausdruck

$$\frac{\cos(B - C)}{2 \sin B.\ \sin C} > 1$$

wird, und daher nicht durch einen Sinus ausgedruckt werden kann. Man setze aber in diesen Fällen

$$\frac{\cos(B - C}{2 \sin B.\ \sin C} = \text{tang}\ \psi^2$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a^2 = \text{tang}\ \varrho^2$$

so hat man

$$\frac{\cos A}{2 \sin B.\ \sin C} = \text{tang}\ \psi^2 - \text{tang}\ \varrho^2$$

$$= (\text{tang}\ \psi + \text{tang}\ \varrho).(\text{tang}\ \psi - \text{tang}\ \varrho)$$

$$= \frac{\sin(\psi + \varrho).\ \sin(\psi - \varrho)}{\cos \psi.^2\ \cos \varrho^2}$$

folglich

$$\cos A = \frac{2 \sin B.\ \sin C.\ \sin(\psi + \varrho).\sin(\varphi - \varrho)}{\cos \psi^2.\ \cos \varrho^2}$$

Diese Formel läßt sich ebenfalls durch Logarithmen berechnen. Sie ist aber ungleich weitläuftiger als die erstere, hingegen geht sie in jeden Fällen an.

§. 82.

Auf eine ganz ähnliche Art läßt sich aus einer Seite und den beyden anliegenden Winkeln der dritte Winkel finden, welcher der Seite gegenüber steht. Dieser Fall kömmt vor, wenn man den Winkel finden will, welchen die Ecliptic zu einer gegebenen Zeit mit dem Horizont macht. Denn da bilden der Horizont, der Aequator und die Ecliptic einen Triangel in welchem man die beyden Winkel, so der Aequator mit dem Horizont und der Ecliptic macht, nebst dem Bogen des Aequators gegeben annimmt, welcher zwischen dem Horizont und dem Aequinoctialpunct liegt. Man berechnet für jede Polhöhe Tabellen, die den Winkel der Ecliptic mit dem Horizonte vorstellen. Es ist demnach klar, daß die Berechnung solcher Tabellen sehr abgekürzt wird, wenn man sie auf eine bloße Addition dreyer Logarithmen bringen kann. Diß geschieht nun auf folgende Art.

§. 83.

Da hiebey 3 Winkel und eine Seite vorkommen, so gebrauchen wir aus den Formeln des §. 47. die zweyte

$$\cos a = \sin b . \sin c . \cos A - \cos b . \cos c$$

in welcher der Winkel a durch b, c, A mittelst einer bloßen Multiplication soll ausgedruckt werden. Nun ist

cos A

$$\cos A = -1 + 2 . \cos \tfrac{1}{2} A^2$$

folglich

$$\cos a = 2 \sin b . \sin c . \cos \tfrac{1}{2} A^2 - \sin b . \sin c - \cos b . \cos c$$

Ferner ist

$$\cos b . \cos c + \sin c . \sin b = \cos (b - c)$$

folglich

$$\cos a = 2 \sin b . \sin c . \cos \tfrac{1}{2} A^2 - \cos (b - c)$$

und

$$\frac{\cos a}{2 \sin b . \sin c} = \cos \tfrac{1}{2} A^2 - \frac{\cos (b - c)}{2 \sin b . \sin c}$$

Man setze nun

$$\frac{\cos b - c)}{2 \sin b . \sin c} = \cos \tfrac{1}{2} \Phi^2$$

so hat man

$$\frac{\cos a}{2 \sin b . \sin c} = \cos \tfrac{1}{2} A^2 - \cos \tfrac{1}{2} \phi^2 = (\cos 2 A + \cos 2 \Phi) . (\cos 2 A - \cos \tfrac{1}{2} \Phi)$$

$$= (\sin \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} \varphi) . (\sin (\tfrac{1}{2} A \tfrac{1}{2} \varphi))$$

daher endlich

$$\cos a = 2 . \sin b . \sin c . \sin (\tfrac{1}{2} \Phi + \tfrac{1}{2} A) . \sin (\tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{2} \Phi)$$

In dieser Formel wird $\Phi = A$, wenn $a = 90°$ wird. Stellet demnach a den Winkel vor, den die Ecliptic mit dem Horizont macht, so ist klar, daß diese Formel nirgends als zwischen den Wendecirculn kann gebraucht werden, weil nirgends sonsten $a = 90$ Grad wird.

§. 84.

§. 84.

Man setze demnach für die übrigen Fälle

$$\frac{\cos(b-c)}{2\sin b.\sin c}=\tang\psi^2$$

$$\cos 2A^2=\tang\varrho^2$$

so hat man

$$\frac{\cos a}{2\sin b.\sin c}=\tang\varrho^2-\tang\psi^2=(\tang\varrho+\tang\psi).(t\varrho-t\psi)$$

folglich

$$\cos a=\frac{2\sin b.\sin c.\sin(\varrho+\psi).\sin(\varrho-\psi)}{\cos\varrho^2.\cos\psi^2}$$

Es ist aber diese Formel wiederum weitläuftiger als die vorige, ungeacht sie von allgemeinerm Gebrauch ist.

§. 85.

Wir wollen noch ein drittes Beyspiel anbringen: Man habe bey 4 auf einander folgenden Stücken den äussersten Winkel zu finden. Dieser Fall kömmt bey der Berechnung von Azimuthaltabellen vor, wenn man nemlich das Azimuth aus dem Abstand der Sonne vom Pol, aus dem Stundenwinkel, und dem Abstande des Pols vom Scheitelpuncte zu suchen hat. Da hiebey 4 auf einander folgende Stücke sind, so haben wir aus den Formeln des §. 47. die dritte

$$\sin B.\cot A=\cos c.\cos B+\sin c.\cot a.$$

Da nun $\cot A=\cos A:\sin A$, so hat man

$$\sin B.\cos A=\cos c.\cos B.\sin A+\sin c.\cot a.\sin A.$$

und hieraus

$$\sin c.\sin A.\cot a=\sin B.\cos A-\cos B.\sin A.\cos c$$

Man ist

$$\cos c=2\cos\tfrac{1}{2}c^2-1$$

folglich

$$\sin c.\sin A.\cot a=\sin B.\cos A+\cos B.\sin A(1-2\cos\tfrac{1}{2}c^2)$$

Es ist aber

$$\sin B.\cos A+\cos B.\sin A=\sin(B+A)$$

folglich

$$\sin c.\sin A.\cot a=\sin(B+A)-2\cos B.\sin A.\cos\tfrac{1}{2}c^2$$

oder

$$\frac{\sin c.\cot a}{2\cos B.\sin A}=\frac{\sin(B+A)}{2\cos B.\sin A}-\cos\tfrac{1}{2}c^2$$

Man setze nun

$$\frac{\sin(B+A)}{2\cos B.\sin A}=\cos\tfrac{1}{2}\phi^2$$

so ist

$$\frac{\sin c.\cot a}{2\cos B.}=\cos\tfrac{1}{2}\phi^2-\cos\tfrac{1}{2}c^2=\sin\tfrac{1}{2}(\phi+c).\sin\tfrac{1}{2}(\phi-c)$$

daher endlich

$$\cot a=\frac{2.\sin(\tfrac{1}{2}\phi+\tfrac{1}{2}c).\sin(\tfrac{1}{2}\phi-\tfrac{1}{2}c).\cos B}{\sin c}$$

Nun ist $\phi=c$, wenn $\cot a=0$, oder $a=90°$ ist. Stellet demnach a das Azimuth vor, von Mitter-

Mitternacht an gerechnet, so kann es nicht 90° werden, es sey denn A > B, oder der Abstand der Sonne vom Pol grösser als der Abstand des Pols vom Scheitelpunct. Und in diesem Fall stellt Φ den Stundenbogen vor, wenn das Azimuth der Sonne 90 Grad ist.

Theorie der Zuverläßigkeit der Beobachtungen und Versuche.

§. 1.

Wenn es Witz und Scharfsinnigkeit erfordert, bey den Versuchen eine solche Auswahl der Umstände zu treffen, welche die Theorie, so dadurch bekräftigt oder angewandt werden soll, voraus setzt und nothwendig macht; so erfordert es nachher nicht wenig Beurtheilungskraft den wahren Werth der angestellten Versuche zu bestimmen, und dabey fest zu setzen, wie ferne man der geometrischen Schärfe, die man in der Ausübung niemals genau erhalten kann, nahe gekommen sey, und wie viel man zum höchsten noch davon abweiche? Diese Abweichung bestimmt den Grad der Zuverläßigkeit der Beobachtungen und Versuche, und da man diese in der Naturlehre und angewandten Mathematik als eben so viele Grundsätze gebraucht, so wird

wird die Theorie ihrer Zuverläßigkeit ungemein wichtig. Ich habe nicht gefunden, daß sie bißher auf Gründe wäre gebracht worden, weil man nur noch von dem einfachsten und leichtesten Fall Beyspiele hat. Es wird daher weder etwas altes noch unnützes seyn, wenn wir die Gründe dieser Theorie hier aus einander setzen, und ihre Anwendung in wirklichen und erheblichen Beyspielen zeigen.

§. 2.

Der erste Grundsatz ist dieser, daß sich in der Ausübung an keine geometrische Schärfe gedenken läßt, obgleich man sich allerdings Mühe geben solle, derselben so viel möglich ist, nahe zu kommen. Man will durch Versuche das wahre Maaß finden, welches die Natur wirklich gebraucht, z. E. die geographische Länge und Breite eines Ortes, das Gewicht oder die Schwere eines Körpers, den Grad der Wärme, die Länge einer Linie, die Größe eines Winkels, die Zeit einer Beobachtung ꝛc. Alle diese Bestimmungen hängen von der Genauigkeit der Instrumente, von der Sorgfalt des Beobachters, von der Schärfe der Sinnen, und von den Umständen der Beobachtung selbsten ab, und diese Stücke tragen immer mehr oder minder bey, daß wenn der Versuch mehrmalen wiederholt wird, der Erfolg immer mehr oder minder unterschieden ist, und

 daher

daher von dem wahren nothwendig mehr oder minder abweicht. Jeder Versuch wird dadurch unzuverläßig, und man kann an keinem unmittelbar erkennen, ob er dem wahren am nächsten sey oder nicht?

§ 3.

Man hat daher längst schon angefangen aus solchen Versuchen das Mittel zu nehmen, und dieses ist auch alles, was man dabey thun kann. Dieses Verfahren gründet sich darauf, daß so oft bey dem Versuche kein Vorsatz ist, mit Vorbedacht der Sache zu viel zu thun, man annehmen könne, daß jeder derselben eben so leicht im zu vielen als im zu wenigen fehlen könne, und gleich große Abweichungen auf beyden Seiten gleich möglich sind. Setzt man dieses voraus so läßt sich leicht erweisen, daß das Mittel aus mehrern Versuchen dem wahren desto näher kommen müsse, je mehr der Versuch ist wiederholt worden. Denn unter allen Fällen, die man sich dabey gedenken kan, ist derjenige am möglichsten, wobey gleich große Abweichungen auf beyden Seiten gleich ofte vorkommen.

§. 4.

Ferner läßt sich beweisen, daß derjenige Versuch, so von dem wahren am meisten abweicht, auch von dem Mittel aus allen am meisten abweiche, u. hinwiederum. Deßgleichen

chen auch, daß wenn man diesen am meisten abweichenden Versuch wegläßt, das Mittel aus den übrigen dem wahren näher sey, als das Mittel, so man aus allen genommen, und daß der Unterschied dieser beyden Mittel den Grad der Zuverläßigkeit der sämtlichen Versuche bestimme.

§. 5.

Da ich den Beweis dieser Sätze nebst noch mehrern dahin gehörigen bereits in der Photometrie gegeben, so werde ich mich dabey hier nicht länger aufhalten. Unter allen Fällen, wo man aus mehrern Versuchen das Mittel zu nehmen hat, ist der hier betrachtete der einfachste und leichteste, und zugleich der einige, wo man bißher das Mittel genommen hat, weil sich die Methode dabey wie von selbsten anbeut, und alle zusammengenommene Versuche in einerley Absicht und Umständen angestellt werden, und einerley Erfolg angeben sollten, wenn sie mit geometrischer Schärfe könnten angestellt werden.

§. 6.

Die schwerern Fälle, so wir hier eigentlich auf Gründe zu bringen gedenken, sind diejenigen, wo mehrere Versuche, die in ganz verschiedenen Umständen angestellt werden müssen, dennoch zusammen gehören,

hören, und ein Mittel daraus soll genommen werden. Hiebey giebt jeder Versuch ein besonderes Product, welches sich nach den Umständen richtet, und wobey die Umstände mit den Versuchen nach einem durch die Theorie bestimmten Gesetze müssen verglichen werden. Z. E. man mißt unter verschiedenen Polhöhen die Länge des Secundenpenduls. Sie ist nach den Polhöhen verschieden, und wächst vom Aequator gegen die Pole. Die Theorie giebt, daß der Ueberschuß mit dem Quadrat des Sinus der Breite in Verhältniß stehe. Jede Observation kann mehr oder minder vom wahren abweichen. Man muß zwo annehmen, wenn man eine Tabelle von der Länge des Penduls für jede Polhöhe berechnen will. Da aber jede Observation mehr oder minder unzuverläßig ist, so bleibt ungewiß, ob man zur Berechnung der Tabelle nicht die zwo schlechtesten annimmt. Die Tabelle sollte so heraus kommen, daß die sämtlichen Observationen am wenigsten davon abweichen. Sie sollte gleichsam das Mittel zwischen allen halten. Hier entsteht also natürlicher Weise die Frage, wie man dieses Mittel finden könne?

§. 7.

Wiederum man observirt ♀ oder ☿ in der Sonne, und bestimmt durch die Observation den Ort des Planeten in mehrern Augenblicken durch eben so viele Puncte. Die Theorie giebt, daß man diese Puncte, nach Abzug der Parallaxe als in einer geraden Linie liegend ansehen könne. Allein da jede Observation von dem wahren mehr oder minder abweichen kann, so ist die Frage, diese gerade Linie zwischen den observirten Puncten so durchzuziehen, daß sie gleichsam unter allen Observationen das Mittel hält, und die Puncte auf beyden Seiten so wenig als möglich ist, davon abweichen? Man kann allerdings eine Methode verlangen, diese Linie dergestallt zu ziehen, um es nicht auf ein Gerathewohl ankommen zu lassen.

§. 8.

Eben so, wenn man aus vielen beobachteten Aequinoctien und Solstitien, das Fortrücken der Aequinoctialpuncte bestimmen soll, so wären zwo Observationen dazu hinreichend. Allein da jede Observation um mehrere Minuten unzuverläßig ist, so wird allerdings die Methode, dieses Fortrücken so zu bestimmen, daß alle Observationen gleichen Antheil daran haben, viel zuverläßiger seyn. Man kann aus diesen Beyspielen sehen, daß alle Elemente, worauf sich die Astronomischen Tabellen gründen, von einer solchen Methode eine merkliche Verbesserung zu erwarten haben, zumal da dadurch der Grad der Zuverläßigkeit bestimmt wird. Wir werden

werden daher die verschiedene hiebey vorkommende Fälle der Ordnung nach durchgehen, und von dem leichtern zu dem schwerern fortschreiten.

§. 9.

Wir haben hiebey überhaupt zwo veränderliche Größen x, y, welche durch die Beobachtungen mit einander verglichen werden, so daß man für jedes x, so wir als eine Abscisse ansehen können, die dazu gehörende Ordinate y bestimmt. Diese Ordinaten würden eben so viele Puncte geben, wodurch eine gerade oder krumme Linie sollte gezogen werden, wenn die Versuche oder Beobachtungen sämtlich vollkommen genau wären. Da aber dieses nicht ist, so weicht die Linie mehr oder minder davon ab. Sie muß demnach so gezogen werden, daß sie ihrer wahren Lage am nächsten komme, und zwischen dem gegebenen Puncten gleichsam wie Mitten durch gehe.

§. 10.

Wir haben hiebey gleich Anfangs zween allgemeine Fälle zu unterscheiden. Denn entweder ist das Gesetz der zu ziehenden Linie durch die Theorie bestimmt, oder nicht. Im letzten Fall bleibt kein ander Mittel, als daß man die Linie von freyer Hand ziehe, und sie dient nur, um die zwischen die observirten Ordinaten fallenden Ordinaten so genau als es durch eine Construction geschehen kann, zu bestimmen, und sie folglich für solche Umstände zu finden, die man nicht hat observiren können, und die man dessen unerachtet gebraucht.

§. 11.

Ist aber das Gesetz der Verhältniß der Ordinaten zu den Abscissen bekannt, so läßt sichs mehr methodisch verfahren. Der leichteste und einfachste Fall hiebey ist, wenn die Linie, so durch die Enden der Ordinaten gehen soll, eine gerade Linie ist. Und bey diesem werden wir den Anfang machen.

§. 12.

Es seyn demnach die Abscissen A, B, C, D, E, F die denselben entsprechenden Ordinaten, Fig. 1.
Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ff, so wie sie aus den Versuchen gefunden worden. Die Endpuncte derselben A, b, c, d, e, f sollten vermöge der Voraussetzung in einer geraden Linie liegen. Da sie es aber nicht sind, so ist die Frage, eine gerade Linie HI dergestallt zu ziehen, welche, so viel möglich ist, der wahren am nächsten komme, oder von den Puncten A, b, c, d, e, f, am wenigsten abweiche,

§. 13.

§. 13.

Wir setzen hiebey voraus, daß ungeacht die Observationen keine geometrische Schärfe haben, ihre Abweichung von derselben so sey, daß man keiner vor der andern einen Vorzug geben könne, oder daß alle Versuche mit gleicher Sorgfalt und Auswahl der Umstände angestellt worden, folglich die Abweichung vom wahren schlechthin daher rühre, daß das Instrument an sich keine grössere Schärfe gebe, und das Auge nicht kleinere Unterschiede bemerken könne.

§. 14.

Da man also keinen Grund hat, einem der Puncte A, b, c, d, e, f einen Vorzug vor den andern zu geben, so ist offenbar, die Linie HI müsse so gezogen werden, daß diese Puncte auf der einen Seite so viel davon abweichen als auf der andern, oder daß die Summe der Abweichungen auf beyden Seiten einander gleich sey. Man sieht leicht, daß diese Bedingung das eigentliche und wahre Mittel aus allen Versuchen giebt, und keinem ein Vorzug vor den andern gegeben wird.

§. 15.

Hieraus folgt aber, daß diese Linie durch den Mittelpunct der Schwere aller Puncte A, b, c, d, e, f gehen müsse. Denn es ist

ist aus der Mechanic bekannt, daß der Mittelpunct der Schwere die Eigenschaft hat, daß wenn eine Linie dadurch gezogen wird, die Summe der Entfernung jeder Puncte auf beyden Seiten dieser Linie einander gleich sey, so bald jedem Punct ein gleiches Gewicht gegeben wird.

§. 16.

Dadurch wird demnach ein Punct bestimmt, durch welchen die Linie HI nothwendig gehen muß, wenn sie anders zwischen allen Versuchen das wahre Mittel halten soll. Man darf nemlich nur zu den Puncten A, b, c, d, e, f den Mittelpunct der Schwere suchen. Dieser sey G. Demnach muß die Linie HI durch G gezogen werden. Und ungeacht ihre Lage dadurch noch nicht bestimmt ist, so weiß man doch nunmehr eine Ordinate GK zu der Abscisse AK, welche eben so genau und nach eben den Grundsätzen bestimmt ist, als wenn man in dem oben erwähnten einfachsten Fall (§. 3) das arithmetische Mittel aus allen Versuchen genommen hätte.

§. 17.

Die Abscisse AK und Ordinate GK lassen sich jede besonders finden. Denn GK ist das Mittel aus allen Abscissen, folglich da in der Figur die erste Abscisse und Ordinate = 0 ist, so hat man

AK = (o + AB + AC + AD + AE + AF) : 6.
KG = (o + Bb + Cc + Dd + Ee + Ff) : 6.

Es wird nemlich die Summe aller Ordinaten und Abscissen durch die Anzahl derselben getheilt, um das Mittel AK und GK zu haben. Dieses Verfahren bedarf hier keines langen Beweises, weil man auf eben die Art den Mittelpunct der Schwere sucht, dessen Stelle hier der Punct G vertritt.

§. 18.

Wenn man die Verhältniß der Ordinaten zu den Abscissen weiß, so ist die Neigung der Linie HI gegen AF gegeben. Da sie nun durch den Punct G soll gehen, so kann sie ohne weiters gezogen, und dadurch jede Ordinate und Abscisse bestimmt werden. So z. E. wenn HI mit AF parallel seyn soll, so wird die Bestimmung der mittlern Abscisse ganz überflüßig, weil es genug ist das Mittel GK aus allen Ordinaten zu wissen.

§. 19.

Weiß man hingegen die Verhältniß der Ordinaten zu den Abscissen nicht, so muß die Lage der Linie HI aus andern Gründen bestimmt werden. Der Punct G ist allein nicht hinreichend. Denn da er alle Eigenschaften des Mittelpuncts der Schwere hat, so wird jede Linie, so man durch denselben zieht, die Summe der Entfernung jeder Puncte A, b, c, d, e, f auf beyden Seiten gleich groß machen.

§. 20.

Um demnach die Linie HI nach eben diesen Gründen ziehen zu können, so theile man die Versuche in zwo gleich große Classen, indem man die ersten A, b, c und die letzten d, e, f besonders nimmt. Man suche für beyde ihre Mittelpuncte der Schwere g, γ besonders, und ziehe die Linie HI durch dieselbe, so wird sie die verlangte Lage haben.

§. 21.

Denn einmal geht sie durch den gemeinsamen Mittelpunct der Schwere aller Puncte G. So dann sind die beyden Puncte g, γ so bestimmt, als wenn man bey dem erstern die Versuche d, e, f bey dem letztern die Versuche A, b, c nicht angestellt hätte, folglich habe jene ohne Rücksicht auf dieses und jede Classe besonders ihr eigenes Mittel.

§. 22.

Um nun den Grad der Zuverläßigkeit der sämmtlichen Versuche zu bestimmen, so lasse man den Punct, der von der gezogenen Linie HI am meisten abweicht, weg, und ziehe für die übrigen eine neue Linie. Der Unterschied zwischen beyden wird anzeigen, wie ferne in ihrer

ihrer Lage noch eine Unzuverläßigkeit zurücke bleibt. Der Grund dieses Verfahrens ist demjenigen, so wir oben (§. 4.) für den einfachsten Fall gegeben haben ganz ähnlich.

§. 23.

Es wird selten zutreffen, daß die Linie HI durch den Anfang A gehe, von welchem wir in der Figur die Abscissen und Ordinaten zu zählen angefangen haben. Wenn man demnach die Abscissen und Ordinaten nach der Linie HI verbessern will, so kann man einen der Puncte g, G, γ zum Grunde legen, und nach diesen die Verbesserung vornehmen. Oder man findet die Verhältniß der Ordinaten zu den Abscissen, wenn man $\gamma\varkappa - gk$ durch $A\varkappa - Ak$ theilet.

§. 24.

Um nun diese Methode auf Analytische Ausdrücke zu bringen, so nenne man, nachdem die Versuche in die zwo Classen getheilt worden, für die

	erste Claß.			zweyte Claß.
die Anzahl der Versuche	n	=	=	N
die Summe der Abscissen	p	=	=	P
die Summe der Ordinaten	q	=	=	Q
die mittlern Abscissen	m	=	=	M
die mittlern Ordinaten	r	=	=	R.

so hat man

$$m = p : n \qquad M = P : N.$$
$$r = q : n \qquad R = Q : N.$$

Ferner setze man

$$\frac{(R - r)}{M - m} . m = k$$

so wird $r - k$ anzeigen, um wie viel die erste Ordinate müsse vergrößert oder verkleinert werden, damit sie mit der Linie HI übereintreffe. Endlich zeigt $\frac{R - r}{M - m}$ das Wachsthum der Ordinate für jede Abscisse $= 1$ an.

§. 25.

Ich werde nun diese Methode durch wirkliche Beyspiele erläutern, bey welchen sie längst schon hätte angewandt werden sollen, wenn sie bekandt gewesen wäre. Der Herr Cassini hat in seine Elemens d' Astronomie die Zeit der Nachtgleichen und Sonnenwenden, wie sie über ein halbes Jahrhundert zu Paris sind beobachtet worden, in einer Tabelle vorgestellt. Man gebraucht dieselben um die wahre Länge des tropischen Jahres dadurch zu bestimmen. Da aber bey jeder eine Ungewißheit von einer halben Stunde vorkömmt, so wird es desto nothwendiger, wenn man aus allen das Mittel nimmt, und seine Zuverläßigkeit erörtert. Es wird daher weder an Beyspielen zu unserer Methode mangeln, noch an sich unnütz seyn, wenn wir dieses Mittel für alle vier Jahrszeiten aus diesen Beobachtungen zu bestimmen vornehmen.

§. 26.

I. Für die Nachtgleichen des Frühlings. Die erste so in der Caßinischen Tabelle vorkömmt, fällt, der Beobachtung zufolge, auf den 9 Merz, 7 St. 41 M. alten Calenders im Jahr 1672. Wir werden diese zum Grund legen, und in einer Tabelle hersetzen, wie viel die folgenden vorgerückt sind, wenn wir das Julianische Jahr von 365 Tagen 6 Stunden rechnen.

Jahr	St. M.	Jahr	St M.	Jahr	St M.
0	0: 0	30	5:44	51	9: 2
8	1:53	31	5:37	52	9:45
9	2:23	32	6:32	53	9: 8
11	2:38	33	6:37	54	9:18
12	2:31	35	6:49	56	10:30
14	3:26	36	7:16	57	10:16
15	3: 7	38	6:58	58	10: 6
16	3:24	39	6:58	59	11: 4
17	3:45	40	7:28	60	10:40
18	3:29	41	7:39	61	11: 4
19	3:55	43	7:45	62	11:30
20	3 41	44	7:55	63	11:20
22	4: 0	45	8:17	64	11:40
23	4 41	46	8:43	65	11:40
24	4:58	47	8:39	66	11:37
25	5: 6	48	8:33	67	11:50
26	4:56	49	8:28		
27	5 11	50	9: 5		

§. 27.

Hier haben wir in allem 53 Observationen und einen Zeitlauf von 67 Jahren. Wir werden die Jahre als Absciſſen, die Vorrückung der Nachtgleiche als Ordinaten ansehen, und die ersten 24 Observationen von den 29 letztern absondern, um zwo Classen zu haben. Addirt man demnach die zu jeder Classe gehörenden Columnen zusammen, so findet man

1 Classe.	2 Classe.
$n = 24$	$N = 29$
$p = 503$	$P = 1520$
$q = 101^{St.}:39'$	$Q = 274^{St.}:36'$

folglich

$$m = \frac{p}{n} = \frac{503}{24} = 20{,}9583 \quad M = \frac{P}{M} = \frac{1520}{29} = 52{,}4138$$

$$r = \frac{q}{n} = \frac{101:39}{24} \; 4^{St.}:14':7\tfrac{1}{2}'' \quad R = \frac{Q}{N} = \frac{274:36}{29} = 9^{St.}:28':8\tfrac{8}{29}''$$

folglich

$$R - r = 5^{St.}:14':0''\tfrac{23}{29}$$
$$M - m = 31{,}4555.$$

und

$$k = \frac{R - r}{M - m} . m = 3^{St.}:29':13''$$

Es ist aber $r = 4:14:7\frac{1}{2}$

folglich $r - k = 0:44:54\frac{1}{2}$

Und um so viel ist die erste Ordinate, die wir $= 0$ genommen haben grösser, und folglich die Nachtgleiche 1672 früher, als sie Herr Caßini ansetzt. Wenn man demnach $44' \cdot 54\frac{1}{2}''$ von 1672 Mart. 9. St. 7. M. 41. abzieht, so bleibt die genauer bestimmte Zeit der Nachtgleiche des 1672 Jahres den 9 Merz, 6 St. 56 Min. $5\frac{1}{2}''$. Ferner ist $\frac{R-r}{M-m} = 10' \cdot 0''$. Und um so viel geht die Frühlingsnachtgleiche in den Jahren dieser Tabelle rückwerts.

§. 28.

Unter allen diesen Beobachtungen geht die erste am meisten von dem gefundenen Mittel ab, und der Unterschied beträgt beynahe $\frac{3}{4}$ Stund, um welche die beobachtete Zeit zu spät ist. Wenn wir dieselbe demnach weglassen, und die Rechnung mit den übrigen vornehmen, so haben wir $n = 23$, das übrige wie vorhin, folglich

$$m = 21,8696$$
$$r = 4 \text{ St. } 25 \text{ M. } 10\tfrac{1}{2} \text{ S.}$$
$$k = 3 \cdot 37 \cdot 1\tfrac{1}{3}$$
$$r - k = 0 \cdot 48 \cdot 9\tfrac{1}{6}$$

und daher aus dieser Rechnung die Nachtgleiche 1672 um drey Minuten früher als aus der vorigen, und bis auf 3 Minuten ist demnach diese Nachtgleiche zuverläßig. Ferner finden wir nach dieser letztern Rechnung das Vorrücken der Nachtgleiche jährlich

$\frac{R-r}{M-m} = 9' \cdot 55\frac{1}{8}''$. und folglich nur um $4\frac{3}{4}$ Secunden grösser als nach der erstern Rechnung, wodurch wiederum der Grad ihrer Zuverläßigkeit bestimmt wird. Die Nachtgleiche selbst fällt auf den 9 Merz 6 Stunde $52' \cdot 51''$.

§. 29.

Wenn man für das Jahr 1712, welches ebenfalls ein Schaltjahr, und von 1672 um 40 Jahre entfernt ist, und überdiß fast in die Mitte aller observirten Jahre fällt, die Nachtgleiche nach beyden Rechnungen sucht, so muß man nach der ersten Rechnung 40mal $9' \cdot 59\frac{9}{10}''$ vom 6 Merz 6 St. 56 M. nach der andern aber 40mal $9' \cdot 55\frac{1}{8}''$ vom 6 Merz 6 St. $52' \cdot 51''$ rückwerts zählen, und die Nachtgleiche 1712 wird

		T.	St.	′	″
nach der ersten Rechn. auf	Merz	9	0	16	$9\frac{1}{2}$
nach der andern auf	Merz	9	0	16	6

fallen, demnach sind hier beyde Rechnungen nur um $3\frac{1}{2}$ Secunden verschieden.

§. 30.

11.° Für die Nachtgleichen des Herbstes. Die erste, so in der Caßinischen Tabelle vorkömmt, fällt auf den 12 Sept. 6 St. 34'. des 1682 Jahrs. Das Fortrücken der folgenden stellt nachstehende Tabelle vor.

Jahr	St. M.	Jahr	St. M.	Jahr	St. M.
0	0 ⸗ 0	16	3 ⸗ 26	36	7 ⸗ 2
1	0 ⸗ 3	19	3 ⸗ 53	37	7 ⸗ 22
2	0 ⸗ 33	20	3 ⸗ 55	38	7 ⸗ 50
3	0 ⸗ 3	21	4 ⸗ 13	39	7 ⸗ 50
4	1 ⸗ 0	23	5 ⸗ 24	40	8 ⸗ 14
5	0 ⸗ 49	24	4 ⸗ 57	41	8 ⸗ 32
6	0 ⸗ 41	—	—	42	8 ⸗ 49
7	1 ⸗ 34	27	4 ⸗ 50	44	9 ⸗ 15
8	1 ⸗ 27	28	5 ⸗ 22	45	9 ⸗ 14
9	2 ⸗ 18	29	6 ⸗ 10	46	9 ⸗ 31
10	2 ⸗ 0	30	6 ⸗ 13	47	9 ⸗ 6
11	2 ⸗ 9	31	6 ⸗ 42	52	10 ⸗ 2
12	2 ⸗ 12	32	6 ⸗ 53	53	10 ⸗ 28
13	2 ⸗ 46	33	7 ⸗ 0	54	10 ⸗ 47
14	2 ⸗ 58	34	7 ⸗ 22	56	11 ⸗ 13
15	2 ⸗ 46	35	7 ⸗ 12		

§. 31.

Hier sind in allem 46 Beobachtungen, welche zu 22 und 24 in zwo Classen getheilt, wie vorhin geben

1 Classe	2 Classe
$n = 22$	$N = 24$
$p = 243$	$P = 949$
$q = 49^{St.} ⸗ 7'$	$Q = 192^{St.} ⸗ 95'$

folglich

$$m = \frac{p}{n} = 11,04545$$

$$M - m = 28,49621$$

$$M = \frac{P}{N} = 39,54166$$

r =

$$r = \frac{q}{n} = 2^{St.} ⸗ 13' ⸗ 57\tfrac{3}{11}''$$

$$R = \frac{Q}{n} = 8 ⸗ 2 ⸗ 27\tfrac{1}{2} \quad R - r = 5^{St.} ⸗ 48' ⸗ 30\tfrac{5}{22}''.$$

$$k = \frac{R - r}{M - m}.m = 2 ⸗ 15 ⸗ 5$$

$$r - k = -0 ⸗ 1 ⸗ 8$$

Demnach muß die erste Ordinate um 1' ⸗ 8" vermindert werden, und um so viel ist also die Nachtgleiche 1682 später, und fällt folglich auf den 12 Sept. 6 St. 35' ⸗ 8." Es ist ferner das jährliche Fortrücken der Herbst Nachtgleichen

$$\frac{R - r}{M - m} = 12' ⸗ 14\tfrac{1}{7}''.$$

§. 32.

Sucht man nun nach diesen Sätzen die Zeiten der Nachtgleichen für die Jahre der Caßinischen Tabelle, so findet sich der gröste Unterschied bey dem 23ten Jahr. In 23 Jahren ist das Fortrücken der Nachtgleiche 23mal $12' ⸗ 14\tfrac{1}{7}'' = 4$ St. $41' ⸗ 25.''$ Die Tabelle giebt sie 5 St. 24'. folglich $42\tfrac{1}{2}$ Minuten mehr. Läßt man demnach dieses Jahr aus der Rechnung weg, so findet man

$n = 21$
$p = 220$
$q = 43^{St.} ⸗ 43'$

N, P, Q wie vorhin, folglich $m = 10,47620$, $r = 2^{St.} ⸗ 4' ⸗ 54\tfrac{2}{7}''$

M — m

$$M - m = 29,03546$$
$$R - r = 5^{St.}\ 57'\ 33\tfrac{3}{14}''$$
$$k = 2 ⸗ 9 ⸗ 0\tfrac{1}{2}$$
$$r - k = -0 ⸗ 4 ⸗ 6\tfrac{3}{14}$$

demnach die Nachtgleiche 1682 den 12 Sept. 6 St. 38′ ⸗ 6⅓″. und folglich nur um 3 Minuten später als nach der ersten Rechnung. Ferner das Fortrücken der Nachtgleiche

$$\frac{R - r}{M - m} = 12' ⸗ 18\tfrac{4}{7}$$

und folglich nur um $4\frac{5}{7}$ Secunden grösser als vorhin. Endlich ist für 30 Jahre das Fortrücken nach der ersten Rechnung $6^{St.} ⸗ 7' ⸗ 4''$. folglich die Zeit der Nachtgleiche 1712, den 11 Sept. $12^{St.}\ 28' ⸗ 4''$. Nach der andern Rechnung den 11 Sept. 12 St. 28′ ⸗ 40″, folglich nur um 36 Secunden verschieden.

§. 33.

III.° Für die Sommer Sonnenwende. Hier fängt die Caßinische Tabelle wiederum bey dem Jahr 1672 an, und setzt die Zeit 0 ♋ den 10 Jun 7. St. 24 M. Das Fortrücken der folgenden Jahre stellt nachstehende Tabelle vor:

Jahr.	St. M.	Jahr	St. M.	Jahr	St. M.
0	0 ⸗ 0	29	5 ⸗ 34	46	8 ⸗ 37
12	1 ⸗ 58	30	5 ⸗ 48	47	8 ⸗ 46
13	2 ⸗ 44	31	5 ⸗ 49	48	9 ⸗ 4
14	2 ⸗ 14	32	6 ⸗ 8	49	9 ⸗ 13
15	2 ⸗ 24	33	6 ⸗ 10	50	9 ⸗ 54
16	2 ⸗ 37	34	6 ⸗ 9	51	10 ⸗ 23
17	2 ⸗ 54	35	6 ⸗ 32	52	10 ⸗ 6
18	3 ⸗ 7	36	6 ⸗ 41	53	10 ⸗ 6
19	3 ⸗ 24	37	7 ⸗ 6	54	10 ⸗ 38
20	3 ⸗ 52	38	7 ⸗ 21	55	10 ⸗ 50
21	4 ⸗ 11	39	7 ⸗ 34	56	11 ⸗ 22
22	4 ⸗ 10	40	7 ⸗ 48	57	11 ⸗ 15
23	4 ⸗ 23	41	7 ⸗ 55	58	11 ⸗ 8
24	4 ⸗ 39	42	8 ⸗ 9	59	11 ⸗ 49
25	4 ⸗ 49	43	8 ⸗ 22	60	11 ⸗ 56
26	4 ⸗ 54	44	8 ⸗ 27	62	12 ⸗ 8
27	5 ⸗ 14	45	8 ⸗ 34	63	12 ⸗ 6
28	5 ⸗ 24			64	12 ⸗ 29
				65	12 ⸗ 43
				66	12 ⸗ 51

§. 34.

Der Herr Caßini sieht die Beobachtungen des 50 und 51 Jahrs als zweifelhaft an. Wir werden sie demnach weglassen, und die übrigen 53 in zwo Classen zu 29 und 24 getheilt geben

erste Classe	zweyte Classe.
$n = 29$	$N = 24$
$p = 714$	$P = 1269$
$q = 133$ St. 50.′	$Q = 246$ St. 22′.

folglich

$m = \frac{p}{n} = 24,6207$ $\quad r = 4$ St. $36'\ 53\frac{4}{5}''$

$M = \frac{P}{N} = 52,8750$ $\quad R = 10 \,⸗\, 15 \,⸗\, 55$

$M - m = 28,2543$ $\quad R - r = 5 \,⸗\, 39 \,⸗\, 1\frac{1}{5}$

$$k = \frac{R - r}{M - m} = 4^{\text{St.}} \,⸗\, 55' \,⸗\, 27\frac{1}{3}''$$

$$r = 4 \,⸗\, 36 \,⸗\, 53\frac{4}{5}$$

$$r - k = -0 \,⸗\, 18 \,⸗\, 33\frac{1}{2}$$

um so viel ist demnach die erste Ordinate kleiner, und die Sonnenwende 1672 später, als sie die Tafel giebt. Sie fällt demnach auf den 10 Jun. 7 St. 42′ $33\frac{1}{2}''$. Ferner ist das jährliche Fortrücken dieser Sonnenwende

$$\frac{R - r}{M - m} = 12'\,0\frac{1}{15}''$$

folglich für 40 Jahr 8 St. 0′ 3″. Demnach war sie 1712 den 9 Jun. 23 St. 42′ $30\frac{1}{2}''$.

§. 35.

Die Sonnenwenden lassen sich überhaupt genauer beobachten als die Nachtgleichen. Es ist

ist daher auch hier der gröste Unterschied zwischen der Rechnung und der Tabelle, welcher auf das 56 Jahr fällt nur $27\frac{2}{5}$ Min. welches den Grad der Unzuverläßigkeit um die Helfte geringer macht, als wir ihn bey den Nachtgleichen gefunden.

§. 36.

IV.° Für die Wintersonnenwende. Die erste ist in der Tabelle des Hrn. Caßini 1684 den 10 Dec. 8 St. 21′. Das Fortrücken wie folgt.

Jahr	St. M.	Jahr	St. M.	Jahr	St. M.
0	0 ⸗ 0	18	2 47	36	6 ⸗ 13
1	0 ⸗ 14	19	3 ⸗ 5	37	6 ⸗ 44
2	0 ⸗ 17	20	3 ⸗ 21	38	6 43
3	0 ⸗ 38	21	3 ⸗ 31	39	6 ⸗ 28
4	0 ⸗ 39	22	3 ⸗ 49	40	6 ⸗ 32
5	0 ⸗ 45	23	4 ⸗ 1	41	6 ⸗ 49
6	0 56	24	3 ⸗ 50	42	6 ⸗ 54
7	1 ⸗ 5	25	4 24	43	7 ⸗ 27
8	1 ⸗ 25	26	4 ⸗ 47	44	7 ⸗ 45
9	1 ⸗ 47	27	4 ⸗ 52	45	8 ⸗ 9
10	1 ⸗ 41	28	5 ⸗ 10	46	8 ⸗ 11
11	2 ⸗ 9	29	4 ⸗ 42	47	8 ⸗ 14
12	2 ⸗ 5	30	4 56	48	8 ⸗ 30
13	2 ⸗ 25	31	5 ⸗ 8	49	8 ⸗ 35
14	2 ⸗ 31	32	5 ⸗ 16	50	8 ⸗ 24
15	2 ⸗ 41	33	5 25	51	8 39
16	2 ⸗ 35	34	5 ⸗ 49	52	9 ⸗ 9
17	2 ⸗ 41	35	6 ⸗ 23	53	9 6

§. 37.

§. 37.

Werden diese 54 Beobachtungen in zwo gleich große Classen getheilt, so haben wir

erste Classe.	zweyte Classe.
$n = 27$	$N = 27$
$p = 351$	$P = 1080$
$q = 60$ St. $9'$	$Q = 186$ St. $13'$.

Da hier $N = n$, so haben wir

$$n.k = \frac{Q - q}{P - p} . p = 60 \text{ St. } 41' \, 56''.$$

$$Q = 60 \,\text{,}\, 9 \,\text{,}\, 0$$

$$Q - p = -0 \,\text{,}\, 32 \,\text{,}\, 56$$

$$r - k = \frac{Q - p}{n} = -0 \,\text{,}\, 1 \,\text{,}\, 13$$

Um so viel muß die erste Ordinate kleiner werden, und die Sonnenwende 1684 fällt daher später auf den 10 Dec. 8 St. 22′ 13″. Ferner ist das jährliche Fortrücken, weil $n = N$,

$$\frac{Q - q}{P - p} = 10' \, 22\tfrac{5}{9}''.$$

Dieses giebt für 28 Jahre 4 St. 50′ $31\frac{1}{2}''$, daher fällt die Sonnenwende 1712 auf den 10 Dec. 3 St. 31′ $41\frac{1}{2}''$.

§. 38.

Bißher haben wir die Bestimmung der Zeit und des Fortrückens der beyden Nachtgleichen und Sonnenwenden als Beyspiele zur Erläuterung unserer Methode vorgenommen, welche immer der Hauptgegenstand dieser Abhandlung ist. Man könnte es daher leicht als eine Ausschweifung ansehen, wenn wir uns nun bey diesen Beyspielen besonders noch länger aufhalten, und sie mit einander vergleichen. Allein es ist keine bloße Ausschweifung, weil die genauere Vergleichung dieser Beyspiele gar leicht einen Zweifel wider die Richtigkeit der Methode erregen, oder wenn diese richtig ist, uns eine neue Anomalie in dem Fortrücken der Puncte des Thierkreyßes entdecken wird.

§. 39.

Wir haben das jährliche Fortrücken der 4 Jahrszeiten folgendergestallt gefunden:

	St.	M.	S.
0 ♈	0	10	0
0 ♋	0	12	$0\frac{1}{15}$
0 ♎	0	12	$14\frac{1}{7}$
0 ♑	0	10	$22\frac{1}{2}$

und dabey angemerkt, daß dieses Fortrücken bey den Nachtgleichen bis auf 4 oder 5 Secunden, bey den Sonnenwenden noch fast doppelt mehr zuverläßig sey. Vergleichen wir sie aber unter einander, so finden wir Unterschiede nicht von etlichen wenigen Secunden, sondern von mehr als 2 Minuten. Dieses ist viel zu merklich, als daß es so un-

 unter-

untersucht hingehen, und nicht einen Zweifel wider die Methode oder wider die Beobachtungen selbst erregen sollte.

§. 40.

Nun weiß man zwar schon, daß bey dem Fortrücken dieser Puncte eine Ungleichheit statt findet, welche theils von der ungleichen Geschwindigkeit des Laufes der Sonne, theils von der Neigung der Bahn des Mondes gegen die Ecliptic herrührt. Die leztere Ursache kehrt ungefehr in $18\frac{1}{2}$ Jahren wieder, und da sie, so viel man weiß, alle 4 Puncte gleich betrift, so kann hieraus keine bemerkbare Ungleichheit entstehen, zumal, da wir hier aus mehr als dreymal so vielen Jahren das Mittel haben. Hingegen verursacht die erste Ursache in der That eine Ungleichheit. Denn ist das Fortrücken dieser 4 Hauptpuncte des Thierkreyses in Theilen des Circuls gerechnet bey jedem gleich groß, z. E. jährlich 51 Secunden eines Grades, so wird dieser Bogen von der Sonne im Winter in kürzerer Zeit durchlaufen als im Sommer, im Frühling und Herbst aber hält sie ungefehr das Mittel. Der Unterschied von dem wahren Mittel findet sich, wenn man nachrechnet, für

0 ♈ — 0 ′ $6\frac{1}{2}$″ Zeit
0 ♋ + 0 〃 $41\frac{2}{3}$
0 ♎ + 0 〃 $5\frac{2}{3}$
0 ♑ — 0 〃 $40\frac{5}{6}$

§. 41.

§. 41.

Hingegen ist das Mittel aus den Zahlen des §. 39. = 11′ $9\frac{1}{6}$″. Zieht man von diesem Mittel jede Zahl ab, so bleiben die Unterschiede für

0 ♈ — 1 ′ $9\frac{1}{6}$″.
0 ♋ + 0 〃 $50\frac{9}{10}$.
0 ♎ + 1 〃 5.
0 ♑ — 0 〃 $46\frac{2}{3}$.

§. 42.

Diese Unterschiede sollten den erst angegebenen (§. 40.) ganz oder doch bis auf wenige Secunden gleich seyn. So aber gehen sie merklich davon ab, und zwar für

0 ♈ um + 1 ′ $2\frac{2}{3}$″
0 ♋ — 0 〃 $9\frac{1}{4}$
0 ♎ — 1 〃 $0\frac{2}{3}$
0 ♑ + 0 〃 $5\frac{5}{6}$

§. 43.

Diese neuen Unterschiede sind noch grösser, als die so wir aus der Theorie des Sonnenlaufes (§. 40.) gefunden haben. Sie sind überdiß in einer gewissen Ordnung, bey den Nachtgleichen am grösten, und bey den Sonnenwenden am kleinsten. Es scheint daher, daß in der jährlichen Präceßion der Puncte des Thierkreyses noch eine Ungleichheit sey, die man noch nicht erörtert hat. Denn

Ff 2 das

das mittlere Fortrücken dieser Puncte, so wir (§. 41.) von 11′ 9⅞″ gefunden haben, und welches aus 206 Observationen das wahre und eigentliche Mittel ist, giebt die mittlere Länge des tropischen Sonnenjahres 365 T. 5 St. 48′ 51″. so wie es die Vergleichung der ältesten Observationen mit den neuen giebt. Aus denen für das Jahr 1712 bestimmten Zeiten des Eintritts der Sonne in 0 ♈, ♋, ♎, ♑ findet sich die Eccentricität der Erdbahn 0, 01683, und der Ort der Sonnennähe zur Zeit der Herbstnachtgleiche 1712 in ♋ 7° 51′ 55″. Die gröste Gleichung 1° 55′ 43″. Auch diese Bestimmungen halten zwischen den besten astronomischen Tabellen das Mittel, ungeacht diese aus einer ungleich längern Reyhe von Jahren hergeleitet sind, da wir hingegen nur ungefehr ein halbes Jahrhundert dazu gebraucht haben. Man sieht demnach, wie diese Methode dienet, den Mangel mehrerer Beobachtungen von ältern Zeiten zu ersetzen. Uebrigens ist zu bemerken, daß man hingegen die Schlüsse, so man daraus zieht, nicht unbedingt weiter ausdehnen kann, als auf die Jahre, welche man in die Rechnung gezogen. Denn so könnte es gar wohl seyn, daß während den Jahren der Caßinischen Tabelle die daraus gefolgerte ungleiche Fortrückung der Puncte des Thierkreyses (§. 39. u. f.) besondern Umständen zuzuschreiben wäre, welche entweder nicht immer oder wenigstens nicht allzeit auf einerley Art statt hätten. Wir werden uns aber hier nicht länger dabey aufhalten.

§. 44

Bißher haben wir den Fall betrachtet, wo die Linie HI welche das Mittel zwischen allen Beobachtungen oder Versuchen geben soll, gerade ist, oder als gerade angesehen werden kann. Es giebt aber unzählige Fälle, wo sie nicht gerade ist, und wo man folglich die Gleichung haben muß, so die Verhältniß der Ordinaten zu den Abscissen ausdrückt. Wir können alle diese Fälle in zwo Classen theilen. Denn entweder man weiß den Anfang der Abscissen genau, oder derselbe ist ebenfalls noch unbekannt. Im ersten Fall lassen sich mehrentheils die Abscissen so verwandeln, daß man statt der krummen Linie, welche gezogen werden sollte, eine gerade gebrauchen kann. Da die Rechnung dadurch sehr erleichtert wird, so wollen wir diese Reduction in einigen Beyspielen zeigen.

§. 45.

Man weiß, daß die Länge des Penduls sich mit der Polhöhe ändert. Man hat auch bereits eine ziemliche Anzahl von Beobachtungen seiner Länge in sehr verschiedenen Polhöhen, vom Gleichstriche an, biß zum Polarcircul. Setzt man nun, diese Längen werden durch die Ordinaten vorgestellt, so kann man

man die Absciſſen auf mehrerley Arten ausdrücken. Wollte man dadurch ſchlechthin die Grade der Polhöhe ſelbſt vorſtellen, ſo würde eine krumme Linie herauskommen, deren Beſtimmung von der Rectification der Circulbögen abhängt, und die folglich transcendent wäre. Man weiß aber, daß das Pendul unter dem Aequator am kürzeſten iſt, und die Theorie giebt, daß ſich ſeine Verlängerung oder der Ueberſchuß ſeiner Länge nach den Quadraten der Sinus der Breiten richtet. Würde man nun die Abſciſſen nur durch die Sinus der Breiten ausdrücken, ſo würde man ſtatt der geraden Linie AI eine Parabel bekommen, und die Rechnung würde wiederum weitläuftiger. Es iſt demnach viel natürlicher, daß man ſtatt der Sinus ihre Quadrate nimmt. Denn da die Verlängerung des Penduls dieſen Quadraten proportional iſt, ſo bekömmt man eine gerade Linie, und die Rechnung iſt auf den leichtern Fall reducirt. Es iſt klar, daß man dieſes thun könne, weil man den Anfang der Abſciſſen weiß, und jede Breiten durch ihre Sinus ausdrücken kann.

§. 46.

Aus den wirklichen Beobachtungen, ſo mir zu Geſichte gekommen, werde ich nun diejenigen herausnehmen, die theils neuer, theils von ſolchen Beobachtern gemacht ſind, von welchen man annehmen kann, daß ſie alle Umſtände

ſtände gewußt, und in Acht genommen haben.

Ort	Beobachter	Länge	Mittel	Ueberſchuß.	Breite.	Quadrat d. Sinus.
Pello	Maupertuis	441″,171	441″,171	+2,071	66°-48	0,84431
London	Graham	440,602	440,602	+1,502	51-31	0,61276
Paris	Godin mit Grahams Inſtrum.	440,466				
	aus 2 and. Obſ.	440,555				
	Picard	440,500				
	Des hayes, var.	440,555	440,540	±1,440	48-51	0,56699
	Hagen, Richer	440,600				
	Mairan aus 12 Obſervationen.	440,567				
Rome	Seur Jaquier	440,189	440,189	+1,089	41-54.	0,44600
Cap.B.ſp	La Caille	440,050	440,050	+0,950	33-55	0,31135
Kt.Goa	Godin	439,335				
		- ,421				
	Bouguer	- ,350	439,332	+0,232	18-27	0,10016
		- ,320				
	Condamine	- ,233				
Iamaica	Campbell	439,398	439,358	+0,258	18-0	0,09549
Port.bel.	Godin Boug.	439,078	439,078	÷0,022	9-33	0,02752
Panama	G. B. Condam	439,200	439,200	+0,100	8-35	0,02227
Cayenne	Richer	439,100	439,100	+0,000	4-56	0,00739
Perou	God.Bouguer, Condamine	439,100	439,100	+0,000	0-0	0,00000

§. 47.

Die letzte dieſer Beobachtungen iſt die, ſo die Academiker auf der bey Quito aufgerichteten Pyramide angezeichnet haben. Wir werden nun dieſe 11 Beobachtungen in zwo Claſſen theilen, und die 5 erſten und die 6 letzten beſonders nehmen. Der Ueberſchuß in der fünften Columne giebt die Ordinaten und die Quadrate der Sinus der Breiten geben die Abſciſ-

Absceissen. Wenden wir demnach die obigen Formeln (§. 24.) hier an, so haben wir

erste Classe.	zweyte Classe.
$N = 5.$	$n = 6$
$P = 2,78141$	$p = 0,25283.$
$Q = 7,052$	$q = 0,568.$

folglich

$$R = \frac{Q}{N} = 1,4104 \quad M = \frac{P}{N} = 0,55628$$

$$r = \frac{q}{n} = 0,0947 \quad m = \frac{p}{n} = 0,04214$$

$$R - r = 1,3157 \quad M - m = 0,51414$$

$$k = \frac{R - r}{M - m} . m = 0,108$$

$$r - k = - 0,013$$

Es muß demnach die erste Ordinate um 0,013 kleiner gemacht werden, folglich ist die Länge des Pendulы unter dem Aequator $= 439,100 - 0,013 = 439,087$ Linie. Ferner haben wir für die Absciffe $= 1$, folglich für den Unterschied der Länge des Penduls unter dem Pol und Aequator

$$\frac{R - r}{M - m} = 2,559 \text{ Linien.}$$

Demnach ist die Länge des Penduls unter dem Pol $= 439,087 + 2,559 = 441,647$ Linien. Hieraus findet sich die Länge desselben für jede Polhöhe λ, $= 439,087 + 2,559 . \sin \lambda^2$.

§. 48.

§. 48.

Vergleicht man die durch diese Formel gefundenen Längen des Penduls mit den Beobachtungen, so findet sich der gröste Unterschied bey dem Vorgebürge der guten Hoffnung, weil er $\frac{1}{6}$ Linie ist, da die übrigen nicht auf die Helfte desselben reichen. Läßt man demnach diese Beobachtung weg, so hat man

$$N = 4$$
$$P = 2,47006$$
$$Q = 6,102$$

n, p, q, wie vorhin, folglich

$$R = \frac{Q}{N} = 1,5255$$

$$M = \frac{P}{N} = 0,61751$$

$$R - r = 1,4308$$
$$M - m = 0,57537.$$

$$k = \frac{R - r}{M - m} . m = 0,105$$

$$r - k = - 0,010.$$

Welches von dem vorigen nur um 0,003 verschieden ist. Hingegen findet man die Verlängerung, des Penduls vom Aequator zum Pol

$$\frac{R - r}{M - m} = 2,487$$

und folglich um 0,072 oder $\frac{1}{14}$ Linie kleiner, als nach der vorigen Rechnung, und diß be-

 stimmt

stimmt demnach den Grad der Zuverläßigkeit. Da nun 2,500 zwischen diese beyden Schranken fällt, so können wir eine runde Zahl genommen, festsetzen, daß sich das Secunden Pendul vom Aequator bis zum Pole um $2\frac{1}{2}$ Linien verlängere, und es wird dabey höchstens ein Irrthum von $\frac{1}{76}$ Linien zu besorgen seyn, zumal, da wir die letztere Rechnung als zuverläßiger ansehen können, als die erstere (§. 4.) Es ist demnach die Länge des Penduls

unter dem Aequator $= 439,1$
unter dem Pol $= 441,6$
und in jeder Polhöhe $= 439,100 + 2,5 . \sin \lambda^2$.

§. 49.

So ferne man annehmen kann, daß der Ueberschuß der Grade der Breite ebenfalls im Verhältniß der Quadrate der Sinus der Polhöhe sind, so läßt sich die erstgebrauchte Methode gleichfalls dabey anwenden, um aus allen wirklich angestellten Ausmessungen das Mittel zu nehmen. Ungeacht wir hier so viele einzele Beobachtungen nicht haben, wie bey dem Pendul, so werden wir doch die Rechnung hersetzen. Es sind aber nach Herrn Bouguer gemachten Verbesserungen folgende

Polhö-

Polhöhe.	Grade.	Ueberschuß.	Quadr. d. Sin. dop.
0°. 0′	56753	0	0,00000
43 - 32	57048	295	0,94883
45 - 45	57045	287	1,02618
48 - 0	57071	318	1,10453
50 - 0	57084	331	1,17365
66 30	57422	669	1,68200

§. 50.

Diese Beobachtungen in zwo gleiche Classen getheilt, geben

$n = 3 \qquad N = 3$
$p = 1,97501 \qquad P = 3,96018$
$q = 582 \qquad Q = 1318$

folglich

$$m = \frac{p}{n} = 0,65834 \qquad r = \frac{q}{n} = 194$$

und weil $N = n$, so hat man

$$k = \frac{Q - q}{P - p}, m = 244$$

$$r - k = -50$$

Um so viel muß die erste Ordinate und folglich der Grad unter dem Aequator vermindert werden, demnach ist er $= 56703$. Ferner ist der Ueberschuß vom Aequator zum Pol

$$= 2 . \frac{Q - q}{P - p} = 742.$$

Demnach

Demnach der Grad unter dem Pol = 57445, und überhaupt der Grad in jeder Breite = $56703 + 742 . \sin \lambda^2$.

§. 51.

Ungeacht diese Formel zwischen den Observationen das Mittel hält, so geht sie von denselben sehr merklich ab. Sie giebt den Grad bey dem Polarcircul fast um 100 Toisen, den unter dem Aequator um 50 Toisen kleiner, und die in Frankreich bey 50 Toisen grösser als die Ausmessungen. Den bey dem Vorgebürge der guten Hofnung gemessenen Grad, den wir hier in der Rechnung nicht mit genommen, giebt die Formel um 100 Toisen kleiner. Man hat bereits gezweifelt, ob so große Abweichungen von einer einfachen und durch die Theorie bestimmten Regel der Ausmessungen oder einer wirklichen Ungleichheit der Figur der Erde zuzuschreiben sey? Nach der Theorie wäre die Erdaxe zum Diameter des Aequators in Verhältniß der Cubicwurzeln der Grade unter dem Aequator und Pole, folglich nach dieser Rechnung wie $\sqrt[3]{56703}$ zu $\sqrt[3]{57445} = 230 : 231$, und also genau, wie Newton sie angegeben. Hingegen sollte eben diese Verhältniß umgekehrt wie die Länge der Pendul seyn, und dieses wäre nach dem vorhin gefundenen Mittel aus den Beobachtungen wie 439, 1 zu 441, 6 = 176 : 177. Welche Verhältniß von der so

so aus der Länge der Grade erfolgt gar zu sehr verschieden ist, und anzuzeigen scheint, als wenn die Erde innwendig merklich dichter wäre, als bey der Oberfläche.

§. 52.

Wir wollen noch ein Beyspiel von der hier gebrauchten Reduction anbringen. Man hat auf verschiedenen Bergen in Languedoc, Auvergne und Provence, deren Höhe über der Meeresfläche gemessen worden, die Höhe des Barometers beobachtet. Wenn der Zustand der Luft durch die Wärme und Dünste nicht verändert würde, so würden die Logarithmen der Barometerhöhe den Höhen der Berge proportional seyn. Wir wollen dessen unerachtet diese Regel annehmen, und die Verhältniß so bestimmen, daß sie zwischen den Beobachtungen das Mittel hält, wie es unsere Methode angiebt. Die Vergleichung dieses Mittels mit den Beobachtungen wird sodann zeigen, wie ferne man diese einfache Regel beybehalten kann. Folgende Tabelle stellt die Höhen der Berge über das Meer in Toisen, die Höhe des Barometers in Linien, und ihre Logarithmen nebst deren Unterschiede vor.

Ort

Ort	Höhe	Barom.	Logarithm.	Unterschied
Meersfläche	0	336,0	2,5263	0,0000
Clairet	277	314,5	2,4976	0,0287
Rodez	362	308,0	2,4885	0,0378
Massanne	408	304,7	2,4829	0,0434
Rupeyroux	446	301,5	2,4793	0,0470
Bugarac	628	289,5	2,4616	0,0647
Puy de Dome	789	278,5	2,4448	0,0815
La Coste	807	278,0	2,4440	0,0823
La Courlande	801	278,0	2,4440	0,0823
Mont d'or	1001	264,5	2,4224	0,1039
St. Bartelemy	1225	252,5	2,4023	0,1240
Mousset	1228	2[illegible]0,7	2,3992	0,1271
Canigou	1424	240,5	2,3811	0,1452

§. 53.

Da nun die Unterschiede der Logarithmen den Höhen der Berge sollen proportional seyn, so werden wir erstere durch die Abscissen, letztere durch die Ordinaten vorstellen, und diese 13 Beobachtungen zu 7 und 6 in zwo Classen theilen. Demnach ist

$n = 7 \qquad N = 6$
$p = 0{,}3031 \qquad P = 0{,}6648.$
$q = 2910 \qquad Q = 6486.$

folglich

$m = p : n = 0{,}0433 \qquad M = P : N = 0{,}1108$
$r = q : n = 415{,}7 \qquad R = Q : N = 1081{,}0$
$R - r = 665{,}3$
$M - m = 0{,}0675$

k =

$$k = \frac{R - r}{M - m} . m = 426{,}7$$

$$r = 415{,}7$$
$$r - k = -11$$

Demnach muß die erste Ordinate, so wir $= 0$ gesetzt haben, um 11 Toisen vermindert werden, und hieraus würde folgen daß nicht an der Meeresfläche, sondern 11 Toisen tiefer die mittlere Barometerhöhe $= 336$ Linien oder 28 Zoll wäre. Wir haben ferner für die Abscisse $= 1$.

$$\frac{R - r}{M - m} = 9856.$$

Es ist aber in dieser Rechnung die Abscisse $= 1$ der Logarithmus von 10, und folglich der Unterschied der Logarithmen zwoer in Linien ausgedruckten Barometerhöhen, deren eine 10mal so groß ist als die andere. Da wir hiebey die Briggischen Logarithmen gebrauchen, so sey nun die mittlere Barometerhöhe an einem jeden fürgegebenen Orte $= z$, so wird seine Höhe über das Meer durch die Formel

$$9856 . \log \frac{336}{z} - 11$$

Toisen gefunden, wenn man z in Linien ausdrückt. Nach dieser Regel findet sich

Ort

Ort	gemessen	berechnet	Unterschied
Clairet	277	272	+ 5
Rodez	363	362	+ 1
Massanne	408	417	— 9
Rupegroux	446	452	— 6
Bugarac	628	627	+ 1
Puy de Dome	789	792	— 3
La Coste	807	800	+ 7
La Courl.	801	800	+ 1
m. d'or	1001	1013	—12
Bartelemy	1225	1211	+14
Mousset	1228	1242	—14
Canigou	1424	1420	+ 4

Die Unterschiede betragen nirgends eine Linie Barometerhöhe, die 2 grösten sind 14 Toisen, um welchen St. Barthelemy nach der Ausmessung grösser, der Mousset aber kleiner ist. Es sind aber die Ausmessungen selbsten nicht viel zuverläßiger. Da die Subtangente der Tabellarlogarithmen $= 0,4342945$ ist, so wird sie für die Luft gefunden, wenn man diese Zahl mit 9856 multiplicirt. Das Product ist 4281 Toisen, und dieses wäre demnach die Höhe der Luft, wenn sie gleich dichte, wie bey der Meeresfläche wäre. Da endlich die Barometerhöhe von 28 Zollen um 11 Toisen tiefer als die Meeresfläche ist, welches nach obiger Formel genau eine Linie beträgt, so muß bey dem Gebrauch dieser Formel die mittlere Höhe am

am Meere 27″ 11‴ oder 335 Linien genommen werden, und die Höhe eines jeden Ortes wird schlechthin

$$= 9856.\log\frac{335}{z}$$

oder

$$= \left(1 - \tfrac{1}{69}\right).\ 10000.\log\frac{335}{z}$$

seyn. Man sieht aus allen diesen, daß Mariottens Regel von der Erfahrung lange nicht so viel abweicht, als man sie beschuldigt hatte, und daß er nur in ihrer Anwendung fehlte, weil er für die erste Linie Fall des ☿ 63 Schuhe annahm, welches fast um $\frac{1}{21}$ zu klein ist.

§. 53.

In diesem letzten Beyspiele haben wir die Ordinaten ganz, und den Unterschied zwischen den Abscissen gehabt, und dadurch ließe sich die Berechnung auf die oben gegebene Formeln (§. 24.) bringen, und merklich in die Kürze ziehen. Wir werden nun den Fall betrachten, wo weder die Ordinaten noch die Abscissen selbst, sondern nur ihre Unterschiede durch die Beobachtungen oder Versuche bestimmt werden, dabey aber dennoch die Verhältniß zwischen den Ordinaten und Abscissen durch die Theorie bekannt ist. Die Rechnung für diese Fälle wird ungleich weitläuftiger, weil sie nicht mehr, wie die vorhergehenden mit bloßen Zahlen vorgenommen werden kann. Wir wollen die allgemeine Regel, nach welcher man in allen diesen Fällen zu verfahren hat, folgender maaßen erklären.

§. 54.

Man nehme aus der Linie AF die Absciſsen von der ersten Beobachtung A an gerechnet. Die beobachteten Ordinaten seyn A, Bb, Cc, Dd, Ee, Ff, deren Endpuncte auf der krummen Linie MKH liegen sollten, wenn die Beobachtungen alle eine geometrische Schärfe hätten. Da dieses aber nicht ist, so ist die Frage die Linie MKH zwischen den Puncten A, b, c, d, e, f &c. so durchzuziehen, daß sie zwischen allen Observationen das wahre Mittel halte. Der Anfang derselben sey M, und die Gleichung für dieselbe drücke die Verhältniß zwischen den Absciſsen MP und den Ordinaten HP aus, so daß MP mit KF parallel sey.

Fig. 2.

§. 55.

Hier ist für sich klar, daß man die beobachteten Absciſsen und Ordinaten in solche verwandeln müsse, welche die Gleichung für die krumme Linie erfordert. Daher muß man zu jenen die noch unbekannte Linie MN, zu diesen aber AN addiren. Diese zwey unbekante Stücke, welche noch nebst den Coefficienten so

so die Gleichung hat, müssen bestimmt werden, geben zusammen genommen an, wie viel Puncte A, b, c &c. man annehmen müsse, um eben so viele einzele Gleichungen zu bekommen, als Stücke zu bestimmen sind. Diese Anzahl von Puncten ist nothwendig, und läßt keine Auswahl, weil die Aufgabe unaufgelößt bleibt, so bald auch nur ein Stück noch mangelt. Wir setzen aber hier voraus, daß man deren vielmal mehr habe, weil sich der Grad der Zuverläßigkeit des Mittels, so wir aus allen zu suchen haben, mit dieser Anzahl vergrösſert. Je mehr demnach solcher beobachteten Puncte sind, desto näher kommen wir zum wahren (§. 3.) welches eigentlich zu suchen wäre.

§. 56.

Durch die erstgedachte Verwandlung der Absciſsen und Ordinaten ist nun jede die Summe eines bekannten und unbekannten Stückes, z. E. die Absciſse AF verwandelt sich in $MP = MN + NP = MN + AF$, und die Ordinate Ff wird in $PF = Ff + PF = Ff + AN$ verwandelt. Nun läßt sich vermittelst der Gleichung für jede Absciſse MP die dazu gehörige Ordinate PF finden, und mit der angenommenen $Ff + NA$ vergleichen. Man suche auf diese Art alle Ordinaten, so ist klar, daß weil wir mehr Puncte A, b, c, d &c. angenommen haben, als nöthig wären, wenn

wenn alle eine geometrische Schärfe hätten, wir auch eine grössere Anzahl von Gleichungen bekommen werden, und demnach willkührliche Bestimmungen damit vorgenommen werden können. Um demnach dieses willkührliche zu unserer Absicht zu gebrauchen, so merke man sich die nothwendige Anzahl von Gleichungen an, und theile den sämtlichen Vorrath derselben in eben so viele Classen. Für jede Classe addire man die aus der Gleichung und aus den Beobachtungen gefundenen Ordinaten besonders zusammen, so werden die Summen diejenigen Gleichungen geben, durch deren Auflösung die Linien MN, NA, und die Coefficienten der Gleichung so bestimmt werden, daß sie aus allen Beobachtungen das wahre Mittel geben.

§. 57.

Wenn in diesen Gleichungen die zwo gesuchten Linien MN, NA höhere Dignitäten bekommen, so wird die Rechnung merklich weitläuftig. In diesen Fällen ist es kürzer, wenn man sich der Näherung bedient, welches folgendermaaßen geschehen kann. Man lasse anfangs nur die nothwendige Zahl der Gleichungen, und wähle dazu diejenigen Puncte A, b, c &c. aus, welche an sich schon die Rechnung abkürzen können. Man bestimme dadurch die Linien MN, AN, und die Coefficienten der Gleichung, wenn letzteres zugleich seyn

seyn muß. Diese Bestimmungen würden richtig seyn, wenn man sich auf die Richtigkeit der angenommenen Puncte A, b, c &c. verlassen könnte. Da aber dieses ungewiß bleibt, so hat man durch diese erste Rechnung doch so viel gewonnen, daß man die Linie AF der Linie MP näher rücken kann, und die Theile MN, NA, dadurch so klein werden, daß ihre höhern Dignitäten wegbleiben können. Eben dieses ist auch von den Coefficienten zu merken, wenn man sie durch diese erste Rechnung bey nahe bestimmt.

§. 58.

Wir wollen diese letztere Methode, wobey nemlich die Näherung gebraucht wird, durch ein Beyspiel erläutern. Es ist die Frage die Geschwindigkeit der Erkältung eines mit Weingeist gefüllten Thermometers in freyer Luft zu finden, dessen Kugel einen Diameter von gegebener Größe hat. In dem hierüber angestellten Versuche war der Diameter $14\frac{1}{2}$ Linie Parisermaaß, das Thermometer nach Reaumurs Art getheilt. Bey Anfang der Erkältung stund es bey dem 24 Grad über dem Frierpunct und die Luft, in welcher es erkältete, hatte eine Temperatur von ungefehr 9 Graden. Jede Minute wurde aufgezeichnet, wie viel es gefallen war, und der Versuch 20 Minuten fortgesetzt. Das Thermometer war oben offen, damit

 nicht

nicht die eingeschlossene Luft die Einförmigkeit der Erkältung hinderte, und aus gleichem Grunde war die Kugel desselben ganz frey in der Luft, in welcher es erkälten sollte. Der Versuch ist in dem 2ten Bande der Actorum Helveticorum beschrieben, und den Erfolg stellt folgende Tabelle vor:

Zeit	Grade	Zeit	Grade	Zeit	Grade
0	0,00	7	4,40	14	7,60
1	0,80	8	4,90	15	8,00
2	1,50	9	5,40	16	8,30
3	2,15	10	5,90	17	8,60
4	2,80	11	6,35	18	8,90
5	3,40	12	6,80	19	9,20
6	3,90	13	7,20	20	9,50

§. 59.

Nun giebt Theorie und Erfahrung, daß die Erkältung nach den Ordinaten einer logarithmischen Linie geschehe. Es sey nemlich der anfängliche Grad der Wärme A, der ganze Raum der Erkältung AB, man ziehe CB auf BA senkrecht, so ist BC die Asymtote der Logarithmischen Linie AME, nach welcher die Erkältung fortgeht, und nach jeder Zeit BP sind die verlohrne Grade der Wärme QM, und die so noch weggehen sollen MP. Die Tabelle giebt nur die Ordinaten QM an, und AB soll erst noch gefunden werden.

Fig. 3.

Um dieses auf die kürzeste Art zu finden, so nehmen wir aus der Tabelle 3 gleich entfernte Abscissen P, B, C an, denn so wird AB : PM = PM : CE seyn. Nun sey

$B = 0'$ $A = 0{,}00$ $AB = x$
$BP = 10$ $QM = 5{,}90$ $PM = x - 5{,}90.$
$BC = 20$ $DE = 9{,}50$ $CE = x - 9{,}50.$

so hat man

$$x : (x - 5{,}90) = (x - 5{,}90) : (x - 9{,}50)$$

folglich $x = 15{,}12.$

und diese Bestimmung würde vollkommen richtig seyn, wenn die drey angenommene Puncte A, M, E nach geometrischer Schärfe zuverläßig wären. Da aber dieses ungewiß bleibt, so wollen wir

$$AB = x = 15{,}12 + z$$

setzen, und es ist klar, daß z höchstens einige Decimaltheile eines Grades vorstellen wird. Werden nun alle Ordinaten der vorigen Tabelle von 15, 12 + z abgezogen, so haben wir die Ordinaten zwischen der Asymtote BC, welche zur Rechnung tauglicher sind.

Zeit	Ordinate	Zeit	Ordinate	Zeit	Ordinate
0	15,12 + z	7	10,72 + z	14	7,52 + z
1	14,32 + z	8	10,22 + z	15	7,12 + z
2	13,62 + z	9	9,72 + z	16	6,82 + z
3	12,97 + z	10	9,22 + z	17	6,52 + z
4	12,32 + z	11	8,77 + z	18	6,32 + z
5	11,72 + z	12	8,32 + z	19	6,02 + z
6	11,22 + z	13	7,92 + z	20	5,72 + z

§. 60.

§. 60.

Da nun die Differenz der Logarithmen von jeden zwoen Ordinaten der Differenz der Zeit soll proportional seyn, so werden wir die Logarithmen derselben von dem Logarithmo der ersten abziehen. Es ist aber überhaupt, wenn man die hyperbolischen Logarithmen nimmt,

$$\log(a+z) = \log a + \frac{z}{a} - \frac{zz}{2aa} + \frac{z^3}{3a^3} - \&c.$$

Oder wenn man $m = 0,4342945$ setzt, so hat man die Briggischen Logarithmen

$$\log(a+z) = \log a + m\left(\frac{z}{a} - \frac{zz}{2aa} + \&c.\right)$$

wofür man, weil z sehr klein ist, setzen kann

$$\log(a+z) = \log a + \frac{mz}{a}$$

Hieraus, wenn man für a jede Zahlen der letzten Tabelle setzt, finden sich folgende Lorithmen, und ihre Unterschiede von dem ersten

Zeit	Logarithmen	Unterschiede
0	1,1795 + 0,0287.z	0,0000 — 0,0000.z
1	1,1559 + 0,0303.z	0,0236 — 0,0016.z
2	1,1342 + 0,0319.z	0,0453 — 0,0032.z
3	1,1129 + 0,0335.z	0,0666 — 0,0048.z
4	1,0906 + 0,0352.z	0,0889 — 0,0065.z
5	1,0689 + 0,0370.z	0,1106 — 0,0083.z
6	1,0499 + 0,0387.z	0,1296 — 0,0100.z

Zeit

Zeit	Logrrithmen	Unterschiede
7	1,0302 + 0,0405.z	0,1493 — 0,0118.z
8	1,0094 + 0,0424.z	0,1701 — 0,0137.z
9	0,9877 + 0,0447.z	0,1918 — 0,0160.z
10	0,9647 + 0,0471.z	0,2148 — 0,0184.z
11	0,9430 + 0,0495.z	0,2365 — 0,0208.z
12	0,9209 + 0,0522.z	0,2586 — 0,0235.z
13	0,8987 + 0,0548.z	0,2808 — 0,0261.z
14	0,8762 + 0,0577.z	0,3033 — 0,0290.z
15	0,8525 + 0,0610.z	0,3270 — 0,0323.z
16	0,8338 + 0,0637.z	0,3457 — 0,0350.z
17	0,8142 + 0,0666.z	0,3653 — 0,0379.z
18	0,8007 + 0,0687.z	0,3788 — 0,0400.z
19	0,7796 + 0,0721.z	0,3999 — 0,0434.z
20	0,7574 + 0,0759.z	0,4221 — 0,0472.z

§. 61.

Werden nun die Zeiten und Unterschiede in drey Classen getheilt, und jede Classe besonders addirt, so haben wir

Zahl der Observ.	Sum. der Zeiten	Summe der Untersch.
7 =	= 21 =	= 0,4646 — 0,0344.z.
6 =	= 70 =	= 1,5019 — 0,1303.z.
7 =	119 =	= 2,5421 — 0,2648.z.

Um demnach aus diesen Summen das Mittel zu haben, so muß jede durch die Anzahl der Beobachtungen getheilt werden, so haben wir

Zeit

Zeit	Unterschiede
3′	$0{,}0664 - 0{,}0049.z$
$11\frac{2}{3}$	$0{,}2503 - 0{,}0217.z$
17	$0{,}3631 - 0{,}0378.z$

Hieraus wird sich nun z finden. Denn werden diese Zahlen von einander abgezogen, so müssen die Ueberreste der Zeiten denen von den Unterschieden proportional seyn. Demnach haben wir

$$8\frac{2}{3} : 5\frac{1}{3} = (0{,}1839 - 0{,}0168.z) : (0{,}1128 - 0{,}0161.z)$$

folglich

$$-z = 0{,}06.$$

Um so viel muß demnach die erste Ordinate AB, welche wir = 15, 12 gefunden, vermindert werden. Sie ist demnach 15, 06 Gr. und so viel ist das Thermometer in allen erkältet, oder welches einerley ist, es war Anfangs des Versuches 15, 06 Grad wärmer als die Luft, in welcher es erkältete. Um nun die Geschwindigkeit der Erkältung zu finden, so merken wir an, daß die Subtangente der Logarithmischen Linie AE, nach welcher das Thermometer seine Wärme verlohr, das Maaß derselben ist, indem sich die Geschwindigkeit der Erkältung umgekehrt, wie diese Subtangente verhält. Nun ist die Subtangente der Tabellarlogarithmen = 0, 4343. Die letzte Analogie giebt uns die Verhältniß $(0{,}1839 - 0{,}0168.z) : 8\frac{2}{3}$ Minuten, oder, wenn man den Werth von z setzt, $0{,}1849 : 8\frac{2}{3}$, nach welcher man für 0, 4343 die Zeit von 20 Minuten 21 Secunden für die gesuchte Subtangente findet. In den Actis helveticis woraus dieser Versuch genommen ist, haben wir nach der ersten Rechnung 20 Minuten $12\frac{1}{2}$ Secunden. Der Unterschied, wie auch der von z ist demnach sehr geringe.

§. 62.

Dieses Beyspiel ist das einige, wozu ich wirkliche angestellte Versuche gefunden habe, ungeacht es eine große Menge giebt, bey welchen sich die (§. 53. u. f.) angegebene Methode das Mittel zu nehmen, anbringen läßt. Ueberhaupt haben wir bey allen bißher betrachteten Fällen angenommen, daß die Gleichung für die Linie MKN durch die Theorie bekant sey. Fig. 2. Es gibt aber unzählige Fälle, wobey man noch keine solche Gleichung hat, und wo folglich diese Linie gleichsam von freyer Hand dergestallt muß gezogen werden, daß sie, so bald die Lage der Puncte A, a, b, c, d, e, f &c. offenbar etwas unordentlich ist, und sich nach keiner Regel richtet, zwischen denselben durchgehe, und die einförmigste Krümmung behalte. Die hiebey vorkommenden Regeln und Vorsichtigkeiten habe ich in der Photometrie (§. 396. seqq. 478.) angegeben, wo ich sie in zweyen Fällen gebrauchen mußte. Ich werde sie daher nicht wiederholen,

holen, sondern statt dessen andere Betrachtungen anbringen.

§. 63.

Das merkwürdigste Beyspiel, so sich hier darbeut, ist die Aenderung in der Abweichung der Magnetnadel. Es ist damit, wie mit allen Erscheinungen ergangen. Man nahm die jährliche Veränderung als gleichförmig an, und suchte ihre Größe zu bestimmen und zu finden, nach wie vielen Jahren sie im Circul herum kommen würde. Der Herr von Muschenbroek setzt diese Periode auf 1542 Jahre, wiewohl er sie für sehr unzuverläßig ansieht, weil er bey andern andere Bestimmungen findet. Man kann hierüber seine Abhandlung vom Magneten nachlesen. Solche Perioden wurden aus Vergleichung zweyer Jahre geschlossen, ungeacht man eine ganze Reyhe von Beobachtungen hatte, die man hätte dazu anwenden können. Allein eine Figur thut dabey ungleich bessere Dienste, als eine Tabelle. Wir haben demnach die zu Paris von 1550 bis 1760 gemachten Beobachtungen zusammen genommen, und die Numern, so viel man finden konnte von 5 zu 5 Jahren, die ältesten aber sämtlich in der 4ten Figur vorgestellt. Die gerade Linie AB stellt die Jahre vor, C fällt auf das Jahr 1666 wo die Abweichung zu Paris = 0 war. Die Linie GCH enthält den Maaßstab zu den

den Graden der Abweichung, welche die Ordinaten für jede angezeichnete Jahre vorstellen. Zwischen AC gehen diese unterwerts, weil die Abweichung gegen Osten war, zwischen CB aber aufwerts, weil die Abweichungen anfiengen westlich zu werden. Wenn nun die Abänderungen in der Abweichung nach einem einförmigen Gesetze erfolgten, so ist klar, daß die Endpuncte der Ordinaten sämtlich in einer sehr einförmigen krummen Linie liegen sollten. Man weiß aber, daß sich diese Abweichung täglich, ja fast stündlich ändert, und grösser und kleiner wird. Bey den Beobachtungen ist darauf nicht so genau Achtung gegeben worden. Daher hat man sich auch nicht zu verwundern, wenn die Linie DECF, welche wir so einfach als ohne vorsetzlichen Fehler möglich war, gezogen haben, eben nicht genau durch jede Endpuncten der Ordinaten, sondern zwischen einigen durchgeht. Am meisten bleibt die Ordinate des 1640 Jahres zurücke. Ich glaubte besser zu thun, diese Beobachtung für ungewiß anzusehen, als daß ich derselben zu gefallen der Linie EC daselbst eine anomalistische Wendung hätte geben sollen, um so mehr, da die um diese Zeit zu Londen gemachten Beobachtungen, welche immer um ein Grad oder mehr westlicher waren, und eine mit der Linie EC parallele krumme Linie geben, die Parisische Beobachtung von 1640 ebenfalls zweifelhaft machen.

§. 64.

§. 64.

Die Linie DECF zeigt demnach auf einen Anblick die mittlere Veränderung der Magnetnadel zu Paris in einem Zeitraum von 210 Jahren an. Sie hat in E ein Maximum, und bey C einen Wendpunct, und scheint sich nunmehr dem zweyten Maximo zu nähern, weil ihre Richtung bey F der parallelen Lage mit AB näher kömmt, als sie es in C war. Es ist demnach vermuthlich, daß die Magnetnadel sich nun bald wiederum werde gegen Osten zurück wenden, und in ihrer Abweichung anfangen abzunehmen. Ihre Bewegung würde daher im geringsten nicht einförmig seyn, oder im Circul herum kommen, sondern einer Art von Schwenkung gleichen, deren Periode, wenn ja etwas periodisches dabey ist, von etwan 200 Jahren wäre.

§. 66.

Wir haben angegeben, daß man in denen Fällen, wo die Gleichung für die Linie MKH nicht bekannt ist, dieselbe von freyer Hand ziehen soll, damit sie zwischen den nicht genau bestimmten Puncten A, b, c &c. mitten durchgehe, und so viel möglich ist, einförmig bleibe. Es fehlt zwar an Methoden nicht, krumme Linien durch jede beliebige Anzahl Puncte von gegebener Lage zu ziehen. Newton hat dergleichen angegeben, wo es die Frage ist, zu den Abscissen, welche zwischen die gegebenen fallen, die Ordinaten zu finden. Diese Methoden thun unstreitig gute Dienste, wenn die Puncte A, b, c, d &c. genau gegeben sind. Man kann eine Gleichung annehmen, welche so viele Glieder und Coefficienten hat, als Puncte gegeben sind, und dadurch alle Coefficienten bestimmen. Allein, so bald man durch die Construction findet, daß die Puncte A, b, c, d &c. eben nicht so genau bestimmt sind, so ist unstreitig, daß eine solche Linie alle kleine Abweichungen der Versuche an sich nehmen, und folglich eben so unzuverläßig seyn würde. Es ist daher ungleich besser, wenn man eine Gleichung von wenigern Gliedern und Coefficienten annimmt, und damit eben so verfährt, wie wir oben (§. 54. seqq.) gewiesen haben. Auf diese Art wird die dadurch gefundene krumme Linie nicht nur an sich einfacher seyn, sondern auch dem wahren Mittel aus allen Versuchen näher kommen.

Fig. 2.

§. 67

Um noch ein Beyspiel anzubringen, wobey die krumme Linie von freyer Hand muß gezogen werden, so werde ich die Sterbregister von London vornehmen. Es sind daselbst in 6 Jahren von 1753 bis 1758 gestorben:

Unter

	Unter	2	Jahr alt		44342.
Von	2	biß 5	Jahr	=	11487.
Von	5	biß 10	Jahr	=	3940.
Von	10	biß 20	Jahr	=	3498.
Von	20	biß 30	Jahr	=	9254.
Von	30	biß 40	Jahr	=	11566.
Von	40	biß 50	Jahr	=	11769.
Von	50	biß 60	Jahr	=	10296.
Von	60	biß 70	Jahr	=	8299.
Von	70	biß 80	Jahr	=	5986.
Von	80	biß 90	Jahr	=	2777.
Von	90	biß 100	Jahr	=	413.
	Ueber	100	Jahr	=	16.

Setzt man nun, daß Londen im Beharrungsstand bleibe, und folglich die Anzahl der Menschen von jedem Alter daselbst weder zu noch abnehme, so lassen sich aus dieser Tabelle ohne Mühe vielerley Schlüsse ziehen. Denn sollen z. E. jährlich daselbst 16 Personen sterben können, die über hundert Jahr alt sind, so müssen daselbst jährlich 16 Personen 100 Jahre alt werden. Sollen 16 + 413 Personen sterben, die über 90 Jahr alt sind, so müssen jährlich 16 + 413 = 429 Personen 90 Jahr alt werden. Auf gleiche Art müssen 16 + 413 + 2777 Personen jährlich 80 Jahr alt werden 2c. Man sieht hieraus, daß man die Zahlen dieser Liste rückwerts der Ordnung nach addirt, man findet, wie viele Personen in Zeit von 6 Jahren, 2, 5, 10, 15

15, 20 2c. Jahre alt werden. Und diß giebt demnach folgende Tabelle:

Jahre		Personen			
0	=	123643	reducirt		100000.
2	=	79301	=	=	64136.
5	=	67814	=	=	54846.
10	=	63874	=	=	51659.
20	=	60376	=	=	48831.
30	=	51122	=	=	41246
40	=	39556	=	=	31992.
50	=	27787	=	=	22474.
60	=	17491	=	=	14146.
70	=	9192	=	=	7435.
80	=	3206	=	=	2593.
90	=	429	=	=	347.
100	=	16	=	=	13.

In dieser Tabelle enthält demnach die erste Columne das complete Alter, die zweyte Columne die Anzahl der in solchem Alter lebenden Personen. Die dritte enthält eben diese Anzahl dergestallt reducirt, daß dabey gerade hin 100000 von 0 Jahr, das will sagen neugebohren angenommen sind.

§. 68.

Hiebey ist nun die Frage: 1.° zu sehen, ob sich in diesen Zahlen keine merkliche Irregularität befinde, die etwan von besondern Zufällen herrührt. 2.° Die Anzahl der Personen Fig. V.

Hh

sonen von jedem Alter zu bestimmen, welches zwischen die hier gegebene Anzahl fällt? Zu diesem Ende theile man die Abscissenlinie AB = 100 Theile als so viele Jahre ein, und richte aus den Jahren 0, 2, 5, 10, 20 etc. Perpendicularen auf, denen man die Länge giebt, welche die Zahlen der dritten Columne erfordern, so soll sich durch die Endpuncte der Ordinaten eine sehr einförmige krumme Linie ziehen lassen. Ich habe dieses auf einem grossen Bogen gethan, und nicht gefunden, daß an der erstgegebenen Tabelle etwas merklich zu ändern wäre. Denn ungeacht die Linie CDEB bey D einige Erhöhung hat, so ist diese Erhöhung an sich einförmig, und man kann sie nicht ändern, ohne die Linie bey F allzumerklich zu erhöhen. Ich merke demnach nur an, daß die fünfte Figur die erstgegebene Tabelle sehr genau vorstellt. AC ist die Anzahl neugebohrner Kinder, und jede Ordinate stellt vor, wie viele davon nach einer beliebigen Anzahl von Jahren noch bey Leben sind. Sodann stellt jede Ordinate auch vor, wie viel Menschen von jedem Alter in einem fürgegebenen Augenblick leben. Wenn man demnach die Anzahl aller zu Londen lebenden Menschen durch den Flächenraum ACFDEBA vorstellt, so leben z. E. zwischen 30 und 40 Jahren so viel als der Raum angiebt, den die Ordinaten des 30 und 40ten Jahres einschliessen, und auf diese Art werden die von jedem Alter lebende bestimmt. §. 69.

§. 69.

Die Natur dieser krummen Linie ist unbekannt. So wie wir sie aber a posteriori gefunden und gezeichnet haben, zeigt es sich, daß sie bey D und E zween Wendungspuncte hat, bey C die Ordinate berührt, und bey B asymtotisch wird. Die Wendungspuncte bey D, E zeigen an, daß sich die Linie vor und nach langsamer gegen die Abscissenlinie AB neigt, und folglich bey D und E die Grade der Sterblichkeit grösser als vor und nach sind. In C, das will sagen gleich beym Eintritt ins Leben ist der Grad der Sterblichkeit am grösten und absolut, doch da er sich augenblicklich stark verringert, so macht dieses, daß von den neugebohrnen Kindern dennoch die meisten bey Leben bleiben, wiewohl in dem ersten Jahre über $\frac{1}{3}$ davon stirbt. Nach dem 5ten bis ins 20ste Jahr ändert sich die Lebenskraft sehr merklich, von dem 30 Jahr an, nimmt sie, jedoch immer langsamer ab. Man kann nicht wohl angeben, ob oder wenn sie ganz aufhört, denn man setze AC = 100000, und die Ordinate bey dem 130sten Jahre, sey nur noch $\frac{1}{1000}$, so will dieses sagen, daß von 1000mal 10000, das ist von 100 Millionen Menschen etwan einer 130 Jahr alt wird. Und da es zuweilen noch Fälle von einem 150jährigen Alter giebt, so sieht man, daß auch noch die Ordinate des 150sten Jahres einen,

einen, wiewohl fast unendlich kleinen Bruch haben müsse.

§. 70.

Ich habe über der Linie CFDEB noch eine andere punctirte gezeichnet, welche ich aus der Keerseboomschen Tabelle genommen. Diese Tabelle hat Hr. Keerseboom nicht von allen Sterbenden, sondern nur von denen genommen, welche Gelder auf Leibrenten haben. Da dieses alles ausgesuchte Leute sind, weil kränkliche Personen eben kein Geld auf Leibrenten geben, so ist für sich klar, daß alle Ordinaten grösser werden. Indessen hat diese punctirte Linie einige Irregularitäten, besonders beym 30 und 40 Jahre, welche merklicher werden, wenn man die Figur etwas grösser zeichnet, und welche Hr. Keerseboom vermieden haben würde, wenn derselbe an statt des Interpolirens diese Art zu construiren gebraucht hätte.

§. 71.

Fig. VI. Da man an die Linie CFDEB ohne Schwürigkeit Tangenten ziehen kann, so viel man will, so kann man sie dergestalt ziehen, daß die zwischen jede zwo Tangenten fallende Stücke der Linie CFDEB mit Stücken von osculirenden Parabeln verwechselt werden können, ohne daß der Fehler im geringsten merklich werde. Denn es sey AMB ein Stück einer krummen Linie, AT, BT zwo Tangenten. Man theile die Chorde AB in C in zwey gleiche Theile, und ziehe CT in den Durchschnittspunct der beyden Tangenten. Findet sich nun TM = MC, so kann das ganze Stück AMB als ein Stück einer Parabel angesehen werden, und TC wird der Axe derselben parallel seyn. Man wird eben so den Raum des Segmentes AMBA leicht finden, wenn man die Basin AB mit $\frac{2}{3}$ von der Höhe MP multiplicirt. Denn ist AMB wirklich ein Stück einer Parabel, so ist alles dieses nach aller Schärfe richtig, und wird daher genauer zutreffen, je näher die Krümmung AMB einer parabolischen kömmt. Da sodann $AT^2 : TM = At^2 : tm$ ist, so kann die Lage eines jeden Puncts t leicht gefunden werden. Ich merke dieses hier an, weil es die richtigste Art ist, bey der krummen Linie CFDEB die sämtlichen Ordinaten dergestallt zu interpoliren, daß sie auf eine ordentliche und der Krümmung der Linie CFDEB angemessene Art zu und abnehmen. Fig. V

§. 72.

Man kann aber auch einzelne Stücke dieser Linie durch eine Gleichung ausdrücken, welche sowohl die Länge der Ordinaten angiebt, als auch die erste und letzte so bestimmt, daß solche Stücke mit den vor und nachgehenden zusammengehängt werden können,

wenn

wenn man auch für dieselben solche Gleichungen sucht. Die Formel für solche Gleichungen ist folgende:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

wo y die Ordinaten, x aber die Abscissen vorstellt. Alles kömmt nun auf die Bestimmung der Coefficienten a, b, c &c. an. Wir wollen, um dieses Verfahren durch ein Beyspiel zu erläutern, dasjenige Stück der Linie
Fig. VII. nehmen, welches zwischen dem 45ten und 90 Jahr liegt. Dieses sey HGFE, so ist AD eine Abscisse von 45 Jahren, A das 45ste, D das 90ste Jahr, AH, DE die diesen Jahren entsprechende Ordinaten. Nun haben wir wenn die Abscissen x von A gegen D genommen werden, bey dem Punct A, $x = 0$, folglich wird für diesen Punct $y = a$, welches den ersten Coefficienten $a = AH = 26950$ giebt. Denn dieses ist ungefehr die Anzahl der in diesem Alter lebenden, wenn die anfängliche Zahl 100000 ist. Ferner müssen wir, damit das Stück der Linie HE mit den vorhergehenden zusammengehängt werden kann, die Lage der Tangente HT wissen. Wird die Figur im Großen construirt, so findet sich, daß diese Tangente der Abscissenlinie jedes Jahr um 985,7 näher kömmt. Dieses bestimmt nun den Coefficient b, weil derselbe eigentlich die Lage dieser Tangente ausdrückt. Demnach haben wir $b = -985,7$. Damit ferner das vorgenommene Stück der Linie

in

in E mit den folgenden zusammengehängt werden könne, müssen wir ebenfalls die Länge der Tangente in E wissen. Diese findet sich nun wiederum dergestallt, daß sie jährlich der Abscissenlinie um 64 näher kommt. Nun ist die Lage der Tangenten überhaupt

$$\frac{dy}{dx} = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \&c.$$

Setzt man demnach

$$x = AD = 45,\ b = -985,7,\ dy : dx = 64:$$

so haben wir

$$64 = -985,7 + 2.45.c + 3.45.^2 d + 4.45^3 e + 5.45.^4 f + \&c.$$

Und durch diese Gleichung kann ebenfals einer der Coefficienten c, d, e, f, &c. bestimmt werden. Nun werden alle Ordinaten y genauer gefunden, jemehr man solcher Coefficienten beybehält. Um aber dieselben zu bestimmen, müssen noch eben so viele Ordinaten angenommen werden. Wir wollen Kürze halber nur drey annehmen, und zwar die vom 60sten 70sten und 90sten Jahr, und so ist

$$x = 15 \qquad y = 14146.$$
$$x = 25 \qquad y = 7435.$$
$$x = 45 \qquad y = 347.$$

Dadurch erhalten wir drey Gleichungen, und demnach drey Coefficienten. Da nun die vorige Gleichung ebenfalls einen Coefficienten bestimmt, so werden wir die Coefficienten c, d, e, f, allein beybehalten. Demnach haben wir in allen folgende 4 Gleichungen

$$14146 = 26950 - 985,7.15 + 15^2.c + 15^3.d + 15^4.e + 15^5.f$$
$$7435 = 26950 - 985,7.25 + 25^2.c + 25^3.d + 25^4.e + 25^5.f$$
$$347 = 26950 - 985,7.45 + 45^2.e + 45^3.d + 45^4.e + 45^5.f$$
$$64 = -985,7 + 2.45.c + 3.45^2.d + 4.45^3.e + 5.45^4.f$$

Werden diese Gleichungen aufgelößt, so findet sich

c =

$c = +9,709150$
$d = -0,0342700$
$e = -0,0027017$
$f = +0,000066635$

demnach die gesuchte Gleichung

$$y = 26950 - 985,7.x + 9,709150.x^2 - 0,03427.x^3 - 0,0027017x^4 + 0,000066635.x^5$$

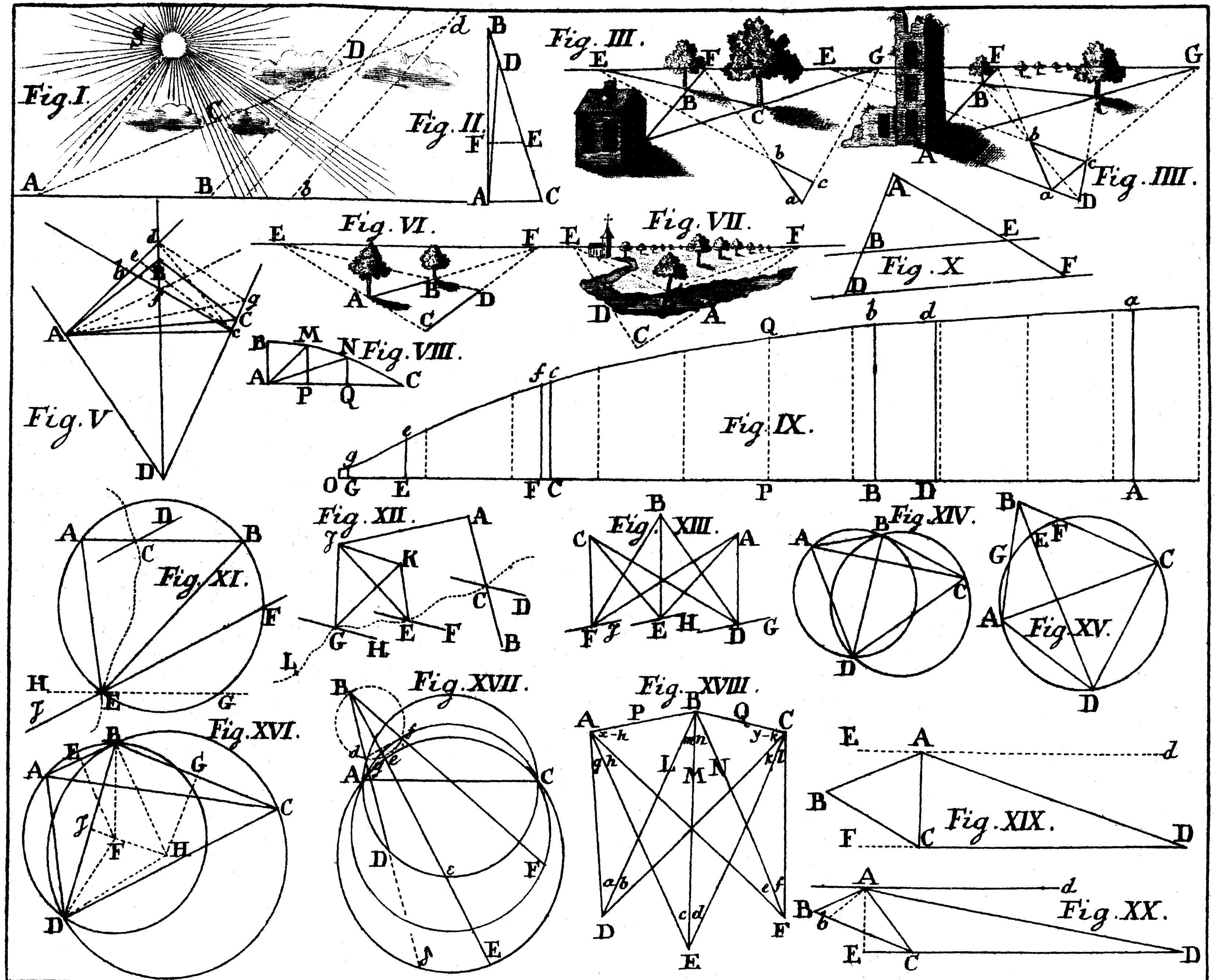
Setzt man nun z. E.

für das 55ste Jahr $x = 10$, so ist $y = 18001$.
65 " " $x = 20$ " $y = 10625$.
85 " " $x = 40$ " $y = 763$.

Und so giebt diese Gleichung die zwischen das 45 und 90ste Jahr fallende Ordinaten noch ziemlich genau, und dergestallt, daß dieses Stück der Linien mit der vorgehenden und folgenden kann zusammengehängt werden

§. 73.

Ich führe dieses Beyspiel nur zur Erläuterung der Methode an, welche in sehr vielen Fällen mit Vortheil kann gebraucht werden. Daher werde ich nur noch beyfügen, wie in einer construirten krummen Linie die Tangenten können gezogen, und bestimmt werden, wo sie die Linie berühren. Man habe an die
Fig. VIII. Linie DAC eine Tangente TA gezogen, und es soll der Berührungspunct A gefunden werden. Zu diesem Ende ziehe man mit der Tangente TA so viele parallele Chorden CD als man will, nahe beysammen, und theile jede in den Puncten E in zween gleiche Theile, so wird die durch EE gezogene Linie in den gesuchten Punct A treffen, und zwar wird sie gerade seyn, so oft DAC ein Stück einer conischen Section oder einer solchen Linie ist, deren Diameter in A fällt. In den übrigen Fällen hat sie eine solche Krümmung, daß man statt des kleinen Stückes AE den Krümmungskreys derselben gebrauchen kann, so oft nemlich A nicht der Wendungspunct der Linie DAC ist, sondern einen Krümmungskreys von einer endlichen Größe hat.



Pract. Geometr. Tab. I.

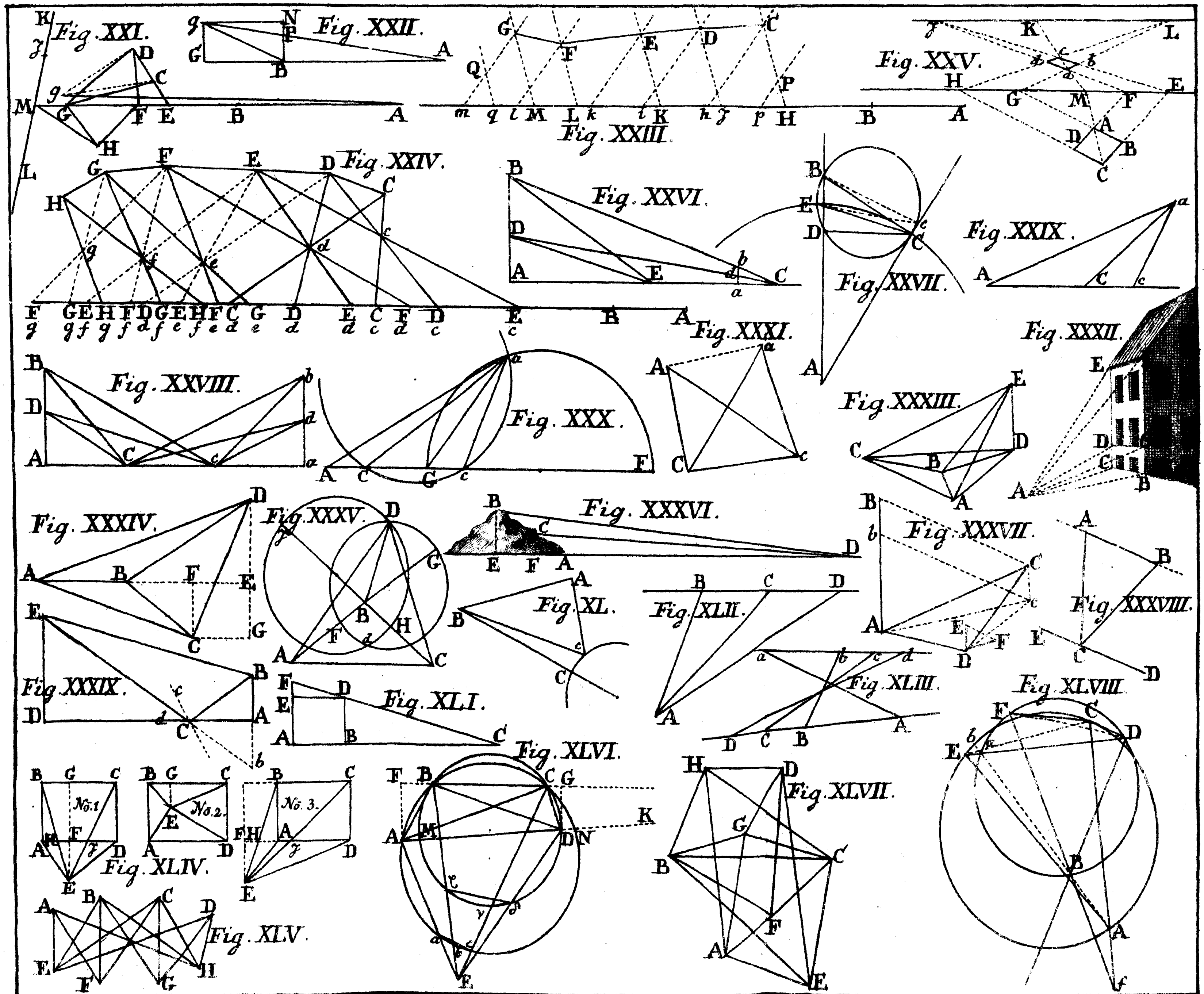
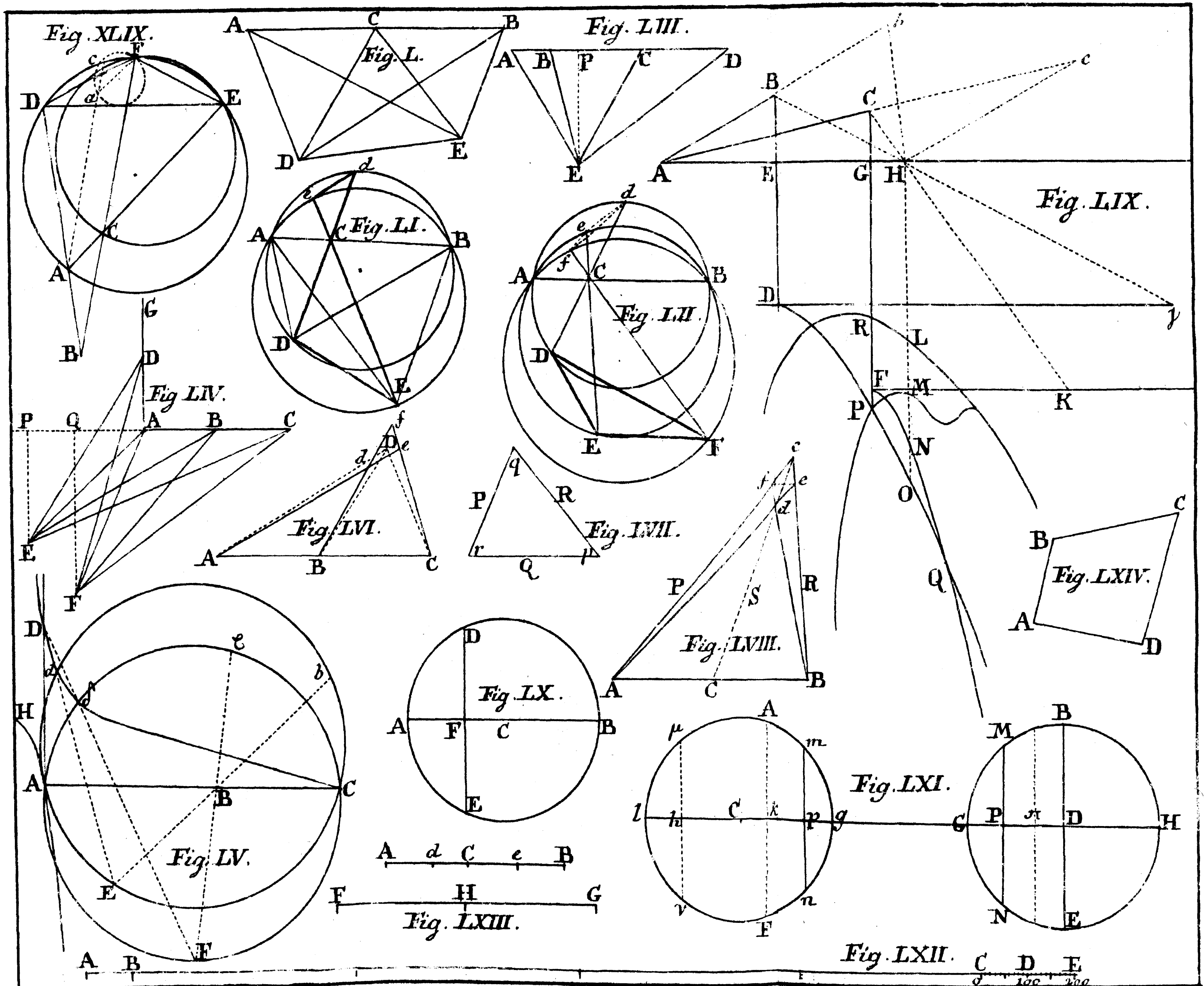
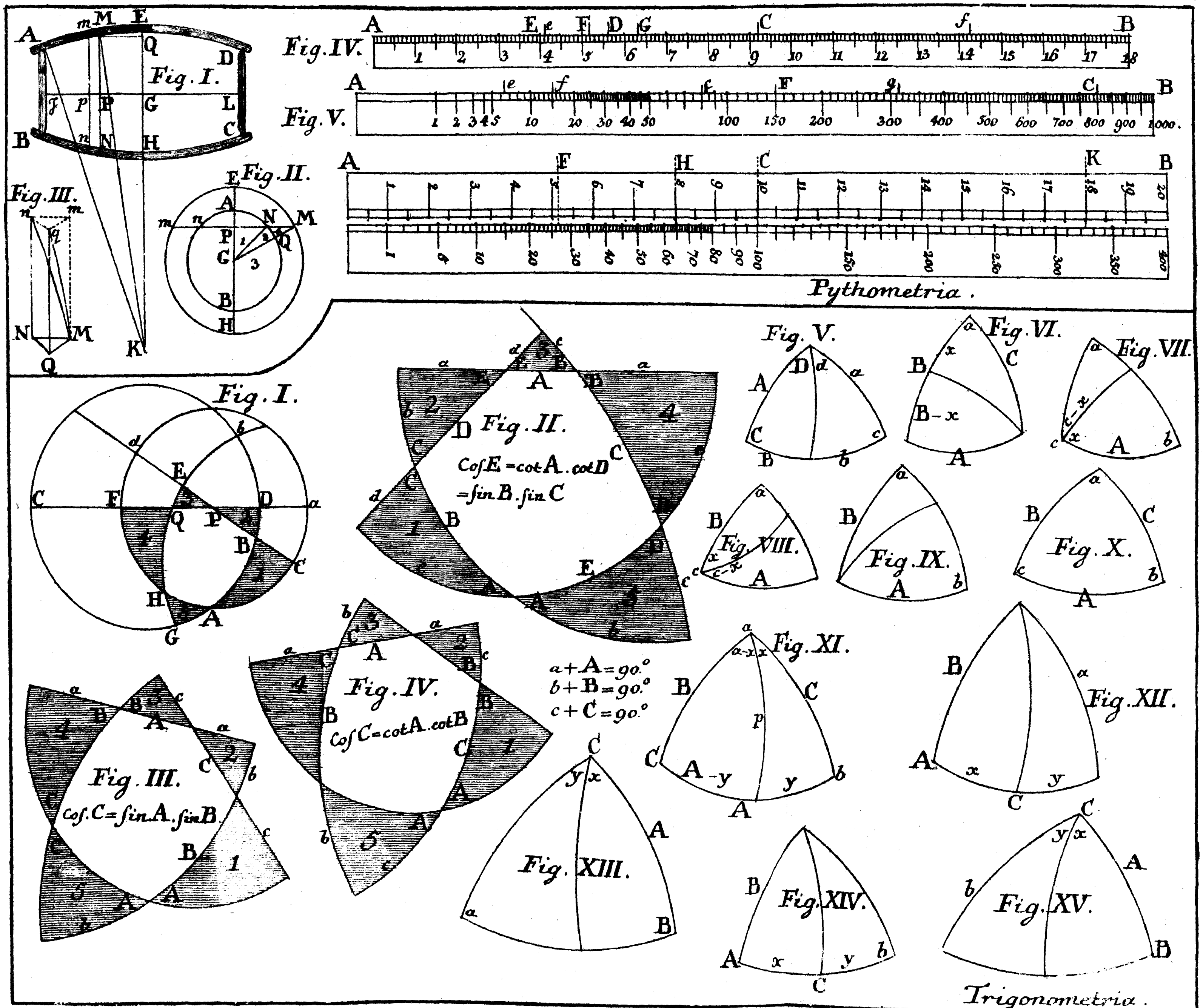


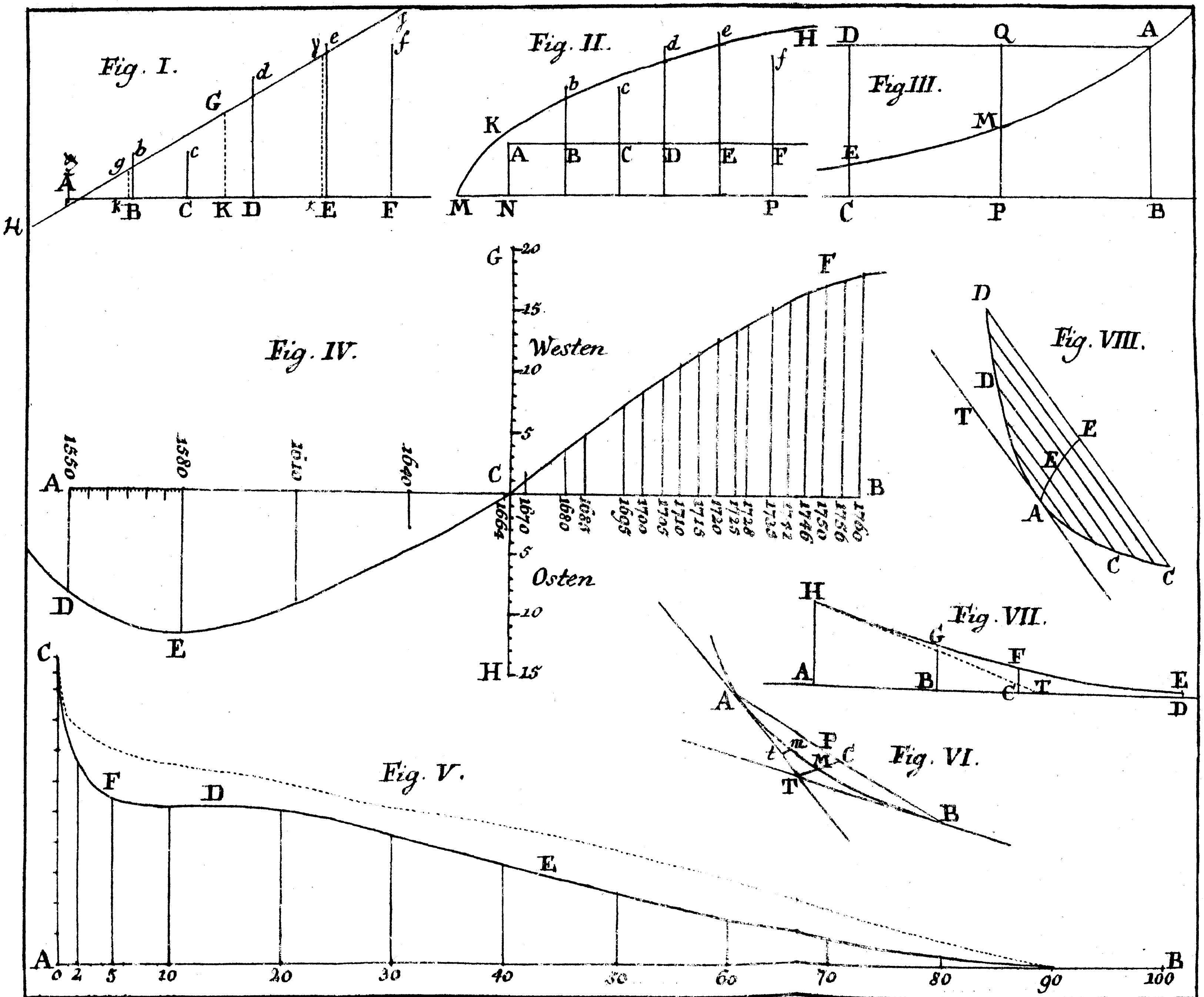
Fig. XXI.
Fig. XXII.
Fig. XXIII.
Fig. XXIV.
Fig. XXV.
Fig. XXVI.
Fig. XXVII.
Fig. XXVIII.
Fig. XXIX.
Fig. XXX.
Fig. XXXI.
Fig. XXXII.
Fig. XXXIII.
Fig. XXXIV.
Fig. XXXV.
Fig. XXXVI.
Fig. XXXVII.
Fig. XXXVIII.
Fig. XXXIX.
Fig. XL.
Fig. XLI.
Fig. XLII.
Fig. XLIII.
Fig. XLIV.
No. 1
No. 2.
No. 3.
Fig. XLV.
Fig. XLVI.
Fig. XLVII.
Fig. XLVIII.



Pract. Geom. Tab. III.



Pract. Mathem. Tab IV.



Mathes. Adplicat. Tab V.