Beyträge
zum Gebrauche
der
Mathematik
und
deren Anwendung
durch
J. H. Lambert.

Mit Kupfern und Tafeln.

Dritter Theil.

Berlin,
im Verlag der Buchhandlung der Realschule,
1772.

Vorrede.

Es hat dieser dritte Theil der Beyträge mit den beyden ersten gleiche Einrichtung und Absicht, da die darinn enthaltenen Abhandlungen auf die Erweiterung und Anwendung der Mathematik abzielen. Es sind deren neune, wovon aber die vier letzteren eigentlich 37 kleinere unter sich begreifen, und so zu sagen nur allgemeine Rubriquen davon sind. Den Inhalt von jeden kann man sogleich aus dem dieser Vorrede angehängten Verzeichniß übersehen, die nähere Anzeige der Absicht und Veranlassung macht aber meistens den Anfang einer jeden Abhandlung aus. Ich habe also hier weiter nichts darüber zu sagen, als dieses einige, daß von denen in der sechsten Abhandlung angegebenen neuen Entwerfungsarten mehrere in kurzem bey wirklichen und zu ganz besondern Absichten gewidmeten Landcharten werden gebraucht werden, da die Königl. Akademie der Wissenschaften allhier dienlich erachtet, den unter ihrer Aufsicht herausgegebenen Schulatlas dergestalt umändern zu lassen, daß die Absicht desselben sowohl in Ansehung der mathematischen und physischen als der historischen und politischen alten, mittleren und neuen Geographie vollständiger erreicht werde.

werde. Wer diesen Atlas in seiner bisherigen Gestalt gesehen, wird ohne Mühe finden, wieviel diese Umänderung auf sich hat, zumal wenn noch mehrere allzuspecielle Charten weggelassen, und einige andere ganz erneuert werden, und überdies noch eine gedruckte Anleitung zum Gebrauche desselben hinzukömmt, die in ihrer Art ebenfalls viel originales haben wird.

In Ansehung des zweyten Theils der Beyträge werde ich hier einige noch zurückgebliebene Schreib- und Druckfehler anzeigen, so die Mondstafeln betreffen. Es soll nemlich im §. 9. auf der 642 Seite, Lin. 9. 10. 11. für den Mond die Zahl von 13368 z oder ganzen Umläufen stehen; und im §. 11 bey den 10000 Monden muß 808 Jahr, 183 Tage, 21 St. 24'. 0'' gelesen werden. In den Tafeln selbst sind auch noch einige Zahlen zu åndern. Und zwar in der ersten Tafel müssen neben den Jahren + 1, 30, 59 die Zeichen ☊, ☋, ☊ in dieser Ordnung stehen. Bey dem Jahre + sollen überdies noch in der vierten Columne 26, 20, 15, 25 gelesen werden. In der zweyten Tafel neben dem Neumonde N. 57. werden 222$^{T.}$ 5$^{St.}$ 50′ 46″ zu lesen seyn. In der funfzehnten Tafel soll in der zweyten Columne neben dem 12ten Grad 1°. 2′. 21″ stehen, und in der 27sten Tafel in der Rubrique Anom. med. 0 = a gelesen werden.

Einige Druckfehler werde ich hier auch für die vor zwey Jahren herausgegebenen **Zusåtze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen** anzeigen. In der Pellschen Tafel daselbst sind noch 70 Druckfehler zurück geblieben, die mir Hr. **J. Wolfram**, Artillerie

tillerie Lieutenant in hollåndischen Diensten, ganz neulich zugeschickt hat. Derselbe meldete mir, daß er zu seinem eigenen Gebrauche aufgesetzt habe: **Vollståndige Zergliederung der ersten 300000 Zahlen in einem kurzen Begriffe: oder eine Tafel, in welcher von allen Zahlen unter 300000 der kleinste Factor, wenn er grőßer als 5 ist, zu finden ist. Auf 25 Seiten in Folio.** Diese Tafel gehőrt mit zu einer andern, welche aus den Logarithmen der 1229 ersten Primzahlen besteht, die Hr. Wolfram selbst bis auf 39 Decimalstellen berechnet, und noch einige andere Vortheile dabey angebracht hat, so daß die Logarithmen aller theilbaren Zahlen unter 300000 durch die bloße Addition zweyer Logarithmen gefunden werden kőnnen. Endlich da die Büchnerschen Quadrat- und Cubiczahlen so voller Fehler sind, so hat Hr. Wolfram auch diese von neuem berechnet. Diese drey Tafeln bot er mir nun zur Publication an, worauf ich auch nicht ermangelt habe, das nöthige zu antworten. Hr. Wolfram verglich inzwischen die erste dieser Tafeln mit der in den Zusätzen gegebenen Pellschen, wie er mir meldet, ziemlich eilfertig, und schrieb mir folgende darin zu machende Verbesserungen.

Zahlen.	Kleinste Theiler.	Zahlen.	Kleinste Theiler.
14789	23	20737	89
16511	11	21583	113
16513	7	21761	47
17533	89	22489	43
17549	7	22499	149
18103	43	22849	73
20057	31	22987	127
20059	13	26381	23

Zahlen.	Kleinste Theiler.	Zahlen.	Kleinste Theiler.
29111	43	62537	23
35611	149	62539	—
36019	181	62543	13
38369	17	62549	—
38659	67	63307	29
40333	53	67831	29
41291	157	72499	7
44059	—	78827	7
45499	173	81137	—
45593	127	81179	7
45799	13	81653	11
46889	—	82169	127
51119	17	84599	31
51983	227	87271	197
54733	7	89903	11
54737	127	91657	151
54739	19	91793	13
54749	53	96947	29
58867	37	97417	61
61391	11	97709	199

Zahlen.	Kleinste Theiler.	Zahlen.	Kleinste Theiler.
99457	271	101279	—
100007	97	101519	11
100031	67	101549	7
100627	47	101579	157
100723	7	101851	179
100991	11	101887	139
101071	53	101993	29

Dieses zieht nun an sich auch einige Aenderungen in der Tafel der Primzahlen nach sich, wo überdies noch die Primzahl 91183 fehlt, und demnach am gehörigen Orte eingeschaltet werden muß.

Hr. **Wolfram** meldet mir ferner, daß unter den Logarithmen von A. Sharp in Sherwins mathematical Tables, Edit. 1726. in dem Log. 131 außer den ersten 16 Ziffern, und im Log. 163 außer den

20 ersten Ziffern die übrigen alle unrichtig sind, der andern Logarithmen, in welchen nur eine oder vier oder sieben Ziffern unrichtig sind, nicht zu gedenken. Unter den 100 Logarithmen in der Clausbergischen Rechenkunst hat Hr. **Wolfram** auch 8 fehlerhaft gefunden.

Da man solche Tafeln gern zuverläßig genau zu haben oder zu machen wünscht, so hoffe ich, daß diese Nachrichten vielen Lesern eben so willkommen seyn werden, als sie es mir waren. Aus gleichem Grunde werde ich noch einige Verbesserungen, so die Tafeln in den Zusätzen rc. betreffen, hersetzen. Es muß demnach daselbst in der 20sten Tafel 12 Lin. cos. z — cos. y gelesen werden. Auf der 142sten und 143sten Seite muß an gehörigen Orten

$$\sin.\tfrac{1}{2}a^2 = (A+B-C):(A-B+C):4\,BC$$
$$B = \cos.A(\cos.c+\sin.c.\cot.a) = A.\sin.(a+c):\sin.a$$
$$A = B:(\cos.c+\sin.c.\cot.a) = B.\sin.a:\sin.(a+c)$$
$$\mathrm{tang}.\tfrac{1}{2}c = [+sA\cos.a+\sqrt{}(sA^2-sB^2.sa^2)]:\sin.a.s(B+A)$$

gelesen werden. Auf der 145sten S. wird anstatt $\sqrt[2]{\left(\frac{\text{area circ.}}{\text{quad. lat.}}\right)}$ besser $\frac{\text{diam. circ.}}{\text{latus}\ \square\ \text{æqualis}}$ - - - - $\sqrt[3]{\left(\frac{\text{solid.Sphær.}}{\text{cubi latus}}\right)}$ - - $\frac{\text{diam. Sphæræ}}{\text{latus cubi æqualis}}$ gesetzt, wie es die im Texte S. 67. gegebene Erklärung mit sich bringt. Auf der 149sten Seite bey dem Bogen von 50 Minuten müssen die drey letzten Zahlen 423, und bey 3 Secunden die letzte Zahl 7 seyn. Auf der 156 Seite muß am gehörigen Orte in der dritten Columne 178201 und 185437 gelesen werden. S. 158 ist bey dem 20sten Grad der log. sin. $=9{,}5340517$, und S. 161. ist $4y^3+3ay^2+2by+e$ zu lesen.

Die

Die hier angezeigten Verbesserungen mögen inzwischen immer gebraucht werden, bis zu einer vollständigeren Sammlung solcher Tabellen Stoff gesammlet worden. Ich habe bereits einige neue Tafeln selbst berechnet, andere sind mir von verschiedenen Liebhabern der Mathematik theils schon zugeschickt, theils gute Hoffnung dazu gegeben worden. Unter denen bereits erhaltenen ist vorzüglich diejenige, welche von allen durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen die sämtlichen Factoren enthält. Ich erhielt sie im Sommer 1771 bereits bis auf 260000, und nun dermalen bis auf 339000, mit der Hofnung, daß sie, wenn Zeit und Muße bleibt, bis auf eine völlige Million erstreckt werden soll. Die zwo Tafeln, welche in diesem dritten Theile der Beyträge zur 177sten Seite gehören, hat ein hiesiger Liebhaber

für

für jede Grade, und bis auf Secunden zu berechnen übernommen, und damit bereits den Anfang gemacht. Alsdann begreifen sie auf eine sehr brauchbare Art alle Fälle der sphärischen rechtwinklichten Dreyecke, wenn noch die Anleitung zu einer leichten Interpolation hinzukömmt. Hiezu aber wird man hier in der fünften Abhandlung S. 81 — 95. bereits Gründe finden, welche sodann gute Dienste werden thun können. Zur Berechnung der hyperbolischen Logarithmen auf sehr viele Decimalstellen hat ein hiesiger und bereits durch Schriften berühmter Liebhaber der Mathematik Anstalten gemacht, wodurch die Berechnung nachgehends erleichtert wird. Hingegen hat sich zur Berechnung der hyperbolischen Logarithmen der Tangenten von 45° bis 90° für jede Minuten und wenigstens auf 7 Decimalstellen noch nie-

niemand gefunden, so sehr auch eine solche Tabelle zur Berechnung vieler anderer und bey Anwendung des Integralcalculs von gutem Gebrauche ist. Andere theils grössere theils kleinere Tabellen bleiben ebenfalls noch zurück, so daß eine vollständigere Sammlung derselben mehrere Jahre Zeit erfordern dürfte. Doch vielleicht lassen sich noch früher mehrere Mitarbeiter finden. Indessen glaubte ich, dieses hier überhaupt anzuzeigen, nicht undienlich zu seyn.

Da ich diese Vorrede so ziemlich mit Anzeigen von Druckfehlern angefüllt habe, so ist es billig, daß ich auch noch einige, so in den hier gelieferten Abhandlungen vorkommen, anzeige. Sie sind nicht sehr erheblich.

S. 136. §. 50. Lin. 3. lese man $\varepsilon = 90 - p$.
S. 177. §. 97 Lin. 9. lese man zwey Tafeln.

S.

S. 194. Lin. 1. lese man $e\,l\,t\,(45 + \frac{1}{2}\varphi)$

S. 223. §. 26. Lin. 7. anstatt auswerts lese man einwerts.

S. 328. Lin. 1. lese man: auf alle.

S. 350. §. 32. Lin. 21. anstatt bescherte lese man beschwerte.

S. 494. In der Tafel neben 10 Jahren soll 5513 stehen.

Endlich kann man S. 147. §. 63. noch folgendes beyfügen:

Die Halbmesser der Parallelen sind $y = \frac{1}{2 \cdot x} - \frac{1}{2}x$, folglich

$\varepsilon =$	$y =$
90	∞
80	11,386
70	5,581
60	3,595
50	2,554
40	1,892
30	1,414
20	1,032
10	0,648
0	0,000

Inhalt.

 5. Fer-

Inhalt.

I.

Eine besondere Eigenschaft der Tangenten.

§. 1.

Die erste und zugleich die einfachste Regel, so man in der Gnomonic zu Verzeichnung horizontaler Sonnenuhren erweist und giebt, ist folgende: Tab. I. Man zieht MAE auf OAC rechtwinklicht, Fig. 1. macht AOP der Polhöhe, OAP der Aequatorshöhe gleich, trägt AP aus A in C, beschreibt aus C den Circul AF, theilt denselben von 15 zu 15 Graden in Stunden, zieht aus C durch jede Stunde Linien bis an AM, dergleichen z. E. für die 3te Stunde CM ist, und zieht sodann die Linien OM, Om, welche die Stundenlinien der Horizontaluhr seyn werden.

§. 2.

Bey diesem Verfahren muß nun gewöhnlich die Linie AM sehr verlängert werden, zumal wenn man auch die halbe und Viertelstunden in der Sonnenuhr zeichnen will. Man hat daher auf Mittel gesonnen, dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, dergleichen auch in dem zweyten Theile meiner **Beyträge zur Mathematik** vorkommen, wo ich angebe, wie man vermittelst zweyer Circulbögen zum Zwecke gelangen kann. Ich habe aber seitdem gesehen, daß vermuthlich einem Engländer die Frage im Sinn gekommen, **ob nicht statt der Linie** *AM* **eine andere gerade Linie** *AD*, **welche die sämtlichen Stundenlinien** *Om* **durchschneidet, mit Vortheil gebraucht werden könne?** Der Einfall, wenn anders der Erfinder bey diesem Problem anfing, und nicht etwan synthetisch auf die Sache geführt worden, war nicht unglücklich. Denn der Erfolg war, daß wenn unter allen möglichen Linien AD diejenige gewählt wird, deren Mitte N auf die Linie der dritten Stunde OM fällt, alsdann jede Theile Nn ebenfalls Tangenten von 15, 30, 45 2c. Graden sind. Es ließ sich ferner dabey gedenken, daß man die ein für allemal getheilte Linie AD für jede Polhöhe beybehalten könne, und in dem Triangel ADO weiter nichts als die Verhältnis der Seiten AO, OD nach der abgeänderten Polhöhe abzuändern habe. Ja es kam, weil der Triangel rechtwinklicht, und AD von

von beständiger Größe ist, schlechthin nur auf die Seite OD oder auch AD an. Auf diese Art werden nun in England Scalen verfertigt, worauf die Eintheilung von AD und OD gezeichnet sind. Erstere heißt die **Sechsstundenlinie**, die andere aber die **Breitenlinie**. Solche Scalen kamen dem ehemaligen Prof. **Kraft** zu Petersburg vor, und veranlaßten ihn, in dem 13ten Band der Petersburgschen Commentarien eine Beschreibung davon zu geben, und die Verfertigungsart aufzuklären.

§. 3.

Kraft stellte sich die Sache als ein Problem vor, und löste es analytisch auf, weil er nach langem Nachforschen keinen bereits bekandten Beweis finden konnte. Die Eigenschaft der Linie DE konnte bey dem ersten Erfinder eine Folge synthetischer Betrachtungen seyn, und solche Folgen bieten sich mehrentheils an, ohne daß man sie sucht. Es ist auch möglich, daß der erste Erfinder die Eintheilung der Linie AD Anfangs nur für eine bestimmte Polhöhe berechnet, und nach und nach etwas allgemeines gefunden. Dem sey nun wie ihm wolle, so ist das Problem eigentlich analytisch, und läßt sich kürzer, als **Kraft** es gethan, folgendermassen auflösen.

§. 4.

Einmal hat man Fig. 2.

$$An : nD = Am : OD$$

 dem-

demnach

$$An : (nD + An) = Am : (OD + Am)$$

oder

$$An : AD = Am : (OD + Am)$$

welches

$$An = \frac{AD. Am}{OD + Am}$$

gibt. Nach dieser Formel könnten nun jede Puncte n berechnet werden, wie auch immer OD angenommen wird.

§. 5. Man will aber, daß

$$An = \tfrac{1}{2} AD$$

werde, wenn $mA = AC = AP$ wird. Dieses gibt demnach

$$\tfrac{1}{2} AD = \frac{AD. AP}{OD + AP}$$

woraus $OD = AP = AC$ folgt.

§. 6.

Da nun, wegen $OD = AC$,

$$An = \frac{AD. Am}{AC + Am}$$

ist, so setze man den Winkel $mCA = \omega$, und man wird

$$An = AD. \frac{tang.\,\omega}{1 + tang.\,\omega}$$

demnach

$$Nn = \tfrac{1}{2} AD - An = \tfrac{1}{2} AD. \frac{1 - tang.\,\omega}{1 + tang.\,\omega}$$

oder

oder

$$Nn = AN. \, tang\,(45^\circ - \omega)$$

erhalten. Und so ist die Eintheilung der Scala AD bestimmt, und, wie man sieht, von der Polhöhe ganz unabhängig.

§. 7.

Es sey nun

$$AD = 1$$
$$OD = x$$

die Polhöhe $AOP = p$

so ist $OA = \sqrt{(1 - xx)}$

$$AP = OA. \sin. p = \sqrt{(1 - xx)}. \sin. p = OD$$

demnach $\sqrt{(1 - xx)}. \sin. p = x$

$$x = \frac{\sin\, p}{\sqrt{(1 + \sin. p^2)}}$$

oder $OD = \dfrac{AD. \sin\, p}{\sqrt{(1 + \sin. p^2)}}$

§. 8.

Die ganze Construction ist nun folgende: Fig. 3
Auf AD beschreibe man den Circul AGDOL, und theile die Helfte DOLA in 90 Theile, welche die 90 Grade vorstellen. Von D gegen L zähle man die Grade der Polhöhe, und indem man DQ auf DA senkrecht zieht, so macht man DQ der Chorde DL, welche den Sinus der Polhöhe vorstellt, gleich. Man ziehe AQ, und sodann DO, so ist der Triangel ADO für die zum Grunde gelegte Polhöhe construirt.

 Man

Man macht ferner AG = GD, und indem man DOLA in 6 Stunden theilt, so zieht man aus G in jede Stunde gerade Linien, welche sodann die Scala AD von selbst eintheilen. Man kann auf erst beschriebene Art die Puncte O für jede Polhöhen auf den beyden Quadranten DO, DG zeichnen, so wie sie in der Figur auf dem letztern gezeichnet sind. Und so wird der Circul nebst seinem Diameter eine allgemeine Horizontal und Verticaluhr seyn. Die Mittagslinie ist Vormittags AO, Nachmittags Ao.

§. 9.

Indem ich auf diese Art die Sache überdachte, und den Beweis und die Construction einfacher zu machen suchte, kam mir erst im Sinn, daß ich die Hauptsache, welche hiebey auf die Eigenschaft der Linie AD ankömmt, längst schon und viel allgemeiner gefunden hatte, und zwar bey Anlaß einiger über perspectivische Zeichnungen angestellten Untersuchungen. Man
Fig. 4. ziehe an den Circul C die Tangente AM, und indem man den Circul in beliebige Theile theilt, so zieht man jede Linien CM. Sodann wählt man nach Belieben einen Punct D, und zieht jede Linien DM. Endlich zieht man nach Belieben eine Linie EQ, welche die aus D gezogenen, und allenfalls verlängerten Linien durchschneide, z. E. DA in a, DM in N, &c. Nun sage ich, daß sich immer ein Punct F finden lasse, welcher die Winkel aFN den Winkeln ACM durchaus gleich mache

mache, so daß wenn nur die aus D gezogenen Linien gezogen werden sollen, es gleich viel ist, ob man die Linie AM und den Punct C, oder die Linie EQ und den Punct F dabey gebrauche.

§. 10.

Um dieses zu beweisen und zugleich die Fig. 5. Lage des Puncts F zu bestimmen, so sey C der gegebene Mittelpunct, IAB die gegebene Tangente, CA auf IAB senkrecht, EB sey die willkührlich gezogene Linie, und D der willkührlich angenommene Punct. Der gesuchte Punct sey F, und FG auf EB senkrecht. Auf IAB nehme man einen jeden beliebigen Punct M, man ziehe CM, DM, FM. Man ziehe endlich DE und HC mit AI parallel, so muß der Bedingung der Aufgabe gemäß allemal

$$CFN = HCM$$

seyn. Denn rückt der Punct M gegen I unendlich weit hinaus, so wird CM und DM mit AI parallel, demnach fällt CM auf CH, und DM auf DE. Da nun der Punct F gleiche Winkel wie C machen soll, so müßen jede Winkel

$$CFN = HCM$$

seyn.

§. 11.

Um nun zu sehen, ob und wie dieses statt haben kann, so sey

 AC

$$\begin{array}{llll} AC = 1 & & ACM = \omega \\ AB = a & GF = y & GFM = \varphi \\ ED = b & & GFE = \xi \\ EB = c & & \end{array}$$

Und es soll $\xi + \varphi = 90^\circ + \omega$ seyn. Nun ist

$$BM = a - \text{tang}\ \omega$$

$$EN = y\ \text{tang}\ \xi + y\ \text{tang}\ \varphi$$

Und $(MB + ED) : EB = ED : EN$

demnach

$$(b + a - t\omega) : c = b : (\text{tang}\ \xi + \text{tang}\ \varphi) y$$

$$cb = y.(t\xi + t\varphi).(b + a - t\omega)$$

Da nun $\text{cotang}\ \omega = -\dfrac{t\xi + t\varphi}{1 - t\xi.t\varphi}$

so haben wir

$$cb = y(t\xi + t\varphi).\left(b + a + \frac{1 - t\xi.t\varphi}{t\xi + t\varphi}\right)$$

oder

$$cb = y\big((b + a).(t\xi + t\varphi) + 1 - t\xi.t\varphi\big)$$

welches

$$\begin{array}{l} o = y(b + a)t\xi + y(b + a)t\varphi \\ \quad + y \qquad\qquad\quad - yt\xi.t\varphi \\ \quad - b \end{array}$$

Da nun in dieser Gleichung $t\varphi$ allein veränderlich seyn soll, so müßen beyde Glieder

$$y(b + a)t\xi + y - cb = o$$

$$y.t\varphi(b + a - t\xi) = o$$

seyn. Demnach ist

$$t\xi = (b + a)$$

Und

Und $y(b + a)^2 + y - cb = o$

$$y = \frac{cb}{(b + a)^2 + 1} = \frac{cb.\ AC}{(b + a)^2 + AC^2}$$

$$EG = yt\xi = \frac{cb(a + b)}{(a + b)^2 + 1} = \frac{cb\ (a + b)}{(a + b)^2 + AC^2}$$

§. 12.

Man sieht hieraus, daß der Winkel BED = IBE in der Rechnung gar nicht vorkömmt, sondern die Linien

DE, EG, EB, BA, AC, GF

einander dergestalt bestimmen, daß man zwo derselben vermittelst der vier übrigen finden kann. Dieses ist nun eben was das Problem sehr allgemein, und die dadurch gefundene Eigenschaft der Tangenten sehr merkwürdig macht. Wir können nun noch sehen, wie der Punct F sich durch Construction finden lasse.

§. 13.

Nachdem die Linien HC, CA, IAB, BF, ED wie vorhin gezogen worden, so mache man AM = AC, um den Winkel MAC = 45° zu haben. Sodann ziehe man DM, DA, und bemerke die Durchschnittspuncte N, a. Auf Ea beschreibe man den Circul ELa, man nehme EL = La = 90°, und aus C ziehe man eine gerade Linie in N, so wird diese den Circul in dem verlangten Punct F durchschneiden. Denn es ist Fig. 6.

 EFa

$$EFa = 90^\circ = HCA$$
$$NFa = 45^\circ = MCA$$

und damit ist auch überhaupt

$$EFN = HCM$$

wo auch immer der Punct M auf IB genommen wird.

§. 14.

In Ansehung der hier gegebenen Auflösung des Problems werde ich noch anmerken, daß sie so beschaffen ist, daß man gleichsam zufalliger Weise die Allgemeinheit derselben hätte finden können. Um dieses zu zeigen, so setze man den ganz besondern Fall, wo die Lage der Puncte C, A, B, G, F, E, D gegeben ist, und wo man schlechthin nur den Punct M hätte finden wollen, bey welchem HCM = EFN wird. Hätte man in dieser Berechnung, wie vorhin, die gegebenen Stücke

$$1, a, c, \xi, y, b$$

und das gesuchte ϕ genommen, so würde man auf eben die Art

$$\text{tang}\, \phi = \frac{y(b+a).t\xi + y - cb}{y(b+a) - y.t\xi}$$

gefunden haben. Diese Auflösung hat nun das Ansehen, als wenn nur ein einiger Winkel ϕ der Bedingung der Aufgabe Genüge leistete, weil 1, y, b, a, ξ, c bestimmt sind. Auch würde dieses nothwendig seyn, wenn sich diese Werthe nicht dergestalt bestimmen ließen, daß Zähler und Nenner zugleich = 0 würden. Da aber dieses angeht, so sieht man, daß es Fälle giebt, wo man für ϕ jeden beliebigen Winkel nehmen kann.

§. 15.

Es sey nun z. E. DAR die Verticallinie einer Wanduhr, welche um den Winkel κPQ vom Mittage westwerts abweicht, AL die Aequinoctiallinie, DC die Substylarlinie. Da nun besonders für die 8te und 9te Stundenlinie, die Aequinoctiallinie sehr verlängert werden müßte, so kann man durch einen beliebigen Punct auf AD z. E. durch A die Linie AN mit der 6ten Stundenlinie Df6 parallel, und FAf auf Df6 senkrecht ziehen. Man bemerkt sodann den Punct N, wo AN die dritte Stundenlinie durchschneidet, und indem man AF = AN macht, so hat man den Punct F gefunden, welcher die Winkel AF11, AF10, AF9, AF8 &c. = 15, 30, 45, 60 &c. Graden macht, und demnach zur Eintheilung der Linie NA gebraucht werden kann. Auf gleiche Art läßt sich z. E. durch die dritte Stundenlinie eine mit der 9ten Stundenlinie parallellaufende Linie ziehen, welche in Absicht auf die dritte Stundenlinie eben den Dienst thun wird, den NA in Absicht auf die zwölfte Stundenlinie that. Fig. 7.

II.

II.
Zusätze zur Visirkunst.

§. 1.

Tab. II. Ich habe diese Materie bereits in dem ersten Theile der Beyträge so abgehandelt, daß so wol ganz als nur zum Theil volle liegende Fäßer nach einer ganz einfachen Regel und dabey sehr genau ausgemessen werden konnten. Nach dieser Regel stellt man sich einen durch das Spuntloch gehenden und mit dem Boden des Fasses parallel stehenden Boden vor. Man mißt aus, wie groß der an diesen dreyen Böden von dem Wein benetzte Flächenraum ist. Den Flächenraum des Spuntbodens nimmt man vierfach, und addirt den Flächenraum von den beyden wirklichen Boden dazu. Die Summe wird durch 6 getheilt, und der Quotient mit der Länge des Fasses multiplicirt. Dadurch erhält man den gesuchten Inhalt des Fasses sehr genau.

§. 2.

Bey dieser Regel ließ ich es damals bewenden. Seitdem meldete mir Herr **Jetzeler** von Schafhausen, daß man dort herum ovale Fäßer mit einwerts gebogenen Böden habe, bey welchen meine Regel nicht schlechthin anwendbar bliebe. Er wünschte daher, daß ich auch für solche Fäßer eine leichte Regel finden möchte. Daraufhin konnte ich mir von solchen Fäßern keinen andern Begrif machen, als daß sie besondere Schwürigkeiten haben müßten.

§. 3.

Ich bat demnach Herr **Jetzeler**, er möchte mir alle Ausmessungen davon zuschicken. Diese habe ich seitdem erhalten. Herr **Jetzeler** trug die Sache einem geschickten Böttlicher auf. Dieser übergab ihm hierauf eine Zeichnung nach vier verschiedenen Profilen, woraus sowohl die ovale Rundung als die Beugung der Dauben, und die gedoppelte Beugung der Böden genau aufgetragen war. Ich habe um den Raum zu ersparen, diese Zeichnung um die Helfte verkleinert, in der Figur vorgestellt. Fig. 1,2,3. In A ist die kleinere Ovale die Ründung des Bodens, die grössere aber ist die Ründung beym Spuntloche, beydes im Lichten. CB stellt die Wölbung der Dauben beym Spuntloche, E aber zur Seite vor. Ein cubischer Visirstab war ebenfalls dabey angezeichnet, und so getheilt, daß der Punct beym Spuntloche auf $20\frac{3}{4}$ Eimer traf. Endlich war auch noch ein Fußmaaß dabey, welches durch Transversalen in Zolle und $\frac{1}{4}$ Zolle getheilt war.

§. 4.

Auf dem übrigen Raume des Blattes hatte der Böttlicher folgendes geschrieben:

„Die-

„Dieses Faß nennen wir auf acht Stiche, „weil man derer auf neun, zehen, und auch „wohl mehr Stiche sprengt. Bey solchen „Fäßern soll nun die kürzeste Taugen so lang „seyn als der Setzboden A hoch ist. Die „Spitzung des Fasses wird von der äußern „Weite des Fasses auf jeden Schuh, den die „kürzeste Taugen hat, $\frac{1}{2}$ Zoll abgebrochen, „welches die Weite der Köpfe giebt, und auf „diese Spitzung müßen die Taugen gefugt „werden. Die Dicke der Köpfe könnte hier „wohl benennt werden, aber die Theurung „des Holzes läßt es nicht zu, jede Taugen in „eine Proportion zu hauen, weil wir das „meiste Küfferholz auch von den Bauern ein„kaufen müßen, und solche von keiner Pro„portion nicht wißen. Hier ist der Kopf „$1\frac{1}{2}$ Zoll stark. Die Länge dessen ist, ohne „die Schrege bey B, auch $1\frac{1}{2}$ Zoll. Die „Zargel C wird $\frac{1}{3}$ der Köpfe seyn. Die „Senkung des Faßes gebe ich über die Sei„tenweite D auf 18 Zoll, $\frac{1}{4}$ Zoll Senkung; „so daß die Seitentaugen E stark $\frac{3}{4}$ Zoll län„ger als die Spunttaugen F sind, und die „Wölbung des Bodens in einem Model muß „gefügt werden, dessen Circuls Diameter „54 Schuhe ausmacht. In der geraden „Senkung des Bodens kann eben so wenig „die Proportion observirt werden, als bey „den Taugen. Ich finde hier nicht mehr „als $\frac{3}{8}$ Zoll.“

§. 5.

§. 5.

Endlich war noch neben dem Visirstab geschrieben:

„Wegen der Visirruthe finde, daß sie „$20\frac{3}{4}$ Eimer visirt, nach genauer Messung „aber nur $14\frac{2}{4}$ Eimer hält; daß, wenn, also „wie hier gebräuchlich, $\frac{1}{4}$ ab- und zu der Ver„hältnis des Fasses gerechnet wird, es nicht „gar accurat genug einschlägt.“

§. 6.

Aus diesem Texte so wie aus dem Profile sahe ich, daß an diesen ovalen Fäßern, so wie an der Art sie zu visiren, schon sehr muß gekünstelt worden seyn, und daß demnach zu sehen ist, ob und welche Grundsätze dabey vorkommen. Um hierin ordentlich zu verfahren, mußte die ovale Rundung der Böden zuerst vorgenommen werden. Hier fand ich, daß die längeren Axen beyder Ovale sich zu den kürzern beynahe wie 4 zu 3 verhalten. Es war nemlich bey den Böden die Höhe 35 Zoll, die Breite $26\frac{1}{2}$ Zoll, hingegen beym Spuntloche die Höhe $41\frac{1}{2}$ Zoll, die Breite $31\frac{1}{2}$ Zoll, demnach in beyden Fällen die Verhältnis sehr nahe wie 4 zu 3. Dieses wird auch die Regel haben wollen, nach welcher von dem, was der cubische Visirstab angiebt, $\frac{3}{4}$ müßen genommen werden (§. 5.)

§. 7.

Ob nun die Ovalen wirkliche Ellipsen sind, oder als solche angesehen werden können, ist die

die zweyte Frage. Ich fand in der Zeichnung auf beyden Axen Puncte angemerkt, und konnte sogleich muthmassen, dieses möchten die Mittelpuncte von Circularbögen seyn, aus denen die Ovalen in der Figur zusammen gesetzt sind. Die Vermuthung traf auch ein, und es waren die Halbmesser

für die kleinere Ovale $11\frac{5}{8}$ Zoll und $23\frac{1}{8}$ Zoll.

für die größere Ovale 14 Zoll und $27\frac{3}{4}$ Zoll.

Diese Zahlen sollen vermuthlich $11\frac{1}{2}$, 23, 14 und 28 Zoll seyn. Und so ist für jede Ovale der eine Halbmesser doppelt größer, als der andere.

§. 8.

Als ich ferner durch die zu jeder Ovale gehörende Puncte auf der Axe eine gerade Linie zog, so durchschnitt diese die kurzere Axe unter einem Winkel von 30°, die langere aber unter einem Winkel von 60 Grad. Eine solche stellt in der Figur mnp vor. Da nun np, mp die beyden Halbmesser, $mp = 2np$, und hinwiederum $anp = 2.pmb$, so folgt, daß die Bögen ap, pb gleiche Länge haben. Und es ist nicht zu zweifeln, daß dieses nicht sollte die Absicht des Erfinders solcher Fäßer gewesen seyn.

§. 9.

Nach diesen Bemerkungen läßt sich nun das Problem von der ovalen Ründung in aller Form auflösen. Die Data sind

1) Es soll $Aa : Ab = 4 : 3$ seyn, wenigstens beynahe.

2) $nmA = 30°$, und hinwiederum $mnA = 60°$.

3) $mp = 2.np$.

Nun ist

$$mp = mb$$

$$np = na.$$

Man setze demnach

$$Aa = 4$$

$$Ab = 3$$

$$mn = np = x$$

so ist $\quad nA = x.\sin. 30°.$

demnach

$$Aa = x + x.\sin. 30° = \tfrac{3}{2}x = 4.$$

folglich $\quad x = \frac{8}{3}$

oder überhaupt

$$np = x = \tfrac{2}{3}Aa.$$

demnach auch

$$mp = 2x = \tfrac{4}{3}Aa$$

ferner $\quad nA = \frac{1}{3}Aa$

und

$$mA = x.\cos 30° = \tfrac{2}{3}.\sqrt{\tfrac{3}{4}}.Aa = \sqrt{\tfrac{1}{3}}.Aa.$$

Das will sagen

$$mA = Aa.\mathrm{tang}.\,30°.$$

Das will wiederum sagen: eine durch m, a gezogene gerade Linie schneide die größere Axe Aa in a unter einem Winkel von 30°.

§. 10.

Die Construction dieser Ovalen ist also sehr leicht, weil man nur $nA = \frac{1}{3}Aa$, und den Winkel $mnA = 60°$, oder die Chorde $ap = an = np$ machen darf. Indessen ist bey dieser Rech-

Rechnung die kürzere Axe Ab nicht gebraucht worden. Da aber

$$mA = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\ Aa$$
$$mp = mb = 2x = \tfrac{4}{3}\ Aa$$

ist, so folgt

$$Ab = mb - mA = (\tfrac{4}{3} - \sqrt{\tfrac{1}{3}})\ Aa = 0{,}7559.\ Aa$$

Es sollte aber nach dem ersten Dato

$$Ab = \tfrac{3}{4}.\ Aa = 0,\ 75.\ Aa$$

seyn. Demnach giebt erstere Rechnung Ab um $\frac{1}{120}$ Theil größer an. Es ist indessen sehr wahrscheinlich, daß die Böttcher sich an die erstere halten, weil sie vermittelst des gleichseitigen Triangels nap die Ovale sehr leicht construiren können, zumal da der aus n mit dem Halbmesser na beschriebene Circul zugleich durch die drey andere Mittelpuncte m, M, N geht, weil $np = na = nm = nM = nN$ ist, und damit die Figur gerade diejenige ovale Ründung hat, deren Zeichnung in vielen geometrischen Lehrbüchern, z. E. in **Beutels** Lustgarten p. 26. in **Peschets** Vorhof p. 42. &c. angegeben wird.

§. 11.

Um nun den Flächenraum der Ovale zu bestimmen, werden wir uns nur an den vierten Theil apbAa halten. Und da muß von der Summe der Ausschnitte apn, pbm der Triangel mnA abgezogen werden. Es stelle π die Ludolphische Zahlen vor, so ist πxx der Flächenraum eines Circuls, dessen Halbmesser

ser $= x$. Von diesem ist der Ausschnitt apna der 6te Theil, weil $anp = 60°$ ist, demnach

$$apna = \tfrac{1}{6}\ \pi xx.$$

Der Ausschnitt pbmp ist doppelt so groß, weil $mp = 2x$, und $pmb = 30°$ ist, demnach

$$pbmp = \tfrac{1}{3}\ \pi xx$$

Endlich ist der Triangel

$$mnA = \frac{xx}{2}.\sqrt{3}$$

Und damit findet sich der Raum des Viertels

$$apbAa = \tfrac{1}{6}\pi xx + \tfrac{1}{3}\pi xx - \tfrac{1}{2}xx.\sqrt{3}$$
$$= \tfrac{1}{2}xx\ (\pi - \tfrac{1}{4}\sqrt{3})$$

Nun ist

$$\pi = 3,1415926$$
$$\tfrac{1}{4}\sqrt{3} = \underline{0,4330127}$$
$$2,7085799$$

und folglich

$$apbAa = 1{,}3542899.\ xx.$$

Da ferner $x = \frac{2}{3}\ Aa$

so ist $apbAa = 0{,}6019066\ (Aa)^2$

demnach der Inhalt der ganzen Ovale

$$= 2,\ 4076266.\ (Aa)^2$$

Hingegen würde der Raum einer mit dem Halbmesser Aa beschriebenen Circulfläche

$$= 3,\ 1415926\ (Aa)^2$$

seyn. Die Verhältniß dieser beyden Räume ist nicht völlig wie 4 zu 3; sondern wie 30 zu 23, oder genauer wie 107 zu 82. Nimmt man aber eine Ellipse, deren größerer Halbmeßer =

Aa, und der kleinere = Ab = ($\frac{4}{5}$ — $\sqrt{\frac{1}{5}}$)·Aa; so findet sich deren Inhalt

= 2,3749906

welcher von dem Inhalt der Ovale nur um

0,0326360

demnach nur um $\frac{1}{73}$ Theil verschieden ist. Da nun der Inhalt einer Ellipse leichter vermittelst des Cylindrischen Visirstabes kann berechnet werden, weil man nur beyde Diameter mit einander multipliciren darf, und da es ferner scharf genug ist, wenn man beym Visiren auf 73 kaum eine fehlt; so hat in dieser Absicht das Visiren solcher ovalen Fäßer keine besondere Schwürigkeit, und man wird die Anfangs angeführte Regel, so wie sie ist, gebrauchen können.

§. 12.

Die Frage kömmt also auf die Wölbung der Böden an. Da erhellet nun aus der Beschreibung (§. 4.)

1. Die gröste Länge des Fasses sey in E, E, längs den Seitendauben.
2. Die kleinste Länge in der Mitte des Fasses, und diese sey stark $\frac{3}{8}$ Zoll kürzer als die Spuntdauben.
3. Die Länge des Faßes längs den Spuntdauben und unten sey $\frac{3}{4}$ Zoll kürzer als bey den Seitendauben.

Damit sind die Seitendaubenlängen $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} = 1\frac{1}{8}$ Zoll länger als die Mitte des Faßes. Diese Unterschiede sind überhaupt betrachtet sehr geringe.

§. 13.

Um indessen das behörige Mittel zu treffen, so wollen wir die größte Länge des Fasses zum Grunde legen, um zu sehen, wie viel wegen der Senkung der Bögen davon abgebrochen werden muß. AB sey eine gerade Linie, und zugleich die Chorde von der Wölbung des Bodens. EG stelle die gröste Senkung des Bodens in der Mitte desselben vor. EF hingegen zeige an, um wie viel die Spuntlänge kürzer ist als die Seitenlänge; so ist CGD die Wölbung oder Senkung des Bodens der Höhe nach, AGB aber der Breite nach gerechnet. Fig. 4.

§. 14.

Man nehme nun auf AB einen beliebigen Punct P; so ist PM die Senkung des Bodens bey diesem Punct, und QMR die Krümmung desselben der Höhe nach. Man ziehe QR gerade herunter, so zeigt PN an, um wie viel das Faß bey Q und R kürzer ist, als in A und B. Nun ist qQNRrP ein Rectangel, QNRMQ ein Abschnitt einer Circulfläche. Beyder Inhalt muß berechnet werden. Wir können aber, um die Rechnung abzukürzen, die Bögen CGD, QMR, als parabolisch ansehen, weil ihre Krümmung sehr geringe ist.

§. 15.

Es sey

$$AE = a \qquad EP = x$$
$$EG = b \qquad Pq = y = NQ$$
$$EF = c$$

so ist

$$PM = b - b.\frac{xx}{aa}$$

$$PN = c - c.\frac{xx}{aa}$$

$$y = m\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

demnach

$$NM = (b - c).\left(1 - \frac{xx}{aa}\right)$$

der Flächenraum

des Rechteckes

$$PqQN = m\sqrt{(a^2 - x^2)}.c\left(1 - \frac{xx}{aa}\right)$$

des Abschnitts

$$NQM = \tfrac{2}{3}m\sqrt{(a^2 - x^2)}.(b - c).\left(1 - \frac{xx}{aa}\right).$$

Die Summe von beyden

$$z = m.\sqrt{(a^2 - x^2)}.\left(\tfrac{2}{3}b + \tfrac{1}{3}c\right).\left(1 - \frac{xx}{aa}\right).$$

Diese mit dx multiplicirt, giebt das Element des Raumes, so von dem Fasse wegen der Senkung des Bodens abgezogen werden muß,

zdx

$$zdx = m.\sqrt{(a^2 - x^2)}.\left(\tfrac{2}{3}b + \tfrac{1}{3}c\right).$$
$$\left(1 - \frac{xx}{aa}\right).dx$$

Hieraus findet sich

$$\int zdx = ma^2\left(\tfrac{2}{3}b + \tfrac{1}{3}c\right).$$
$$\left[\tfrac{3}{4}\int\sqrt{\left(1 - \frac{xx}{aa}\right)}\frac{dx}{a} + \tfrac{1}{4}\frac{x}{a}\left(1 - \frac{xx}{aa}\right)^{3:2}\right]$$

demnach für $x = a$.

$$\int zdx = ma^2\left(\tfrac{2}{3}b + \tfrac{1}{3}c\right).\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{4}\pi$$

Es ist aber $ma^2\pi$ der Flächenraum des Bodens. Man nenne denselben $= f$, so muß von dem Inhalt des Fasses

$$4\int zdx = f\left(\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{4}c\right)$$

bey jedem Boden abgezogen werden.

§. 16.

Setzt man demnach des Faßes

halbe Seitenlänge $= \lambda$

so ist die halbe Spuntlänge $= \lambda - c$

die halbe Mittenlänge $= \lambda - b$

und die coäquirte oder abgeglichene Länge findet sich, wenn man die Seitenlänge und die Spuntlänge einfach und die Mittenlänge doppelt nimmt, und die Summe durch 4 dividirt. Denn es ist

die Seitenlänge	$= 2\lambda$
die Spuntlänge	$= 2\lambda - 2c$
die doppelte Mittenlänge	$= 4\lambda - 4b$
die Summe	$= 8\lambda - 4b - 2c$
der vierte Theil davon	$= 2\lambda - b - \tfrac{1}{2}c.$

Da

Da nun von der halben Länge des Fasses $\frac{1}{2}$ b + $\frac{1}{4}$ c abgezogen werden muß, so muß von der ganzen Länge 2 λ, doppelt so viel, demnach b + $\frac{1}{2}$ c abgezogen werden. Dieses wird also durch die angegebene Regel erhalten. Die abgeglichene Länge wird sodann mit dem abgeglichenen Flächenraume der Böden (§. 1.) multiplicirt, und so bringt man den Inhalt des Fasses heraus.

§. 17.

Um nun hievon die Anwendung auf das Faß zu machen, werde ich vorerst den in der Figur gezeichneten cubischen Visirstab in einen cylindrischen verwandeln. Es ist aber der cubische Visirstab nach der Diagonale eines Rechteckes berechnet, dessen Grundlinie die Helfte der Höhe ist. Demnach ist die Diagonale zur Höhe wie $\sqrt{\frac{5}{4}}$ zu 1. Und in diesem Verhältniß wird der cylindrische Visirstab kleiner. Ich habe denselben in H neben dem Fußmaaße gezeichnet, und den Eimer in 10 Theile getheilt.

§. 18.

Nun fand sich

1. Bey den Böden
 die Höhe = 2, 46 cylindr. Eimer.
 die Breite = 1, 85

demnach das Product
 oder der Inhalt = 4, 55

2. Bey

2. Bey dem Spuntloche
 die Höhe = 2, 93
 die Breite = 2, 21

das Product = 6, 48.

Dieses giebt (nach §. 1.) den abgeglichenen Inhalt der Böden

$$= \frac{6,48 + 6,48 + 4,55}{3} = 5,84.$$

3. Ferner fand ich, im Lichten gemessen,
 die Seitenlänge = 2,63
 die Spuntlänge = 2,51
 die Mittenlänge = 2,44

demnach die abgeglichene Länge (§. 16.)

$$= \frac{2,44 + 2,44 + 2,51 + 2,63}{4} = 2,50$$

Wird nun die abgeglichene Länge 2, 50 mit den abgeglichenen Böden 5, 84 multiplicirt, so findet sich 14, 6 Eimer, der Inhalt des Fasses. Bey der würklichen Ausmessung hielt es 14$\frac{1}{2}$ Eimer (§. 5.) so daß also der Unterschied nur $\frac{1}{10}$ Eimer ist; so daß auf 145 Maaß nur eine zu viel herauskömmt. Es ist übrigens auch die Ausmessung selbst nicht genauer.

§. 19.

Bey der Anfangs angestellten Untersuchung der ovalen Figur der Böden verfiel ich nicht sogleich darauf, daß mn = np und nap ein Fig. 1.

 gleich=

gleichseitiger Triangel sey, und die Bögen ap, pb von gleicher Länge seyn sollten, sondern ich stellte mir die Sache etwas schwerer vor. Soll nemlich die aus Circulbögen zusammengesetzte Ovale dabc von einer elliptischen Ründung so wenig als immer möglich verschieden seyn, so muß man annehmen, daß eine durch die vier Hauptpuncte a, b, c, d gezogene Ellipse zugleich auch durch den Punct ~~b~~ gehe, oder wenn dieses an sich nicht möglich seyn sollte, so nahe als möglich bey ~~b~~ durchgehe. Dieses vorausgesetzt, so legte ich mir die Frage vor, wie die Mittelpuncte m, n bestimmt werden müßen, um diesen Bedingungen Genüge zu leisten. Die Auflösung dieser Frage zeigte mir freylich, daß sie nicht wohl zum Behuf der Bötticher war, und daher mehr an und für sich vorgenommen zu werden verdiente.

§. 20.

Fig. 5. Es seyen demnach CB, CD die halben Axen der Ovale, und es sollen die beyden Puncte S, M gefunden werden, so daß SQ = SD, und BM = MQ seyn, und der Punct Q in der Ellipse DQB liege, oder wenn dieses nicht seyn kann, so wenig als möglich davon entfernt sey. Man setze

$$CB = a \quad CP = x \quad DS = QS = R$$
$$CD = b \quad PQ = y \quad QM = BM = r$$

Man halbire die Chorde QB in R, und ziehe RM. Da nun in P und R rechte Winkel sind, und

und der Winkel B beyden Triangeln MRB, QPR gemeinsam ist; so sind diese Triangel einander ähnlich, und daher ist

$$PB : QB = BR : BM.$$

Es ist aber

$$QB = \sqrt{(y^2 + (a - x)^2)}$$
$$BR = \tfrac{1}{2} QB$$
$$PB = (a - x)$$

demnach

$$(a - x) : \sqrt{(y^2 + (a - x)^2)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(y^2 + (a - x)^2)} : r$$

und hieraus

$$r = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{y^2 + (a - x)^2}{a - x}.$$

Auf eine ähnliche Art findet man

$$R = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + (b - y)^2}{b - y}$$

Nun ist nach der Natur der Ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

Und damit erhält man nach mehrern Reductionen

$$r = \frac{b^2 + a^2}{2a} - \frac{a^2 - b^2}{2aa} \cdot x$$

$$R = \frac{b^2 + a^2}{2b} + \frac{a^2 - b^2}{2bb} \cdot y$$

Und hieraus hinwiederum

x

$$x = \frac{a(a^2+b^2) - 2a^2r}{a^2-b^2}$$

$$y = \frac{2b^2R - b(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$$

Nun ist in dem Triangel CSM

$$CS = R - b$$
$$CM = a - r$$
$$MS = R - r$$

demnach vermöge des Pythagorischen Lehrsatzes

$$(R-r)^2 = (R-b)^2 + (a-r)^2$$

Diese Gleichung giebt

$$2R = \frac{aa + bb - 2ar}{b - r}$$

Setzt man nun diesen Werth in der Gleichung

$$y = \frac{2b^2R - b(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$$

so erhält man nach mehreren Reductionen

$$y = \frac{(a-b)^2 . br}{(a^2-b^2).(b-r)}$$

In dieser Gleichung könnte noch Nenner und Zähler durch $a - b$ getheilt, und die Gleichung noch einfacher gemacht werden. Es ist aber hier unnöthig. Um noch einen andern Werth von y zu finden, giebt die Ellipse erstlich die Gleichung

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{(a^2-x^2)}$$

an.

an. In dieser setze man für x den gefundenen Werth

$$x = \frac{a(a^2+b^2) - 2a^2r}{a^2-b^2}$$

so erhält man nach mehreren Reductionen

$$y = \frac{2b}{a^2-b^2} \cdot \sqrt{(-a^2b^2 + (a^2+b^2)ar - a^2r^2)}$$

welches der andere für y zu suchende Ausdruck ist. Vergleicht man nun die beyde für y gefundene Ausdrücke; so ist

$$\frac{y(a^2-b^2)}{b} = \frac{(a-b)^2 . r}{b-r}$$

$$= 2\sqrt{(-a^2b^2 + a(a^2+b^2)r - a^2r^2)}$$

Und hieraus folgt für r die Gleichung vom vierten Grade:

$$0 = 4a^2r^4 - 4a(a+b)^2r^3 + (a+b)^4r^2$$
$$- 4ab^2(a+b)^2r + 4a^2b^4 + 8a^2b^2r^2$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nun glücklicherweise die Quadratwurzel

$$0 = 2ar^2 - (a+b)^2r + 4ab^2$$

ausziehen. Und hieraus erhält man

$$r = \frac{(a+b)^2 \pm \sqrt{((a+b)^4 \pm 16a^2b^2)}}{4a}$$

Die zwo Wurzeln dieser Gleichung sind nun immer real, und damit liegt der Punct Q wirklich in dem Umkreise der Ellipse.

§. 21.

§. 21.

Man setze $\frac{a+b}{2} = c$

so verwandelt sich die Gleichung in folgende

$$r = \frac{cc}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2} - b^2\right)}$$

Fig. 6. Und diese läßt sich nun folgendergestalt construiren. Es sey AC = CB = a, DC = b. Durch D ziehe man DH mit AB parallel oder auf DC senkrecht. Man trage AC aus C in E, und halbire ED in F; so läßt sich AF und auf AF die Linie FL senkrecht ziehen. Damit ist nun

$$CL = \frac{cc}{a}$$

Aus L beschreibe man mit dem Halbmesser LC den Circulbogen CH, und aus dem Durchschnittspunct H ziehe man HI auf AB senkrecht, so ist

$$IL = \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2} - bb\right)}$$

demnach

$$CI = \frac{cc}{a} - \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2} - bb\right)} = r$$

Trägt man nun CI aus B in M und aus A in m, so sind M, m die Mittelpuncte für die Bögen BQ, Aq. Um nun den andern Mittelpunct S ebenfalls zu finden, so trage man MB = CI aus D in G, man ziehe und halbire GM in K,

K, und durch K ziehe man KS auf MK senkrecht, so ist S der gesuchte Mittelpunct, aus welchem der Bogen qDQ beschrieben werden kann. Denn da

$$SD = QS = R$$
$$GD = QM = r$$

so ist

$$SG = SM = R - r$$

also muß der Triangel GSM gleichschenklicht seyn, demnach die Perpendiculäre KS durch S gehen.

§. 22.

Ehe ich diese Zusätze zur Visirkunst schließe, werde ich über die gleich Anfangs erwähnte Regel einige Anmerkungen beyfügen. Nach derselben wird der Inhalt eines ganz vollen Faßes nicht durch das Arithmetische Mittel von zween Cylindern bestimmt, davon einer um das Faß, der andere in dem Fasse beschrieben wird; sondern man muß von jenem $\frac{2}{3}$ und von diesem $\frac{1}{3}$ nehmen, und zusammen addiren. Ich hatte in dem ersten Theile der Visirkunst diese Regel mit Weglassung einiger kleinern Theile aus einer Formel hergeleitet, die viel verwickelter war, und ich behielte sie so wohl wegen der Leichtigkeit als wegen der hinlänglichen Genauigkeit bey. Es fiel mir erst nachgehends ein, die Krümmung der Faßdauben zu bestimmen, bey welcher diese Regel nach aller Schärfe statt hat. Und dieses erhielte ich auf folgende Art.

§. 23.

Fig. 7. Es sey das Faß ABCD, dessen Axe IL, die Spunttiefe $GH = GE = b$. Man setze $GI = GL = x$, $IA = LD = y$, und die Verhältniß des Diameters zum Umkreise $= 1 : \pi$; so ist der Inhalt des um das Faß beschriebenen Cylinders $= 2xbb\pi$, der Inhalt des in demselben beschriebenen $= 2xy^2\pi$; demnach zufolge erstbemeldter Regel der Inhalt des Fasses

$$z = \tfrac{4}{3}\pi xbb + \tfrac{2}{3}\pi xyy$$

§. 24.

Wie nun aber immer die Gleichung für die Krümmung der Dauben AED mag beschaffen seyn, so können wir eben diesen Inhalt durch

$$z = 2\pi\int y^2\,dx + \text{Const.}$$

ausdrücken, indem wir x und y als veränderlich ansehen. Demnach haben wir die Gleichung

$$\tfrac{4}{3}\pi xbb + \tfrac{2}{3}\pi xyy = 2\pi\int yy\,dx + \text{Const.}$$

§. 25.

Wird nun diese Gleichung differentiirt; so giebt sie

$$\tfrac{4}{3}\pi bb\,dx + \tfrac{2}{3}\pi yy\,dx + \tfrac{4}{3}\pi xy\,dy = 2\pi yy\,dx$$

oder nach behöriger Reduction

$$(bb - yy)\,dx = -2xy\,dy$$

demnach

$$\frac{dx}{x} = -\frac{y\,dy}{bb - yy}$$

Diese Gleichung integrirt, giebt

$$\log.x = \tfrac{1}{2}\log.(bb - yy) + \text{const.}$$

Man

Man setze $\text{Const.} = \log.m$

so verwandelt sich diese Gleichung in folgende

$$\frac{x}{m} = \sqrt{(bb - yy)}$$

welches die gesuchte Gleichung ist, und anzeigt, daß die vorhin (§. 22.) erwähnte Regel nach aller Schärfe statt finde, wenn das Faß eine zu beyden Seiten abgeschnittene Ellipsois ist, es mag nun IL ein Stück der kürzern oder längern Axe der Ellipse seyn, durch deren Umdrehung die Ellipsois erzeugt wird. Da aber die Fäßer gewöhnlich länger als dick sind, so ist auch gewöhnlich IL als ein Stück der längern Axe anzusehen.

§. 26.

Diese Figur der Fäßer kann immer angenommen werden, da die Krümmung der Faßdauben meistens weder groß noch merklich ungleichförmig ist. Wir wollen sie inzwischen noch mit einigen andern Voraussetzungen vergleichen. Es sey zu diesem Ende $AI = \beta$ und $GE - AI = b - \beta = c$, so ist

I. für die Ellipsois

$$z = 2\pi x\left(bb - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{1}{3}cc\right)$$

II. Wenn AED ein Circulbogen ist

$$z = 2\pi x\left(bb - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{1}{3}cc \;\left\{\begin{array}{l} - \dfrac{12.c^4}{3.5.7x^2} + \dfrac{12.c^6}{3.5.7.9.x^4} - \&c. \\ + \dfrac{4c^3b}{3.5.x^2} - \dfrac{4c^5b}{3.5.7.x^4} + \&c. \end{array}\right.\right)$$

III. Wenn AED ein parabolischer Bogen, und EH dessen Axe ist

$$z = 2\pi x\,(bb - \tfrac{2}{3}\,bc + \tfrac{1}{5}\,cc)$$

IV. Wenn man das Faß als zween abgestumpfte Kegel ansieht

$$z = 2\pi x\,(bb - cb + \tfrac{1}{3}cc) = \tfrac{2}{3}\pi x.\frac{b^3 - \beta^3}{b - \beta}$$

V. Wenn man das Faß als ein Mittel beyder Cylinder ansieht

$$z = 2\pi x\,(bb - cb + \tfrac{1}{2}\,cc)$$

Von diesen Ausmessungen sind die drey erstern um eine Kleinigkeit von einander verschieden. Beyde letztere gehen auch sehr wenig von einander, aber desto merklicher von den drey erstern ab, und sind daher auch beym Visiren der Fäßer nicht zu gebrauchen.

III.

Rectification elliptischer Bögen durch unendliche Reihen.

§. 1.

Die Analysten haben sich nach und nach daran gewöhnt, außer den von den Logarithmen und Circulbögen abhängenden Differentialformeln, auch diejenigen als eine besondere Classe von transcendenten Grössen anzusehen, die von der Rectification der Ellipse abhängen, weil sie nach allen Versuchen endlich geschlossen haben, daß man die Hofnung aufgeben müsse, elliptische Bögen durch algebraische Formeln, Logarithmen und Circulbögen, auszudrücken. Auf eben die Art sahe Jacob Bernoulli seine elastische Linie als eine vierte Art von transcendenten Größen an, und so laßen sich noch unzählige besondere Arten solcher Größen gedenken, von denen keine auf die andere reducirt werden kann. Man ist aber in Abzählung derselben, und in Ausfindung der Kennzeichen ihrer Unabhängigkeit noch nicht weit gekommen. Indessen lassen sich die Logarithmen und Circulbögen, als die einfachsten ansehen, und da man sie längst schon in Tabellen gebracht hat, so kann man auch jede Differentialformeln, die sich auf Tab. II.

Logarithmen und Circulbögen reduciren laßen, als aufgelöst und berechnet ansehen.

§. 2.

Mit den elliptischen Bögen aber hat es eine andere Bewandniß. Man hat für dieselben noch keine berechnete Tabellen, und die unendlichen Reihen, durch die man sie gewöhnlich ausdrückt, sind auch weder so geschmeidig noch so convergirend, als man sie, wenn man Gebrauch davon zu machen hat, wünschen könnte. Wenn man demnach schon weiß, daß eine fürgegebene Differentialformel, sich auf elliptische Bögen reduciren läßt, so hat man damit noch nicht viel gewonnen, so lange die Berechnung elliptischer Bögen nicht bequemer gemacht wird, als sie bisher ist. Ja es giebt Fälle, wo sich solche Formeln besser und leichter unmittelbar in unendliche Reihen auflösen lassen, und dann dient der Beweis, daß sie auf elliptische Bögen reducirt werden können, höchstens nur dazu, daß man sich die Mühe erspart, zu versuchen, ob solche Formeln nicht integrabel sind, oder ob sie wenigstens nicht durch Logarithmen und Circulbögen ausgedruckt werden können.

§. 3.

Man sieht hieraus, daß es sich der Mühe lohne, die Berechnung elliptischer Bögen so leicht und geschmeidig zu machen, als es nur immer möglich ist. Ich werde demnach, um den Unterschied des Erfolgs mehrerer Methoden anzuzeigen, die Sache von ihrem ersten Anfange her vortragen.

§. 4.

Es sey AB die längere Axe de. Ellipse ADB, die halbe kürzere Axe sey CD, der Brennpunct E, eine beliebige Abscißе CP, ihre Ordinate PM. Man setze Fig. 1.

$$CA = ED = a$$
$$CD = b$$
$$CE = e$$
$$CP = x \quad , \quad Pp = dx$$
$$PM = y \quad , \quad Mn = dy$$

der Winkel $Mmn = \omega$

der Bogen $DM = v$

so ist
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$
$$-dy = \frac{bx\,dx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$
$$dv = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$
$$= \frac{dx}{a}\cdot\sqrt{\left(\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}\right)}$$

Und da
$$a^2 - b^2 = e^2$$
ist, so ist
$$dv = \frac{dx}{a}\sqrt{\left(\frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}\right)}$$

§. 5.

Was man nun gleich nach der Erfindung des Integralcalculs hiebey that, ist, daß man die Wurzelgröße

$$\sqrt{\left(\frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}\right)}$$

in eine unendliche Reihe auflösete, und sodann jede Glieder dieser Reihe mit

$$\frac{dx}{a}$$

multiplicirt, besonders integrirte. Ich werde, um dieses ebenfalls vorzunehmen, Kürze halber

$$a = 1$$

und sodann

$$P = \sqrt{\left(\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}\right)}$$

setzen. Nun ist

$$\sqrt{(1-e^2x^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}e^2x^2 - \frac{1}{2.4}e^4x^4 - \frac{1.3}{2.4.6}e^6x^6 - \&c.$$

$$1:\sqrt{(1-xx)} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \&c.$$

Und diese beyde Reihen mit einander multiplicirt, geben

$$P = 1 - \tfrac{1}{2}e^2x^2 - \frac{1}{2.4}e^4x^4 - \frac{1.3}{2.4.6}e^6x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}e^8x^8 - \&c.$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2.2}e^2x^4 - \frac{1}{2.4.2}e^4x^6 - \frac{1.3.}{2.4.6.2}e^6x^8 - \&c.$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3}{2.2.4}e^2x^6 - \frac{1.3}{2.4.2.4}e^4x^8 - \&c.$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 - \frac{1.3.5}{2.2.4.6}e^2x^8 - \&c.$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 - \&c.$$

§. 6.

§. 6.

Bringt man nun die Brüche einer jeden Columne auf einerley Nenner, so findet sich

$$\begin{aligned}P = {} & 1 \\ & + (1-e^2)x^2 : 2 \\ & + (3 - 2e^2 - e^4)x^4 : 2.4 \\ & + (15 - 9e^2 - 3e^4 - 3e^6)x^6 : 2.4.6 \\ & + (105 - 60e^2 - 18e^4 - 12e^6 - 15e^8)x^8 : 2.4.6.8. \\ & + (945 - 525e^2 - 150e^4 - 90e^6 - 75e^8 - 105e^{10})x^{10} : 2.4.6.8.10 \\ & + \&c.\end{aligned}$$

§. 7.

Nun lassen sich alle diese Coefficienten erstlich durch

$$1 - ee = bb$$

theilen, und damit erhält man den einfacheren Ausdruck

$$\begin{aligned}P = {} & 1 \\ & + b^2y^2 : 2 \\ & + (3 + e^2)b^2x^4 : 2.4 \\ & + (15 + 6e^2 + 3e^4)b^2x^6 : 2.4.6. \\ & + (105 + 45e^2 + 27e^4 + 15e^6)b^2x^8 : 2.4.6.8 \\ & + (945 + 420e^2 + 270e^4 + 180e^6 + 105e^8)b^2x^{10} : 2.4.6.8.10 \\ & + \&c.\end{aligned}$$

§. 8.

Für diesen Ausdruck setze man ferner

C 4 P

$P = 1$
$+ \alpha . b^2x^2 : 2$
$+ \beta . b^2x^4 : 2.4$
$+ \gamma . b^2x^6 : 2.4.6$
$+ \delta . b^2x^8 : 2.4.6.8$
$+ \varepsilon . b^2x^{10} : 2.4.6.8.10$
$+$ &c.

so findet sich

$\alpha = 1$
$\beta = (3 + e^2) . \alpha$
$\gamma = (5 + 3e^2) . \beta - 8.1. \alpha . e^2$
$\delta = (7 + 5e^2) . \gamma - 8.3. \beta . e^2$
$\varepsilon = (9 + 7e^2) . \delta - 8.6. \gamma . e^2$
$\zeta = (11 + 9e^2) . \varepsilon - 8.10. \delta . e^2$
$\eta = (13 + 11e^2) . \zeta - 8.15. \varepsilon . e^2$
$\vartheta = (15 + 13e^2) . \eta - 8.21. \zeta . e^2$
&c.

Da hier die Reihen nach den ungeraden Zahlen, und den Trigonalzahlen achtfach genommen fortgehen, so sieht man, daß, wenn e in Zahlen gegeben ist, die Werthe von α, β, γ, δ, ε &c. sehr leicht können gefunden werden.

§. 9.

Nun ist

$$dv = P . dx$$

demnach

$$dv = dx\left(1 + \frac{\alpha\, b^2x^2}{2} + \frac{\beta . b^2x^4}{2.4} + \frac{\gamma . b^2x^6}{2.4.6} + \&c.\right)$$

welches

$$v = x + \frac{\alpha\, b^2x^3}{2.3} + \frac{\beta . b^2x^5}{2.4.5.} + \frac{\gamma . b^2 . x^7}{2.4.6.7} + \&c.$$

giebt.

§. 10.

Ungeachtet nun das Gesetz des Fortganges dieser Reihe gefunden ist, und die Reihe selbst in Zahlen jedesmal sehr leicht kann berechnet werden, so convergiren die Coefficienten dennoch sehr langsam, und dieses macht ihren Gebrauch beschwerlich. Wir werden uns demnach nach andern Methoden umzusehen haben. Die erste, so sich am natürlichsten darbeut, und womit man ebenfalls nicht sehr weit reicht, ist folgende.

§. 11.

Man setze in der Formel

$$dv = dx \sqrt{\left(\frac{1 - e^2x^2}{1 - x^2}\right)}$$

sey

$$x = \sin . \varphi$$

so stellt φ in der That den Circulbogen vor, welcher mit dem elliptischen Bogen DM gleiche Abscisse PC $= x$ und gleichen Halbmesser CB $= 1$ hat. Da nun

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$$

 so

so haben wir

$$dv = d\phi \sqrt{(1 - e^2 \sin.\phi^2)}$$

Wird dieser Ausdruck in eine Reihe aufgelöst, so findet man

$$dv =$$

$$d\phi\left(1 - \tfrac{1}{2}e^2 \text{ſ}\phi^2 - \frac{1}{2.4}e^4 \text{ſ}\phi^4 - \frac{1.3.}{2.4.6}.e^6 \text{ſ}\phi^6 - \&c.\right.$$

Nun lassen sich die geraden Dignitäten der Sinus eines Winkels durch die Cosinus des doppelten, 4, 6, 8 ꝛc. fachen Winkels ausdrücken. Und damit haben wir

$$dv =$$

$$d\phi\left(1 - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}e^2 \quad - \frac{1}{2.4.}.\tfrac{3}{8}e^4 \quad - \right.$$

$$+ \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}e^2 \cos.2\phi + \frac{1}{2.4.}.\tfrac{4}{8}e^4 \cos.2\phi +$$

$$- \frac{1}{2.4.}.\tfrac{1}{8}e^4 \cos.4\phi -$$

$$+$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1.3}{2.4.6}.\frac{10}{32}e^6 - \&c. \\
\frac{1.3}{2.4.6}.\frac{15}{32}e^6 \cos.2\phi + \&c. \\
\frac{1.3}{2.4.6}.\frac{6}{32}e^6 \cos.4\phi - \&c. \\
\frac{1.3}{2.4.6}.\frac{1}{32}e^6 \cos.6\phi + \&c.
\end{array}\right]$$

Und

Und da überhaupt $d\psi.\cos.\psi = \sin.\psi$ ist, so ergiebt sich hieraus

$$v = \phi\left(1 - \frac{1}{2.2}e^2 - \frac{1.3}{2.4.8}e^4 - \frac{1.3.\ 10}{2.4.6.32}e^6 - \&c.\right)$$

$$+ \text{ſ}2\phi\left(\frac{1}{2.4}e^2 + \frac{1.\ 4}{2.4.16}e^4 + \frac{1.3.\ 15}{2.4.6.64}e^6 + \&c.\right)$$

$$- \text{ſ}4\phi\left(\frac{1.\ 1}{2.4.32}e^4 + \frac{1.3.\ 6}{2.4.6.128}e^6 + \&c.\right)$$

$$+ \text{ſ}6\phi\left(\frac{1.3}{2.4.6.192}e^6 + \&c.\right)$$

$$+ \&c.)$$

oder

oder nach behöriger Reduction der Coefficienten

$$v = \phi\left(1 - \tfrac{1}{4}e^2 - \frac{1.\ 3}{4.16}e^4 - \frac{1.\ 9.\ 5}{4.16.36}e^6 - \frac{1.9.25.7}{4.16.36.64}e^8 - \&c.\right)$$

$$+ \frac{\int 2\phi}{4}\left(-\frac{1}{1.2.}e^2 + \frac{1.3}{2.3.4}e^4 + \frac{1.9.5}{3.4.4.16}e^6 + \frac{1.9.25.7}{4.5.4.16.36}e^8 + \&c.\right)$$

$$- \frac{\int 4\phi}{32}\left(\frac{1.\ 3}{1.2.3.4}e^4 + \frac{1.9.5}{2.3.4.5.4}e^6 + \frac{1.9.25.\ 7}{3.4.5.6.4.16}e^8 + \frac{1.9.25.49.\ 9}{4.5.6.7.4.16.36}e^8 + \&c.\right)$$

$$+ \frac{\int 6\phi}{192}\left(\frac{1.\ 9.\ 5}{1.2.3.4.5.6}e^6 + \frac{1.9.\ 25.\ 7}{2.3.4.5.6.7.4}e^8 + \frac{1.9.25.49.\ 9}{3.4.\ 5.\ 6.7.8.4.16}e^{10} + \&c.\right)$$

$$- \frac{\int 8\ \phi}{1024}\left(\frac{1.\ 9.\ 25.\ 7}{1.2.3.\ 4.\ 5.6.7.8}e^8 + \frac{1.9.25.\ 49.\ 9}{2.3.4.5.6.7.8.9}e^{10} + \&c.\right)$$

$$+ \&c.$$

§. 12.

§. 12.

In Ansehung dieser Reihe können wir nun verschiedenes anmerken. Man sieht erstlich überhaupt, daß sie noch ziemlich geschwinde convergirt, wenn die Eccentricität e merklich kleiner als 1 ist. Sodann giebt sie für jede Abscisse x in der That unendlich viele Werthe. Denn da wir hiebey

$$x = \sin.\ \phi$$

gesetzt haben, so entspricht diesem Sinus nicht blos der Bogen ϕ sondern auch der Bogen $180^\circ - \phi$, und damit überhaupt die Bögen $360^\circ.n + \phi$ und $360^\circ.n + 180^\circ - \phi$, deren Zahl unendlich ist. Alle diese Werthe lassen sich in der gefundenen Reihe für ϕ setzen. Endlich wenn man $\phi = 90^\circ$ setzt, so wird

$$\int 2\phi = \int.4\phi = \int 6\phi\ \&c. = 0$$

und

$$\phi = \tfrac{1}{2}\pi$$

wenn man nemlich $\pi = 3,1415926\ldots$ setzt. Damit wird der Quadrant der Ellipse schlechthin nur

$$V = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \tfrac{1}{4}e^2 - \frac{1.3}{4.16}e^4 - \frac{1.9.\ 5}{4.16.36}e^6 - \&c.\right)$$

Und damit zeigt diese mit $\frac{1}{2}\pi$ multiplicirte Reihe das Verhältniß des Umkreises der Ellipse zum Umkreise des auf AB zu beschreibenden Circuls an. Da nun, wenn e = 1 wird, die Ellipse

sich

sich in die gerade Linie AB verwandelt, so ist alsdann $V = 1$, demnach

$$1 = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \tfrac{1}{4} - \frac{1.3}{4.16} - \frac{1.9.5}{4.6.36} - \frac{1.9.25.7}{4.6.36.64} - \&c.\right)$$

Und so verhält sich die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{4} - \frac{1.3}{4.16} - \frac{1.9.5}{4.16.36} - \&c.$$

zur Einheit, wie der Halbmesser zum Quadrant des Circuls.

§. 13.

Wir wollen aber noch andere Reihen für die Rectification der Ellipse aufsuchen, und zu diesem Ende die Formel (§. 11.)

$$dv = d\varphi . \sqrt{(1 - e^2 \sin. \varphi^2)}$$

nochmals vornehmen, um für φ und e andere Werthe zu setzen. Es ist nemlich

$$\sin. \varphi^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos. 2\varphi$$

Und demnach

$$dv = d\varphi . \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{2}e^2 . \cos. 2\varphi)}$$

Man setze nun $\tfrac{1}{2}e^2 = \sin. \lambda^2$

so ist $1 - \tfrac{1}{2}e^2 = \cos. \lambda^2$

demnach

$$dv = d\varphi . \sqrt{(\cos. \lambda^2 + \sin. \lambda^2 . \cos. 2\varphi)}$$

oder

$$\frac{2dv}{\cos. \lambda} = 2d\varphi . \sqrt{(1 + \mathrm{tang}. \lambda^2 . \cos. 2\varphi)}$$

Hier

Hier ist nun λ so beschaffen, daß wenn $e = 1$ ist, auch $\mathrm{tang}. \lambda = 1$ wird, und daß hingegen, wenn $e < 1$ ist, $\mathrm{tang}. \lambda$ noch viel kleiner wird. Man setze z. E. $e = \tfrac{1}{2}$, so ist hie $\lambda^2 = \tfrac{1}{8}$, $\cos. \lambda^2 = \tfrac{7}{8}$, $\mathrm{tang}. \lambda^2 = \tfrac{1}{7}$. Und wenn $e = \tfrac{1}{10}$, so wird $\mathrm{tang}. \lambda^2 = \tfrac{1}{199}$. &c. Nun giebt die letzte Formel die Reihe

$$\frac{2dv}{\cos. \lambda} = 2d\varphi\left(1 + \tfrac{1}{2}t\lambda^2 . \cos. 2\varphi\right.$$

$$- \frac{1.}{2.4}t\lambda^4 . \cos. 2\varphi^2 + \frac{1.3}{2.4.6}t\lambda^6 . \cos. 2\varphi^3$$

$$\left. - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}t\lambda^8 . \cos. 2\varphi^4 + \&c.\right)$$

Und damit erhält man

$$\frac{2dv}{\cos. \lambda} = 2d\varphi\left(1 + \tfrac{1}{2}t\lambda^2 . \cos. 2\varphi\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} - \dfrac{1}{2.4}t\lambda^4 . \cos. 4\varphi & + \dfrac{1.3.}{2.4.6}t\lambda^6 . \cos. 6\varphi \\ - \dfrac{1}{2.4.2}t\lambda^4 . & + \dfrac{1.3.3}{2.4.6.4}t\lambda^6 . \cos. 2\varphi \end{array}\right\}$$

wel-

welches nach allen Reductionen

$$\frac{v}{\text{col.}\,\lambda} = \phi\left(1 - \frac{1}{4.4}t\lambda^4 - \frac{3.5}{4.4.8.8}t\lambda^8 - \frac{3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12}t\lambda^{12} - \&c.\right)$$

$$+\,\text{ſ}\,2\phi\left(\tfrac{1}{4}t\lambda^2 + \frac{1.3}{4.4.8}t\lambda^6 + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.8.12}t\lambda^{10} + \&c.\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}\,\text{ſ}\,4\phi\left(\frac{1}{4.8}t\lambda^4 + \frac{3.5}{4.4.8.12}t\lambda^8 + \frac{3.5.7.9}{4.4.8.8.12.16}t\lambda^{12} + \&c.\right)$$

$$+\tfrac{1}{3}\,\text{ſ}\,6\phi\left(\frac{1.3}{4.8.12}t\lambda^6 + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.12.16}t\lambda^{10} + \frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.16.20}t\lambda^{14} + \&c.\right)$$

$$-\tfrac{1}{4}\,\text{ſ}\,8\phi\left(\frac{1.3.5}{4.8.12.16}t\lambda^8 + \frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.12.16.20}t\lambda^{12} + \&c.\right)$$

$$+\ \&c.$$

giebt.

giebt. Ueber diese Reihe lassen sich, wie über die vorhergehende (§. 11.) ganz ähnliche Anmerkungen machen. Sie giebt für jede Abscisse $x = \text{sin.}\,\phi$ unendlich viele Werthe von v, und wenn $x = \text{sin.}\,\phi = 1$ wird, so bleibt für den ganzen Quadranten der Ellipse die ganz einfache Reihe

$$v = \tfrac{1}{2}\pi.\,\text{cos.}\,\lambda\left(1 - \frac{1}{4.4}t\lambda^4 - \frac{3.5}{4.4.8.8}t\lambda^8 - \&c.\right)$$

§. 14.

Es geschieht übrigens nicht immer, daß man den Bogen MD = v, durch die Abscisse CP = x = sin. ϕ finden will, und besonders kam bey Bestimmung der Figur der Erde und der Länge eines jeden Grades des Mittagskreises die Frage vor, daß man jeden Bogen DM = v unmittelbar durch den Winkel Mmn = ω bestimmen sollte, weil, wenn DC die halbe Axe der Erde vorstellt, der Winkel Mmn = ω dem Abstande eines jeden Ortes vom Pol, demnach der Aequatorshöhe oder dem Zusatze der Polhöhe zu 90 Graden gleich ist. Nun ist vermöge der Natur der Ellipse

$$\text{tang.}\,\omega = b.\,\text{tang.}\,\phi$$

demnach

$$x = \text{sin.}\,\phi = \frac{\text{tang.}\,\omega}{\sqrt{(bb + \text{tang.}\,\omega^2)}}$$

Und so kann für jede Aequatorshöhe ω die Abscisse x = sin. ϕ leicht gefunden, und die Länge des Bogens DM = v berechnet werden. Wir wollen aber sehen, wie sich v unmittelbar durch ω finden läßt.

§. 15.

Hier haben wir nun

$$y = b\sqrt{(1 - xx)}$$

$$-dy = bx\,dx : \sqrt{(1 - xx)}$$

$$\text{tang.}\,\omega^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{b^2x^2}{1 - xx}$$

$$x = \frac{\text{ſin.}\,\omega}{\sqrt{(1 - e^2\,\text{coſ.}\,\omega^2)}}$$

$$dx = \frac{(1 - e^2).\,d\,\text{ſin.}\,\omega}{(1 - e^2.\,\text{coſ.}\,\omega^2)^{3:2}}$$

$$dv = dx.\,\text{ſec.}\,\omega = \frac{bb.\,d\omega}{(1 - e^2\,\text{coſ.}\,\omega^2)^{3:2}}$$

oder

$$dv = \frac{bb.\,d\omega}{(1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}e^2.\,\text{coſ.}\,2\omega)^{3:2}}$$

welches, wenn

$$\tfrac{1}{2}e^2 = \text{ſin.}\,\lambda^2$$

gesetzt wird,

$$dv = \frac{bb}{\text{coſ.}\lambda^3} \cdot \frac{d\omega}{(1 - \text{tang.}\,\lambda^2.\,\text{coſ.}\,2\omega)^{3:2}}$$

und damit die Reihe

$$\frac{2\,\text{coſ}\,\lambda^3}{bb}.\,dv = 2d\omega\left(1 + \tfrac{3}{2}\,t\lambda^2.\,\text{coſ.}2\omega + \frac{3.5}{2.4}\,t\lambda^4.\,\text{coſ.}2\omega^2 + \&c.\right)$$

giebt,

giebt, welche nach behörigen Reductionen sich in

$$\frac{v}{\text{coſ.}\lambda} = \omega\Big(1 - \frac{1}{4.4}\,\text{tang.}\,\lambda^4 - \frac{1.3.5}{4.4.8.8}\,t\lambda^8 - \frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12}\,t\lambda^{12} - \&c.\Big)$$

$$+ \text{ſ}\,2\omega\Big(\frac{1.3}{4}\,t\lambda^2 + \frac{1.3.3}{4.4.8}\,t\lambda^6 + \frac{1.3.5.7.3}{4.4.8.8.12}\,t\lambda^{10} + \&c.\Big)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\text{ſ}\,4\omega\Big(\frac{3.5}{4.8}\,t\lambda^4 + \frac{3.5.3.5}{4.4.8.12}\,t\lambda^8 + \frac{3.5.7.9.3.5}{4.4.8.8.12.16.20}\,t\lambda^{12} + \&c.\Big)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\text{ſ}\,6\omega\Big(\frac{3.5.7}{4.8.12}\,t\lambda^6 + \frac{3.5.7.9.5.7}{4.4.8.12.16}\,t\lambda^{10} + \frac{3.5.7.9.11.13.5.7}{4.4.8.8.12.16.20}\,t\lambda^{14} + \&c.\Big)$$

$$+ \tfrac{1}{4}\text{ſ}\,8\omega\Big(\frac{3.5.7.9}{4.8.12.16}\,t\lambda^8 + \frac{3.5.7.9.11.13.7.9}{4.4.8.12.16.20}\,t\lambda^{12} + \&c.\Big)$$

$$+ \tfrac{1}{5}\text{ſ}\,10\omega\Big(\frac{3.5.7.9.11}{4.8.12.16.20}\,t\lambda^{10} + \&c.\Big)$$

$$+ \&c.)$$

ver-

verwandelt. Auch diese Reihe giebt für jeden sin. ω unendlich viele Werthe von v, und für den ganzen Quadranten wird schlechthin

$$V = \tfrac{1}{2}\pi . \text{cos}.\lambda \left(1 - \frac{1}{4.4} . t\lambda^4 - \frac{1.3.5}{4.4.8.8} t\lambda^8 - \&c.\right)$$

§. 16.

Um hievon eine Anwendung auf die Mittagskreise der Erde zu machen, so werden wir uns am wenigsten irren, wenn wir mit Newton

$$AC : CD = 230 : 229$$

setzen. Denn das Mittel aus allen Ausmessungen stimmt mit dieser Verhältniß ganz ordentlich überein, und dieses Mittel ist vielfach zuverläßiger, als was man aus einzelnen Ausmessungen geschlossen. Es ist demnach

$$AC = DE = 1$$
$$CD = \tfrac{229}{230} = 0{,}9956523 = b$$
$$CD^2 = \tfrac{52441}{52900} = 0{,}99132325 = b^2$$
$$CE^2 = \tfrac{459}{52900} = 0{,}00867675 = e^2$$
$$CE = 0{,}0931490 = e$$
$$\tfrac{1}{2}e^2 = \tfrac{459}{105800} = \text{sin}.\lambda^2 = 0{,}00433837$$
$$1 - \tfrac{1}{2}e^2 = \tfrac{105341}{105800} = \text{cos}.\lambda^2 = 0{,}99566163$$
$$\text{tang}.\lambda^2 = \tfrac{459}{105341} = 0{,}00435728$$
$$\text{tang}.\lambda^4 \text{ - - - - } = 0{,}00001899$$
$$\text{tang}.\lambda^6 \text{ - - - - } = 0{,}00000008$$
$$\text{cos}.\lambda \text{ - - - - } = 0{,}9983002.$$

Dem-

Demnach, wenn man diese Werthe in der Formel des §. 15 setzt,

$$\frac{v}{0{,}9983002} = 0{,}9999881.\omega$$
$$+ 0{,}00326796.\ \text{sin}.\ 2\omega$$
$$+ 0{,}00000445.\ \text{sin}.\ 4\omega$$
$$+ 0{,}00000001.\ \text{sin}.\ 6\omega$$

oder

$$v = 0{,}9982991.\omega$$
$$+ 0{,}0032624.\ \text{sin}.\ 2\omega$$
$$+ 0{,}0000044.\ \text{sin}.\ 4\omega$$

Dieses ist demnach der Ausdruck für die Länge eines jeden Bogens DM vom Pol an gerechnet in Decimaltheilen des Halbmessers des Aequators AC. Wollen wir uns auch hier an das Mittel aus allen Ausmessungen halten, so werden wir AC = 3277123 französische sechsfüßige Klafter setzen können. Mit dieser Zahl werden demnach vorstehende Decimalzahlen multiplicirt, und so haben wir die Länge eines jeden Bogens in Klaftern

$$v = 3271549.\omega$$
$$+ \quad 10691.\ \text{sin}.\ 2\omega$$
$$+ \quad 14.\ \text{sin}.\ 4\omega$$

Hier ist nun der erste Coefficient der Halbmesser eines Circuls, dessen Umkreis dem Mittagskreise der Erde gleich ist, und beym Nachrechnen findet sich, daß ein Grad dieses Circuls eine Länge von 57099 Klaftern hat. Die beyden andern Glieder zeigen an, wie die Grade des Mittags-

 kreises

Zum §. 16. der elliptischen Bögen.

Elev. Aeq.	Distantia a polo	Longit. grad.	Elev. Poli.	Elev. Aeq.	Distantia a polo.	Longit. grad.	Elev. Poli.	Elev. Aeq.	Distantia a polo.	Longit. grad.	Elev. Poli.
0	0	——	90	30	1722250	——	60	60	3435205	——	30
1	57473	57473	89	31	1779530	57280	59	61	3492111	56906	29
2	114946	57473	88	32	1836798	57268	58	62	3549007	56896	28
3	172418	57472	87	33	1894055	57257	57	63	3605892	56885	27
4	229889	57471	86	34	1951299	57244	56	64	3662766	56874	26
5	287358	57469	85	35	2008531	57232	55	65	3719630	56864	25
6	344824	57466	84	36	2065751	57220	54	66	3776485	56855	24
7	402288	57464	83	37	2122959	57208	53	67	3833329	56844	23
8	459749	57461	82	38	2180154	57195	52	68	3890165	56836	22
9	517206	57457	81	39	2237336	57182	51	69	3946991	56826	21
10	574659	57453	80	40	2294506	57170	50	70	4003809	56818	20
11	632107	57448	79	41	2351662	57156	49	71	4060619	56810	19
12	689551	57444	78	42	2408806	57144	48	72	4117420	56811	18
13	746989	57438	77	43	2465937	57131	47	73	4174214	56794	17
14	804421	57432	76	44	2523055	57118	46	74	4231001	56787	16
15	861847	57426	75	45	2580160	57105	45	75	4287781	56780	15
16	919267	57420	74	46	2637251	57091	44	76	4344554	56773	14
17	976680	57413	73	47	2694330	57079	43	77	4401321	56767	13
18	1034085	57405	72	48	2751396	57066	42	78	4458083	56762	12
19	1091483	57398	71	49	2808449	57053	41	79	4514840	56757	11
20	1148872	57389	70	50	2865489	57040	40	80	4571592	56752	10
21	1206253	57381	69	51	2922516	57027	39	81	4628339	56747	9
22	1263626	57373	68	52	2979531	57015	38	82	4685082	56743	8
23	1320989	57363	67	53	3036533	57002	37	83	4741822	56740	7
24	1378343	57354	66	54	3093522	56989	36	84	4798558	56736	6
25	1435687	57344	65	55	3150499	56977	35	85	4855292	56734	5
26	1493021	57334	64	56	3207464	56965	34	86	4912024	56732	4
27	1550344	57323	63	57	3264417	56953	33	87	4968754	56730	3
28	1607657	57313	62	58	3321358	56941	32	88	5025482	56728	2
29	1664959	57302	61	59	3378287	56929	31	89	5082210	56728	1
30	1722250	57291	60	60	3435205	56918	30	90	5138937	56727	0

kreises ungleich werden. Man sieht auch leicht, daß, wenn man die Bögen v für jede Grade berechnen will, man das zweyte Glied nur bis auf $\omega = 45^\circ$ und das dritte nur bis auf $22\frac{1}{2}^\circ$ zu berechnen hat, um die Werthe auch für mehrere Grade zu haben. Ich habe hiezu den Abacus Sinuum, so sich in meinen Tabellen befindet, gebraucht, und damit beyliegende Tafel berechnet, welche in der ersten Columne die Grade der Aequatorshöhe, in der zweyten die Länge der Bögen v = DM, in der dritten die Länge jeder Grade, und in der vierten die Polhöhen enthält. Die Verhältniß des ersten Grades zum letzten ist sehr genau wie 77 zu 76, oder wenn man diese Zahlen dreyfach nimmt, wie 231 zu 228, und eben so genau findet sich

$$\sqrt[3]{231} : \sqrt[3]{228} = 230 : 229$$

die Verhältniß des Diameters des Aequators zur Axe. Ein Grad auf dem Aequator hat 57197 Klafter, und ist demnach mit dem 52ten Grad der Breite von gleicher Größe.

§. 17.

Um aber wiederum zur Rectification der Ellipse zurück zu kehren, so finden wir ebenfalls die Formel

$$dv = \frac{dy}{b}\sqrt{\left(\frac{b^4 + e^2y^2}{b^2 - y^2}\right)}$$

Man setze hier

$$b = 1$$
$$y = \sin.\psi$$
$$\tfrac{1}{2}e^2 = \text{tang.}\,x^2$$

so

so ist

$$dv = d\psi\sqrt{(1 + \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}e^2\cos.2\psi)}$$
$$= d\psi\sqrt{(\text{sec.}\,x^2 - \text{tang.}\,x^2.\cos.2\psi)}$$

demnach

$$dv.\cos.x = d\psi.\sqrt{(1 - \sin.x^2.\cos.2\psi)}$$

welches nach allen Reductionen

$v.\cos.x =$

$$\psi\left(1 - \frac{1}{4.4}\text{ſ}.x^4 - \frac{3.5}{4.4.8.8}\text{ſ}.x^8 - \frac{3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12}\text{ſ}.x^{12} - \&c.\right)$$

$$-\text{ſ}.2\psi\left(\tfrac{1}{4}\text{ſ}.x^2 + \frac{1.3}{4.4.8}\text{ſ}.x^6 + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.8.12}\text{ſ}.x^{10} + \&c.\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}\text{ſ}4\psi\left(\frac{1}{4.8}\text{ſ}.x^4 + \frac{1.3}{4.4.8.12}\text{ſ}.x^8 + \frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12.16}\text{ſ}.x^{12} + \&c.\right)$$

$$-\tfrac{1}{3}\text{ſ}.6\psi\left(\frac{1.3}{4.8.12}\text{ſ}.x^6 + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.12.16}\text{ſ}.x^{10} + \&c.\right)$$

$$-\tfrac{1}{4}\text{ſ}.8\psi\left(\frac{1.3.5}{4.8.12.16}\text{ſ}.x^8 + \frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.12.16.20}\text{ſ}.x^{12} + \&c.\right)$$

$$-\tfrac{1}{5}\text{ſ}.10\psi\left(\frac{1.3.5.7}{4.8.12.16.20}\text{ſ}.x^{10} + \&c.\right)$$

$- \&c.$

giebt. Diese Formel hat mit der vom §. 13. einerley Coefficienten. Sie ist aber in Absicht auf die Werthe von e etwas stärker convergirend, weil, wenn $e = 1$, $\sin.x = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ ist.

IV.

IV.

Verwandlung der Figuren in gleichgrosse Rectangel.

§. 1.

Tab. III. Obwol man bey der Quadratur jeder Räume eigentlich versteht, daß man ein Quadrat von gleicher Größe finde, so sieht man doch leicht, daß man sich auch mit Rectangeln würde begnügen können, wenn sich allgemeine Methoden dazu finden liessen. Denn wenn man sodann dennoch Quadrate haben will, so hat die Verwandlung eines Rectangels in ein Quadrat keine Schwierigkeit. Nun weiß man ebenfalls, daß, wo nur von geradlinichten Figuren die Rede ist, diese sich auf vielerley Arten in andere geradlinichte Figuren, und damit auch in Triangel, Rectangel, Quadrate verwandlen lassen, und so kömmt die ganze Sache darauf an, daß die Methode dabey zu verfahren leichte sey. Hingegen bey Räumen, so durch krumme Linien eingeschlossen werden, hat es deswegen mehrere Schwierigkeit, weil die allgemeine Quadratur derselben nicht gefunden, noch schwerlich zu hoffen ist. Indessen geht immer so viel an, daß sich eine krumme Linie auf sehr vielerley Arten, in andere von gleichem Inhalte verwandeln läßt. Und da ist dann nur die Frage, die Sache so zu leiten, daß die Quadratur dadurch möglich gemacht, oder wenigstens erleichtert werde, es sey, daß man durch jede Verwandlung der wahren Quadratur näher komme, oder daß, wenn man sich mit Constructionen begnügt, die Quadratur auf eine sogenannte mechanische Art erhalten werden könne. Ich werde nun, was ich hierüber gefunden, der Ordnung nach vortragen.

§. 2.

Zu diesem Ende kehre ich wiederum zu dem §. 73. der IX. Abhandlung im 2ten Theil der Beyträge zurück, weil daselbst bereits die Verwandlung einer jeden mit der Axe VR schief laufenden Linie HO in eine solche hBo vorkommt, welche die mittlere Ordinate AB als eine Axe rechtwinklicht durchschneidet, zu beyden Seiten ähnlich ist, und für gleich entfernte Ordinaten Vh, Ro gleichgrosse Räume giebt. Man sieht leicht, daß dadurch die Quadratur des ganzen Raumes VHORV = VhoRV auf die Quadratur des halben Raumes VhBA reducirt wird, welchen man sodann nur verdoppeln darf. Nun sind die Ordinaten Vh, AB viel weniger unter sich verschieden, als es VH, RO waren. Denn es ist

$$Vh = AC = \tfrac{1}{2}(RO + VH) = Ro.$$

Demnach

$$\frac{RO - VH}{2} = oO.$$

Es ist aber

$$CB < oO$$

folglich

$$CB < \frac{RO - VH}{2}$$

Und so wird durch die Verwandlung der Linie HBO in die gleichräumigte hBo die Differenz der Ordinaten über die Helfte vermindert. Da nun hB ebenfalls schief läuft, so kann man damit ebenfalls eine solche Verwandlung vornehmen, und eine dritte krumme Linie erhalten, deren Ordinaten wiederum über die Helfte weniger von einander verschieden sind, als AB von Vh, demnach über ein Viertel weniger als RO von VH.

§. 3.

Fig. 1. Auf diese Art wird man demnach, wenn z. E. die krumme Linie AFB zu quadriren ist, dieselbe erstlich in EIF, sodann in HMI, ferner in KPM, sodann in OQP &c. verwandeln, und die Räume

AFBCA
2 AEIFbA
4 AHMIcA
8 AKPMdA
16 AOQPeA
&c.

werden von gleicher Größe seyn. Sollte man auf diese Art unendlich fortfahren, so würden nicht nur die Linien unendlich klein werden, sondern auf der Linie AO in einen Punct bey O zusammentreffen, und dieser Punct würde die Höhe des auf AC zu construirenden Rectangels geben, welches dem Raume AFBC gleich ist. Da man aber nicht bis ins unendlich kleine wirklich construiren kann, so confundiren sich die krummen Linien bey dem Gebrauche des Circuls und Lineals viel geschwinder in einen physischen Punct. Man kann es aber fast immer, und besonders, wenn die Figur nicht groß ist, bey der vierten oder fünften Verwandlung bewenden lassen. Denn wenn man mit in Betrachtung zieht, daß die Puncte C, D, G, L, N &c. so wie auch die Puncte B, F, I, M, P, Q &c. in einer krummen Linie liegen, welche in vorbemeldtem Punct auf AO bey O zusammentreffen, und AO als ihre gemeinschaftliche Axe rechtwinklicht durchschneiden, so kann man auch dadurch bemeldten Punct so genau treffen, als es mit Circul und Lineal geschehen kann. Man sieht ferner aus vorhin erwiesenem, daß da

$ED = \frac{1}{2} AC$, hingegen	$DF < \frac{1}{2} CB$
$HG = \frac{1}{2} ED$	$GI < \frac{1}{2} DF$
$KL = \frac{1}{2} HG$	$LM < \frac{1}{2} GI$
$ON = \frac{1}{2} KL$	$NP < \frac{1}{2} LM$
&c.	&c.

ist, die krummen Linien immer länglichter werden. Und eben dieses macht, daß die durch CDGLN &c. und BFIMPQ &c. zu ziehenden krummen Linien bey O einen Krümmungskreis haben, dessen Halbmesser > 0 ist. Da ferner erstere dieser krummen Linien sich von C immer

immer aufwärts, letztere von B immer unterwärts zieht, und schon BC, FD, IG, ML, PN &c. stärker als in der Verhältniß = 2 : 1 abnehmen, so ist klar, daß OA, OE, OK &c. noch viel geschwinder kleiner werden. Daß sich aber die Verhältniß, in welcher es geschieht, der Verhältniß = 4 : 1 nähere, folgt daraus, daß die durch C, D, G, L, N zu ziehende krumme Linie die Axe AO bey O senkrecht schneidet, und der Halbmesser ihres Krümmungskreises bey O eine endliche Größe hat.

§. 4.

Fig. 2. Das andere Mittel Figuren in Rectangel von gleicher Größe zu verwandeln, werde ich anfangs bey geradlinichten Figuren zeigen. Es stehe demnach auf der Linie AO die Figur ABCDE. Aus jeder Ecke lasse man Perpendiculären Bb, Cc, Dd, Ee, auf AO fallen, und ebenfalls auch aus der Mitte jeder Seite pP, mM, nN, oO. Soll nun der Raum ABCDEeA in ein Rectangel verwandelt werden, dessen Grundlinie Ae sey, so trage man Ae aus A, b, c, d, e in α, β, γ, δ, A, und ziehe βB, γC, δD, AE zusammen. Ferner ziehe man der Ordnung nach

FQ mit βB,
QK mit γC
KS mit δD
ST mit AE

paral-

parallel, und es wird eT die Höhe des gesuchten Rectangels AeTVA seyn. Und zugleich auch werden die Räume

ABCDdA	den Rectangeln	Ae . dr
ABCcA	- - - -	Ae . cq
ABbA	- - - -	Ae . πb

gleich seyn.

§. 5.

Um dieses zu beweisen, so vollende man das Parallelogramm γCHδ, man verlängere qR in h, und ziehe qK mit AO parallel, so sind erstlich δHd, qhK ähnliche Triangel, demnach

$$\delta d : dH = qK : Kh.$$

folglich

$$\delta d . Kh = dH . qK$$

Es ist aber

$$\delta d = Ae$$

gemacht worden, und $qK = cd$

demnach $Ae . Kh = dH . cd$

Daher ist das Rectangel $c\delta Hd = dH . cd$ einem Rectangel gleich, dessen Grundlinie = Ae, die Höhe aber = Kh ist. Ferner aber sind auch die Triangel δDH, Rrh ähnlich. Demnach ist $\delta H : DH = Rh : rh$

Nun aber ist $\delta H : d\delta = Rh : SK$

demnach $DH : rh = d\delta : SK$

Es ist aber $SK = \frac{1}{2} cd$

demnach $DH : rh = d\delta : \frac{1}{2} cd$

folglich $\frac{1}{2} cd . DH = rh . d\delta$

oder weil, $d\delta = Ae$ ist

$$\frac{1}{2} cd . DH = rh . Ae$$

Nun

Nun ist $\frac{1}{2}$cd. DH = $\frac{1}{2}$CH.DH dem Inhalt des Triangels CDHC gleich. Demnach auch das Rectangel rh.Ae. Da nun vermöge des erwiesenen

$$CDHC = Ae \cdot rh$$
$$eCHd = Ae \cdot hK$$

so ist das Trapez

$$cCDdc = Ae.(rh + hK) = Ae.rK$$

Es ist aber rK die Differenz der Ordinaten cq, dh, so wie das Trapez cCDdc die Differenz von ABCcA und ABCDdA ist. Demnach wird man auf eben die Art die Räume

$$ABbA = Ae.b\pi$$
$$bBCcb = Ae.(cq - b\pi)$$
$$cCDdc = Ae.(dh - cq)$$
$$dDEed = Ae.(eT - dh)$$
$$\&c.$$

haben, welche man nach Belieben addiren kann.

§. 6.

Die Linie AQRST ist gewissermassen eine Quadratrix von der Figur ABCDE, und sie wird es im engsten Verstande, wenn man die Seiten AP, Pπ, πQ, Qq, qR, Rr, rS, ST, &c. als Tangenten von parabolischen Bögen ansieht, welche von A in π, von π in q, von q in r, von r in T &c. gehen, und die Tangenten in den Puncten A, π, q, r, T &c. berühren. Man sieht übrigens aus dem Beweise, daß die Grundlinie des Rectangels Ae nach Belieben angenommen werden kann.

§. 7.

§. 7.

Ist nun ABCDE eine krumme Linie, so ist AQRST ebenfalls eine, und es ist klar, daß die Trapezia, dergleichen cCDd ist, unendlich schmal müßten genommen werden, wenn man nach dieser Art zu verfahren die Linie AQRST mit geometrischer Schärfe ziehen wollte. Man setze

$$AE = a$$

$$Ac = x \qquad cd = dx$$
$$cC = y \qquad DH = dy$$
$$cq = \eta \qquad rK = d\eta$$

so hat man

$$\int ad\eta = \int ydx$$
$$ad\eta = ydx$$
$$a : y = dx : d\eta.$$

Hiebey ist demnach der Beweis kürzer, weil man bey ydx den Triangel $\frac{1}{2}$ddy.dx weglassen kann. Man sieht auch aus der letzten Analogie, daß von der Linie AQRST schlechthin nur die Lage ihrer Tangenten für jede Ordinate gegeben ist. Wenn man indessen, wie es bey Constructionen geschieht, auf die geometrische Schärfe nicht achten, und das unendlich kleine mit dem unbemerkbaren verwechseln will, so kann man folgendermassen für jede krumme Linie ihre Quadratrix so genau construiren, als es mit Lineal und Zirkel möglich ist.

§. 8.

Es sey die krumme Linie ABCD Quadratrix zu construiren. Man ziehe die Chorden AB, BC, Fig. 2

CD

CD &c. Durch deren Mitte, so wie auch aus den Puncten B, C, D &c. lasse man auf Ad Perpendiculären fallen. Die Sagitten in Q, R, S &c. verlängere man aufwärts, jede um ihren dritten Theil in p, r, s &c. so erhält man ein Polygon, ApBrCsD &c. welches bis auf einen unmerklichen Theil dem Raum der krummen Linie gleich seyn wird, dafern die Krümmung der Bögen AB, BC, CD nicht über 20 oder 30 Grade ist. Dieses erhellt leicht aus dem in vorerwähnter Abhandlung erwiesenen. Findet man demnach für dieses Polygon die Puncte f, g, h, i, k, T, wie bey der zweyten Figur, so läßt sich durch dieselbe die krumme Linie AT ziehen, welche die Quadratrix von AD ist, und man hat für jeden Raum

$$ACc = ci \cdot Ad$$

wenn Ad zur Grundlinie des Rectangels angenommen worden.

§. 9.

Hiebey ist nun anzumerken, daß, da man durch dieses Verfahren eigentlich für das Polygon ApBrCsD die Puncte f, g, h, i, k, T findet, die Quadratrix aus mehreren einzelnen Stücken Af, fg, gh, hi, ik, kT &c. von parabolischen Bögen bestehen würde, wenn man wirklich erstbemeldtes Polygon quadriren wollte. Allein die Krümmung von jeden dieser Bögen ist so klein, daß die Figur sehr groß müßte gezeichnet werden, ehe sich die wahre krumme Linie von solchen parabolischen Bögen unterscheiden liesse.

§. 10.

Es bleibt noch zu beweisen, daß solche einzelne Bögen in der That Stücke von apollonischen Parabeln sind. Zu diesem Ende setze man in voriger Gleichung (§. 6.)

$$a\,d\eta = y\,dx$$

für den Fall eines geradlinichten Vieleckes

$$y = m + nx$$

so ist

$$a\,d\eta = (m + nx)\,dx$$

folglich

$$a\eta = mx + \tfrac{1}{2}\,nxx + \text{Const.}$$

welches offenbar eine parabolische Linie giebt.

V.
Anmerkungen über das Einschalten.

§. 1.

Tab. III. Was man seit längsten Zeiten bey dem Gebrauche der trigonometrischen und andern Tabellen den **Proportionaltheil** nennte, das ist, besonders seit **Wallisens** und **Newtons** Zeiten, unter dem Namen des **Interpolirens** viel allgemeiner gemacht worden. Man kann nemlich den Proportionaltheil nur da sicher und nach aller Schärfe gebrauchen, wo die Größen, zwischen welche man einzuschalten hat, in arithmetischer Progreßion fortgehen, oder wo wenigstens die Differenzen so wenig ungleich sind, daß man sie ohne merklichen Fehler für gleich ansehen kann. Sind hingegen die **Differenzen** allzumerklich ungleich, so wird auch der Gebrauch des Proportionaltheils unrichtig und unzuverläßig, und da müßen die Differenzen der Differenzen, welche man die **zweyten Differenzen** nennet, zu Hulfe genommen werden. Zuweilen muß man zu den **dritten**, **vierten** und folgenden **Differenzen** seine Zuflucht nehmen.

§. 2.

Man stellt sich hieben überhaupt eine krumme Linie vor, von welcher wenigstens etliche Abscissen und deren Ordinaten in Zahlen gegeben sind, und

und da ist die Frage, eine oder mehrere Ordinaten zu finden, deren Abscissen fürgegeben sind, und die gewöhnlich zwischen die gegebenen Abscissen fallen. Hiebey lassen sich nun folgende Fälle gedenken:

1) Wenn man die krumme Linie so weit kennt, daß die dazu gehörige Gleichung höchstens nur in Zahlen zu bestimmen ist. Da sucht man so viel gegebene Abscissen und Ordinaten zu haben, als nöthig ist, die Gleichung vollends zu bestimmen.

2) Ist die krumme Linie und ihre Gleichung durchaus gegeben, da sucht man wegen des Interpolirens nur Abkürzungen der Rechnung.

3) Wenn die krumme Linie unbekannt ist, da wird statt derselben gemeiniglich eine **Linie von parabolischer Art**

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$$

angenommen, die aber nur da gut gebraucht werden kann, wo sie genugsam convergirt, und man muß zugleich sehen, wie viele der Coefficienten a, b, c &c. durch eben so viel gegebene Abscissen und Ordinaten zu bestimmen sind.

4) Kann man hiebey die Abscissen x so annehmen, daß sie in arithmetischer Progreßion fortgehen, so wird die Rechnung ganz einfach, und man verfällt auf die eigentlich sogenannte **Methode der Differenzen**.

§. 3.

Ich werde eben hier nicht alles anführen, was bereits **Newton**, **Cotes**, **Meyer** (in den Comment. Petropol.) **Walmesley** (in den memoires de l'Acad. de Berl. 1758.) ein ungenannter Verfasser in den Act. Erudit. hiebey gethan, noch was man in verschiedenen andern Schriften, z. E. in des La Caille und La Lande Astronomie findet. **Newton** ist, wie er in seinen meisten übrigen Erfindungen war, auch hierin dergestalt räthselhaft, daß so wohl er selbst als andere nachgehends eine Aufklärung geben mußten. **Cotes** folgt **Newtons** Art, und ist ziemlich weitläuftig. **La Caille** bleibt bey der Reihe

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$$

statt deren, mit Walmesley und dem Ungenannten in den Actis eruditorum, besser und leichter

$$y = A + Bx + Cx\,(x-\alpha) + Dx\,(x-\alpha)(x-\beta) + \&c.$$

angenommen wird, wo α, β, γ &c. die gegebenen Abscissen vorstellen. Noch besser aber wird

$$y = A + Bx + Cx\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)$$

$$+ Dx.\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right).\left(\frac{x-\beta}{\beta}\right) + \&c.$$

angenommen, weil zumal wo α, β, γ &c. ganze Zahlen oder größer als 1 sind, dadurch die Coefficienten A, B, C nicht mehr zu convergiren scheinen, als sie wirklich convergiren.

§. 4

§. 4.

So wie ich aus des *Montucla* Histoires des mathematiques, und aus dem Commercio epistolico sehe, ist **Mouton** ein Lyoner Astronomus zuerst auf den Gebrauch der ungleichen Differenzen beym Interpoliren gekommen, und in dem Commercio epistolico haben die Engländer nicht ermangelt, den Brief anzuführen, wo **Leibnitz** zugab, daß **Mouton** ihm hierin zuvor gekommen. Dieses ist nun in mathematischen Erfindungen nicht so selten, daß man sich darüber wundern sollte. Das Vergnügen eines zweyten Erfinders, bleibt, wiewohl in geringerm Grade, immer auch ein Vergnügen. Ich erinnere mich hiebey, daß ich mir vor vielen Jahren das Problem einfallen ließ, ob, wenn die Barometerhöhen von mehrern vorhergehenden Tagen gegeben, die Barometerhöhe des folgenden Tages daraus durch Rechnung gefunden werden könne? Die Curua parabolici generis

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$$

fiel mir dabey von selbst ein, und die Interpolationsmethode war eine Folge davon, ohne daß ich sie jemand anders zu danken hatte. Ich dehnte sie noch überdis auf viel mehrere Fälle aus, und finde nun, daß mir, so viel ich weiß, nur **Walmesley** in Betrachtung derer Fälle zuvorgekommen, wo man

$$y = a + cx^2 + ex^4 + \&c.$$

$$y = bx + dx^3 + fx^5 + \&c.$$

E 3 setzen

setzen muß. Herr Euler sagte mir es 1764, da des Walmesley Abhandlung noch bey ihm im Manuscripte lag. Indessen da sie nun gedruckt ist, so sehe ich, daß er andere Formeln zum Grunde legt, und sich besonders an den Fall bindet, wo man für jede positive Abscisse eine gleichgrosse negative haben muß. Man findet aber die Umstände nicht immer so schicklich als sie hiezu verlangt werden. Ueberdis macht Walmesley die Sache noch dadurch weitläuftiger, daß er nach Newtons Art die Rechnung durch Differenzen vornimmt, und sie dadurch eher erkünstelt als abkürzt. Ich glaube demnach in den Zusätzen zu den Log. und Trigon. Tabellen auf zwey Octavseiten alles klärer und vollständiger vorgetragen zu haben.

§. 5.

Es kömmt überhaupt bey dem Interpoliren viel darauf an, daß man die Form der Gleichung oder der unendlichen Reihen kenne, die man zum Grunde legen muß, weil man sonst anstatt convergirender Formeln solche findet, die wenig oder gar nicht convergiren. Einige Beyspiele mögen dieses erläutern. Es sey für

x	y	x	y
0	0,0000000	5	0,7660444
1	0,1736482	6	0,8660254
2	0,3420202	7	0,9396926
3	0,5000000	8	0,9848077
4	0,6427876	9	1,0000000

Hier

Hier sind y die Sinus von 10 zu 10 Graden. Will man nun dafür die Reihe

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \&c.$$

und damit die Formel

$$y = Ax + Bx\left(\frac{x-m}{m}\right)$$
$$+ Cx.\left(\frac{x-m}{m}\right).\left(\frac{x-n}{n}\right) + \&c.$$

annehmen, so daß, wenn

$x = m = 1$	$y = \alpha = 0{,}1736482$
$n = 2$	$\beta = 0{,}3420202$
$p = 3$	$\gamma = 0{,}5000000$
$q = 4$	$\delta = 0{,}6427876$
&c.	&c.

werde, so findet man

$$A = \alpha$$
$$B = (\beta - 2\alpha):2$$
$$C = (\gamma - 3\beta + 3\alpha):3$$
$$D = (\delta - 4\gamma + 6\beta - 4\alpha):4$$
&c.

 und

und damit

$$y = 0{,}1736482\,x - 0{,}0026381\,x.(x-1)$$
$$- 0{,}0017053\,x.(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right)$$
$$+ 0{,}0000790\,x.(x-1).\left(\frac{x-2}{2}\right).\left(\frac{x-3}{3}\right)$$
$$+ 0{,}0000291.x.(x-1).\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{3}\right)\left(\frac{x-4}{4}\right)$$
$$-0{,}0000022\,x.(x-1).\left(\frac{x-2}{2}\right).\left(\frac{x-3}{3}\right).\left(\frac{x-4}{4}\right)\left(\frac{x-5}{5}\right)$$
$$-\ \&c.$$

§. 6.

Man nehme nun hingegen

$$y = Ax + Bx\left(\frac{xx-mm}{mm}\right)$$
$$+ Cx.\left(\frac{xx-mm}{mm}\right).\left(\frac{xx-nn}{nn}\right) + \&c.$$

so erhält man

$$A = \alpha$$
$$B = \frac{\beta - 2\alpha}{6}$$
$$C = \frac{\gamma - 4\beta + 5\alpha}{30}$$
$$D = \frac{\delta - 6\gamma + 14\beta - 14\alpha}{140}$$
$$\&c.$$

Und

und damit ungleich kürzer

$$y = 0{,}1736482\,x - 0{,}0008794\,x.(xx-1)$$
$$+ 0{,}0000053\,x.(xx-1).\left(\frac{xx-4}{4}\right)$$
$$-\ \&c.$$

§. 7.

Man setze, als ein zweytes Beyspiel, daß x dem Abstand eines Steins vom Zenith, y aber der Refraction gleich seyn, so würde man sehr unschicklich

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \&c.$$

annehmen. Denn außer dem, daß man auf eine weitläuftigere Formel verfiele, so würde man mit dieser Reihe zugleich voraus setzen, als wenn y für ein negatives x einen andern Werth hätte, als für ein positives. Man nimmt daher viel besser

$$y = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + \&c.$$

und damit

$$y = Ax + Bx.\frac{xx-mm}{mm}$$
$$+ Cx.\frac{xx-mm}{mm}.\frac{xx-nn}{nn} + \&c.$$

an, um vermittelst der für die Distanz m, n, p, q &c. beobachteten Stralenbrechungen α, β, γ, δ &c. die Coefficienten A, B, C, D &c. zu bestimmen. Die Astronomen würden sehr gut thun, wenn sie sich statt ihrer willkührlichen

 Hypo-

Hypothesen dieser Interpolationsart zu Bestimmung der Stralenbrechungen bedienten. Sie müßten aber freylich solche Beobachtung zum Grunde legen, die nicht nur sehr genau, sondern bey einerley Zustand der Luft, und in Zeit von wenigen Stunden angestellt worden wären.

§. 8.

Es geht ferner diese Interpolationsmethode in solchen Fällen, wo die Werthe von α. β, γ, δ &c. wechselsweise positiv und negativ sind, wenig oder gar nicht an, weil alsdenn die Coefficienten A, B, C, D, &c. wenig oder gar nicht convergiren. Dieses war nun eben der Fall, den ich bey dem vorhin (§. 4.) erwähnten Problem der Barometerhöhen vor mir hatte, und um so viel weniger noch ging die Auflösung von statten. Ich sahe aber überhaupt so viel, daß man in den meisten von solchen Fällen nicht eine Reihe dergleichen

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$$

ist, zum Grunde legen muß, sondern daß die Form

$$y = a + b \sin. \frac{m + x}{n} + c \sin. \frac{p + x}{q} + \&c.$$

krummen Linien, die sich schlangenweise auf- und abwerts ziehen, ungleich besser Genügen leistet. Es setzt übrigens diese Form eine periodische Wiederkehr jeder einzelnen Anomalien voraus, welche durch die besondern Glieder dieser Reihe angezeiget werden. Man müßte demnach, um sie bey den Barometerhöhen anzuwenden, voraus versichert seyn, daß die barometrischen Veränderungen von lauter periodischen Ursachen herrühren.

§. 9.

Man kann nun aber überhaupt, ehe man zur Berechnung der Interpolation schreitet, die Sache vorerst auf eine Construction ankommen lassen. Man construire nemlich die fürgegebenen Abscissen und Ordinaten, und so wird man leicht sehen können, ob die dadurch bestimmte Puncte in einer so einförmigen Krümmung liegen, daß sich eine ganz einfache krumme Linie durch dieselbe ziehen lasse. Liegen die Puncte zu unordentlich, oder auch zu weit von einander, daß der Zug und die Wendung der krummen Linie zwischen denselben zweifelhaft wird, so wird auch die Berechnung nicht viel zuverläßiges geben, und man wird zwischen den bereits construirten Puncten noch andere construiren müßen, wenn die krumme Linie sicher gezogen werden soll.

§. 10.

Wir können nun ferner noch anmerken, daß das Interpoliren im eigentlichsten Verstande ein **Interpoliren** oder **Einschalten** ist. Es geschieht nemlich nicht allemal, daß man damit über die zum Grunde gelegte Abscissen hinausreicht. Dieses geht nur an, wenn die krumme Linie

Linie in der That eine curua parabolici generis ist, oder die Reihe

$$y = a + bx + cx^2 + \&c.$$

in der That nur aus wenigen Gliedern besteht. In andern Fällen müßte man glücklich genug seyn, um aus den vermittelst weniger zum Grunde gelegten Abscissen das Gesetz des Fortgangs der Coefficienten zu errathen. Dieses geht aber nicht allemal so leicht von statten, besonders auch, weil man durch die Interpolationsmethoden die Coefficienten a, b, c &c. nicht genau, sondern nur näherungsweise bestimmen kann, so oft die Reihe selbst nicht endlich ist.

§. 11.

Bey Constructionen, die zuweilen das einige brauchbare Mittel sind, kommen noch eine Menge von Fällen vor, die ihre besondere Methoden und Kunstgriffe fordern. Ein Cörper bewege sich
Fig 1. z. E. in der Linie AC, so daß er die Räume AB, BC in gleichen oder gegebenen Zeiten durchläuft, und seine Geschwindigkeit von A bis C so ziemlich gleichförmig zunimmt. Da soll nun die Linie AC interpolationsweise so getheilt werden, daß man sehen könne, wo der Cörper in jedem Augenblicke gewesen. Zu diesem Ende wird die Linie aB schief durch B gezogen, und aB = Bc gemacht, oder aB zu Bc in Verhältniß der Zeiten genommen, so daß wenn man Cc, aA zieht, diese zwo Linien sich irgend z. E. in D durchschneiden. Hierauf theilt man aBc in so viel gleiche Theile,

Theile, als man Zeitpuncte verlangt, und durch jeden Theil wird aus D eine gerade Linie gezogen, welche auf AC die gesuchten Puncte angeben wird. Diese Eintheilungsart, die Newton gegeben, ist perspectivisch. Zieht man DE mit cBa parallel, und verlängert CA bis in E, so stellt DE den Horizont vor, und man findet AE von gleicher Größe, es sey daß man die Lage oder die Größe von ac oder beydes ändert.

§. 12.

Diese Constructionsart geht nur dann gut an, wenn die Geschwindigkeit sich von A bis C oder von C bis A nicht sehr merklich und auch nicht sehr ungleich ändert. Sie nimmt von C gegen A zu so ab, daß sie in E = o wird, und der Cörper den Punct E nie erreichen würde, wenn er sich nach dem Gesetze, welches bey der Construction voraus gesetzt wird, immer fort bewegen sollte.

§. 13.

Wenn aber mehrere Puncte A, B, D, E ge- Fig. 2.
geben sind, so kann man immer auch die Linie aCe ziehen, und in Verhältniß der Zeiten eintheilen. Zieht man sodann die gleichnamigen Puncte aA, Bb Dd, Ee zusammen, so werden die so gezogene Linien Tangenten einer krummen Linie FG vorstellen, die man sodann von freyer Hand ziehen kann. So genau nun diese krumme Linie kann gezogen werden, so genau wird sich auch die fürgegebene Linie AE eintheilen lassen, wenn

wenn man aCe in kleinere Zeiten theilt, und aus jeden Theilungspuncten Tangenten an die krumme Linie FG zieht. Ungeachtet hiebey die Lage und Größe der Linie aCb willkührlich bleibt, so muß sie dennoch so angenommen werden, daß die krumme Linie eine so viel möglich einförmige und nicht allzugrosse Krümmung erhalte, weil sie sonst, zumal wo der gegebenen Puncte A, B, D, E nicht viele sind, nicht zuverläßig genug würde zu ziehen seyn. Die Linie aCe kann auch, zumal wo die Geschwindigkeit immer zunimmt, mit AE parallel gezogen werden.

§. 14.

Fig. 3. Man setze z. E. AB, BC, CD, DE werden in gleichen Zeiten durchlaufen. Zieht man nun in einiger Entfernung die Linie ae parallel, so fängt man an dem Ende ED, wo die Geschwindigkeit am grösten ist, an, zwo Linien GEe, GDd zu ziehen, die sich in einiger Entfernung in G durchschneiden. Sodann wird ed aus d in c, b, a fortgetragen, und die durch cC, bB, aA zu ziehenden Linien werden, wie vorhin Tangenten der krummen Linie FG abgeben. Sollte die Krümmung FG allzugroß werden, so daß die Linie FG nicht zuverläßig genug gezogen werden könnte, so wird die Entfernung der beyden Parallelen AE, ae größer, und so auch der Punct G von AE weiter weg angenommen. Zuweilen liegt die Schuld auch daran, daß zwischen den Puncten A, B, C, D, E noch mehrere hätten angenommen werden sollen. Da man aber hiebey nicht immer freye Wahl hat, so kann man auch von dieser Constructionsart nicht mehr fordern, als die Data zulassen. Uebrigens ist für sich klar, daß die Theile auf AE, Ae überhaupt auch Abscissen und Ordinaten vorstellen konnen, wo von Bewegung, Zeit und Raum gar nicht die Rede ist. Eben so kann auch AE ein Theil einer krummen Linie seyn, es sey daß sich ein Cörper in derselben bewege, oder daß sie aus andern Absichten in ungleiche Theile eingetheilt werden muße. Der Punct G wird alsdann auf der holen Seite der krummen Linie EA genommen, damit die Tangenten EG, DG, AF &c. sie so viel möglich rechtwinklicht durchschneiden. Dadurch erhält man, daß auch die Linie FG sich weniger und einförmiger krummt.

§. 15.

Wenn auf der Linie AE wenigstens vier Puncte gegeben, so kann man auch folgendermassen verfahren. Man zieht durch die zween äußersten Puncte A, E gerade Linien, EH, AH, die sich unter einem Winkel von 20, 30 &c. Graden in H durchschneiden. Sodann wählt man auf AH den Punct F, auf EH den Punct G, und zieht BF, DG. Auf diese Art hat man bereits vier Tangenten EG, DG, BF, AF. Durch diese wird sodann eine Linie ae dergestalt gezogen, daß die Theile ab, bd, de den Zeiten proportional sind, welche die gleichnamigen Theile AB, Fig. 4.

AB, BD, DE durchlaufen werden. Sodann wird ae in kleinere Zeittheilchen eingetheilt, und wenn auf AE noch mehrere Puncte z. E. C gegeben sind, so werden auch noch mehrere Tangenten z. E. cC gezogen, und dadurch wird die Krummung der Linie FG noch näher bestimmt. Diese kann sodann gezogen werden, und damit läßt sich auch AE nach den auf ae gezeichneten kleinern Zeittheilchen eintheilen.

§. 16.

Wenn auf AE nur 4 Puncte A, B, D, E gegeben sind, so kann man anfangen, einen Circulbogen FG zu zeichnen, und aus den gegebenen 4 Puncten A, B, D, E Tangenten an denselben zu ziehen. Sodann wird die Linie ae dergestalt gezogen, daß die Theile ab, bd, de in Verhältniß der Zeiten seyn, in welchen die gleichnamigen Theile AB, BD, DE durchlaufen werden. Statt des Circulbogens FG kann auch ein parabolischer Bogen genommen werden. In diesem Fall kann man anfangen, die Linie ae zu ziehen, und sie in Verhältniß der Zeiten so einzutheilen, daß die äussersten Linien eE, aA sich in einiger Entfernung in H durchschneiden. Sodann werden noch zwo Linien dD, bB gezogen, und so hat man vier Tangenten einer Parabel, und die Parabel selbst ist dadurch bestimmt. Eine leichte Art sie zu zeichnen habe ich in den orbitis cometarum (§. 17) angegeben, und eben daselbst kömmt auch (§. 51.) eine geschmeidige Auflösung des Problems vor, wie die Linie ae gezogen werden soll, wenn die Theile ab, bd, de in gegebener Verhältniß seyn sollen.

§. 17.

In denen Fällen, wo eine Größe z sich nach zwo veränderlichen Größen x, y, verändert, oder eine Function derselben ist, da kömmt man mit der einfachen Art zu interpoliren nicht weit. Man gebraucht es zwar bey Tafeln, die doppelte Eingänge haben, und die so berechnet sind, daß x und y in arithmetischer Progreßion fortgeht, wie es bey einigen astronomischen Tafeln statt hat. Hingegen befand sich Halley in einem ungleich schwerern Fall, als er seine Charte von der Abweichung der Magnetnadel zu Stande bringen wollte. Er sammlete Nachrichten von Schiffern, wie sie aller Orten auf dem Meere die Abweichung der Magnetnadel befunden. Diese Oerter waren aber so zerstreut, daß diejenigen, die Halley eigentlich zu seiner Charte gebrauchte, durch Interpolation mußten gefunden werden. Wir wollen nun den Fall setzen, daß aus so irregulär zerstreuten Beobachtungen gefunden werden soll, wie groß die Abweichung der Magnetnadel in jeden Breiten von 5 zu 5 Graden, und in jeden Längen von 5 zu 5 Graden ist, wenigstens so fern diese Puncte der Erdfläche zwischen den Oertern liegen, von welchen man Beobachtungen hat. Die Grade der Länge seyn x, die Grade der Breite y, und die Ab-

Abweichung der Nadel z. Es ist demnach eine Formel zu finden, wodurch z durch x und y bestimmt wird, weil hier z eine Function von x und y seyn soll. Man sieht leicht, daß es mehr solcher Fälle giebt, und daß bey Tafeln mit doppelten Eingängen z in dem Zusammenlaufe von x und y gesucht werden muß, wenn x die Grade oder Wurzelzahlen vornen herunter, y aber die Grade oder Wurzelzahl jeder Columne anzeigt. Ich werde nun anfangs die allgemeine Methode in solchen Fällen zu interpoliren hersetzen.

§. 18.

Fig. 5. Einmal muß man aus Beobachtungen oder aus Gründen eine gewisse Anzahl Werthe von z haben, und zugleich wissen, wie groß x und y für jeden Werth von z sind. Man setze z. E. daß man für

	x	y	z
die Werthe	m	n	a
	m^{I}	n^{I}	b
	m^{II}	n^{II}	c
	m^{III}	n^{III}	d
	m^{IV}	n^{IV}	e
	&c.		

habe, so daß wenn

$x = m$ und $y = n$ sodann $z = a$

$x = m^{I}$ $\quad y = n^{I}$ $\quad z = b$

$x = m^{II}$ $\quad y = n^{II}$ $\quad z = c$

&c.

sey. Dieses vorausgesetzt, so läßt sich folgende Formel annehmen:

$$z = Axy$$

$$+ Bxy\left(\frac{x-m}{m}\right)\left(\frac{y-n}{n}\right)$$

$$+ Cxy\left(\frac{x-m}{m}\right)\left(\frac{y-n}{n}\right)\left(\frac{x-m'}{m'}\right)\left(\frac{y-n'}{n'}\right)$$

$$+ Dxy\left(\frac{x-m}{m}\right)\left(\frac{y-n}{n}\right)\left(\frac{x-m'}{m'}\right)\left(\frac{y-n'}{n'}\right)\left(\frac{x-m''}{m''}\right)\left(\frac{y-n''}{n''}\right)$$

$$+ \&c.$$

Hier sind nun die Coefficienten A, B, C, D &c. dadurch zu bestimmen, daß man der Ordnung nach

$x = m$, $\quad y = n$ $\quad z = a$

$x = m^{I}$, $\quad y = n^{I}$ $\quad z = b$

$x = m^{II}$ $\quad y = n^{II}$ $\quad z = c$

&c.

setzt. Dadurch erhält man der Ordnung nach

$$a = Amn$$

$$b = Am'n' + Bm'n'\left(\frac{m'-m}{m}\right)\left(\frac{n'-n}{n}\right)$$

$$c = Am''n'' + Bm''n''\left(\frac{m''-m}{m}\right)\left(\frac{n''-n}{n}\right)$$

$$+ Cm''n''\left(\frac{m''-m}{m}\right)\left(\frac{n''-n}{n}\right)\left(\frac{m''-m'}{m'}\right)\left(\frac{n''-n'}{n'}\right),$$

$$d = \&c.$$

Und hiedurch werden A, B, C, D &c. bestimmt, und wenn m, m', m'' &c. n, n', n'' &c. a, b, c &c. in Zahlen gegeben sind, ohne Mühe berechnet.

§. 19.

Es setzt übrigens die angenommene Formel voraus, daß $z = o$ werde, wenn x oder y oder beyde $= o$ sind, und in so fern betrift sie einen einfachen dabey aber besondern Fall. Soll sie allgemeiner werden, so muß sie

$$\begin{aligned} z &= A \\ &+ B\left(\frac{x-m}{m}\right)\left(\frac{y-n}{n}\right) \\ &+ C\left(\frac{x-m}{m}\right)\left(\frac{y-n}{n}\right)\left(\frac{x-m'}{m'}\right)\left(\frac{y-n'}{n'}\right) \\ &+ D\left(\frac{x-m}{m}\right)\left(\frac{y-n}{n}\right)\left(\frac{x-m'}{m'}\right)\left(\frac{y-n'}{n'}\right) \\ &\qquad \cdot \left(\frac{x-m''}{m''}\right)\left(\frac{y-n''}{n''}\right) \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

gesetzt werden, und da hat man

$$\begin{aligned} a &= A \\ b &= A + B\left(\frac{m'-m}{m}\right)\left(\frac{n'-n}{n}\right) \\ c &= \&c. \end{aligned}$$

§. 20.

Für solche Fälle, wo z nur mit x, nicht aber mit y, $= o$ wird, nimmt man die Formel

$$\begin{aligned} z &= Ax \\ &+ Bx.\left(\frac{x-m}{m}\right)\left(\frac{y-n}{n}\right) \\ &+ Cx.\left(\frac{x-m}{m}\right)\left(\frac{y-n}{n}\right)\left(\frac{x-m'}{m'}\right)\left(\frac{y-n'}{n'}\right) \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

an, und man erhält

$$\begin{aligned} a &= Am \\ b &= Am' + Bm'\left(\frac{m'-m}{m}\right)\left(\frac{n'-n}{n}\right) \\ c &= Am'' + Bm''\left(\frac{m''-m}{n}\right)\left(\frac{n''-n}{n}\right)\left(\frac{m''-m'}{m'}\right)\left(\frac{n''-n'}{n'}\right) \\ d &= \&c. \end{aligned}$$

Auf eine ähnliche Art verfährt man, wenn z nur mit y, aber nicht mit x, $= o$ wird.

§. 21.

Außer diesen Fällen giebt es noch besondere, wo man z. E. anstatt x, y die Quadrate x^2, y^2 nehmen muß, oder wo nur x oder nur y quadrirt wird. Ich werde für einige solcher Fälle die Formeln, als eben so viele Beyspiele hersetzen, woraus man abnehmen kann, wie man sich jedesmal nach dem, was die Natur der Sache fordert, zu richten habe.

I. $z = A$

$$+ B\left(\frac{xx-mm}{mm}\right)\left(\frac{yy-nn}{nn}\right)$$

$$+ C\left(\frac{xx-mm}{mm}\right)\left(\frac{yy-nn}{nn}\right)\left(\frac{x'x'-m'm'}{m'm'}\right)\left(\frac{y'y'-n'n'}{n'n'}\right)$$

$+$ &c.

II. $z = Axy$

$$+ Bxy\left(\frac{xx-mm}{mm}\right)\left(\frac{yy-nn}{nn}\right)$$

$+$ &c.

III. $z = Ax$

$$+ Bx\left(\frac{xx-mm}{mm}\right)\left(\frac{y-n}{n}\right)$$

$$+ Cx\left(\frac{xx-mm}{mm}\right)\left(\frac{y-n}{n}\right)\left(\frac{xx-m'm'}{m'm'}\right)\left(\frac{y-n'}{n'}\right)$$

$+$ &c.

Diese Arten von Formeln hängen besonders von dem Anfang der Abscissen x, y ab, und setzen voraus, daß man wisse, auf welche Art z von den Dignitäten von x und y abhängt.

§. 22.

Wenn nun bey diesen Formeln der Ordnung nach

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, \&c.$$

und für jeden dieser Werthe ebenfalls

$$y = 0, 1, 2, 3, 4, \&c.$$

gesetzt

gesetzt wird, und die dazu gehörigen Werthe von z sind gegeben, so hat man wirklich eine Tafel mit doppelten Eingängen von folgender Form:

	0	1	2	3	4	5	- - - - x
0	a	b	c	d	e	f	-
1	a^{I}	b^{I}	c^{I}	d^{I}	e^{I}	f^{I}	-
2	a^{II}	b^{II}	c^{II}	d^{II}	e^{II}	f^{II}	-
3	a^{III}	b^{III}	c^{III}	d^{III}	e^{III}	f^{III}	-
4	a^{IV}	b^{IV}	c^{IV}	d^{IV}	e^{IV}	f^{IV}	-
5	a^{V}	b^{V}	c^{V}	d^{V}	e^{V}	f^{V}	-
-							-
-							-
-							-
y	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - - z

Und da hiebey eine Regularität ist, so werden auch die Formeln zum Einschalten desto ordentlicher. Diese können nach allen ersterwähnten Arten angenommen werden. Ich werde aber diejenige zum Beyspiele nehmen, die am häufigsten vorkömmt, und auch überdis am allgemeinsten ist. Man sieht leicht voraus, daß für jede Zelle dieser Tafel ein besonderer Coefficient muß angenommen werden, und wir werden uns auch am besten zurechte finden, wenn wir sie auf eine ganz ähnliche Art bezeichnen und anordnen,

 damit

damit man sogleich sehen könne, für welche Zelle jeder Coefficient bestimmt ist.

§. 23.

Man setze demnach

$$\begin{array}{ll}
z = A & + Bx \\
\quad + A'y & + B'xy \\
\quad + A''y(y-1) & + B''xy(y-1) \\
\quad + A'''y(y-1)\left(\frac{y-2}{2}\right) & + B'''xy(y-1)\left(\frac{y-2}{2}\right) \\
\quad + \&c. & + \&c.
\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
+ Cx(x-1) & + \&c. \\
+ C'xy(x-1) & + \&c. \\
+ C''xy(x-1)(y-1) & + \&c. \\
+ C'''xy(x-1)(y-1)\left(\frac{y-2}{2}\right) & + \&c. \\
+ \&c. & + \&c.
\end{array}\right.$$

so sind die Coefficienten dieser Formel dadurch zu bestimmen, daß man der Ordnung nach für x, y, z die in vorhergehender Tafel angegebene Werthe setzt.

§. 24.

Dadurch erhält man folgende Gleichungen:

	x	y	
I.	0	0	$a = A$
	1	0	$b = A + B$
	2	0	$c = A + 2B + 2C$
	3	0	$d = A + 3B + 6C + 3D$
	4	0	$e = A + 4B + 12C + 12D + 4E$
			&c.
II.	0	1	$a' = A$ $+ A'$
	1	1	$b' = A + B$ $+ A' + B'$
	2	1	$c' = A + 2B + 2C$ $+ A' + 2B' + 2C'$
	3	1	$d' = A + 3B + 6C + 3D$ $+ A' + 3B' + 6C' + 3D'$
	4	1	$e' = A + 4B + 12C + 12D + 4E$ $+ A' + 4B' + 12C' + 12D' + 4E$
			&c.
III.	0	2	$a'' = A$ $+ 2A'$ $+ 2A''$
	1	2	$b'' = A + B$ $+ 2A' + 2B'$ $+ 2A'' + 2B''$
	2	2	$c'' = A + 2B + 2C$ $+ 2A' + 4B' + 4C'$ $+ 2A'' + 4B'' + 4C''$

	3	2	$d'' = A + 3B + 6C + 3D$
			$+ 2A' + 6B' + 12C' + 6D'$
			$+ 2A'' + 6B'' + 12C'' + 6D''$
	4	2	$e'' = A + 4B + 12C + 12D + 4E$
			$+ 2A' + 8B' + 24C' + 24D' + 8E'$
			$+ 2A'' + 8B'' + 24C'' + 24D'' + 8E''$
			&c.
IV.	0	3	$a''' = A$
			$+ 3A'$
			$+ 6A''$
			$+ 3A'''$
	1	3	$b''' = A + B$
			$+ 3A' + 3B''$
			$+ 6A'' + 6B''$
			$+ 3A''' + 3B'''$
	2	3	$c''' = A + 2B + 2C$
			$+ 3A' + 6B' + 6C'$
			$+ 6A'' + 12B'' + 12C''$
			$+ 3A''' + 6B''' + 6C'''$
	3	3	$d''' + A + 3B + 6C + 3D$
			$+ 3A' + 9B' + 18C' + 9D'$
			$+ 6A'' + 18B'' + 36C'' + 18D''$
			$+ 3A''' + 9B''' + 18C''' + 9D'''$
			&c.
V.	0	4	$a'''' = A$
			$+ 4A'$
			$+ 12A''$
			$+ 12A'''$
			$+ 4A''''$
	1	4	$b'''' = A + B$
			$+ 4A' + 4B'$
			$+ 12A'' + 12B''$
			$+ 12A''' + 12B'''$
			$+ 4A'''' + 4B''''$
	2	4	$c'''' = A + 2B + 2C$
			$+ 4A' + 8B' + 8C'$
			$+ 12A'' + 24B'' + 24C''$
			$+ 12A''' + 24B''' + 24C'''$
			$+ 4A'''' + 8B'''' + 8C''''$
	3	4	$d'''' = A + 3B + 6C + 3D$
			$+ 4A' + 12B' + 24C' + 12D'$
			$+ 12A'' + 36B'' + 72C'' + 36D''$
			$+ 12A''' + 36B''' + 72C''' + 36D'''$
			$+ 4A'''' + 12B'''' + 24C'''' + 12D''''$
			&c.

§. 25.

Aus diesen Gleichungen können nun der Ordnung nach die Werthe der Coefficienten

A, B, C &c.
A', B', C' &c.
&c.

bestimmt werden. Es sind, und zwar nach der Ordnung der Zellen, folgende:

$A = a$	$B = (b - a)$	$2C = (c - 2b + a)$	$3D = (d - 3c + 3b - a)$	$4E$ &c.
$A' = a' - a$	$B' = (b' - a') - (b - a)$	$2C' = (c' - 2b' + a') - (c - 2b + a)$	$3D' = (d' - 3c' + 3b' - a') - (d - 3c + 3b - a)$	$4E$ &c.
$2A'' = + a'' - 2a' + a$	$2B'' = (b'' - a'') - 2(b' - a') + (b - a)$	$4C'' = (c'' - 2b'' + a'') - 2(c' - 2b' + a') + (c - 2b + a)$	$6D'' = (d'' - 3c'' + 3b'' - a'') - 2(d' - 3c' + 3b' - a') + (d - 3c + 3b - a)$	$8E$ &c.
$2A''' = a''' - 3a'' + 3a' - a$	$3B''' = (b''' - a''') - 3(b'' - a'') + 3(b' - a') - (b - a)$	$6C''' = (c''' - 2b''' + a''') - 3(c'' - 2b'' + a'') + 3(c' - 2b' + a') - (c - 2b + a)$	$9D''' = (d''' - 3c''' + 3b''' - a''') - 3(d'' - 3c'' + 3b'' - a'') + 3(d' - 3c' + 3b' - a') - (d - 3c + 3b - a)$	$12E$ &c.
$4A'''' = a'''' - 4a''' + 6a'' - 4a' + a$	$4B'''' = (b'''' - a'''') - 4(b''' - a''') + 6(b'' - a'') - 4(b' - a') + (b - a)$	$8C'''' = (c'''' - 2b'''' + a'''') - 4(c''' - 2b''' + a''') + 6(c'' - 2b'' + a'') - 4(c' - 2b' + a') + (c - 2b + a)$	$12D'''' = (d'''' - 3c'''' + 3b'''' - a'''') - 4(d''' - 3c''' + 3b''' - a''') + 6(d'' - 3c'' + 3b'' - a'') - 4(d' - 3c' + 3b' - a') + (d - 3c + 3b - a)$	$16E$ &c.
$5A^{V} =$ &c.	$5B^{V} =$ &c.	$10C^{V} =$ &c.	$15D^{V} =$ &c.	$20E$ &c.

§. 26.

§. 26.

Diese Tafel kann vermittelst der Coefficienten der Newtonschen Binomialformel sehr leicht weiter ausgedehnt werden, und damit ist auch die angenommene Formel (§. 23.)

$$\begin{array}{llll} z = A & + Bx & + Cx(x-1) & + \&c. \\ + A'y & + B'xy & + C'xy(x-1) & + \&c. \\ + A''y(y-1) & + B''xy(y-1) & + C''xy(x-1).(y-1) & + \&c. \\ + \&c. & + \&c. & + \&c. & \end{array}$$

so weit man will oder sie braucht, bestimmt.

§. 27.

Wir können aber die Rechnung noch durch die Betrachtung abkürzen, daß B, $2C$, $3D$ &c. B', $2C'$, $3D'$ &c. $2B''$, $4C''$, $6D''$ &c. &c. lauter Differenzen sind, und damit durch blosses Subtrahiren gefunden werden können. Es müßen aber diese Differenzen nach beyden Dimensionen der Tafel (§. 22.) genommen werden. Man drücke die von den horizontalen Reihen durch Δ, Δ^2, Δ^3, Δ^4 ꝛc. die von den verticalen durch δ, δ^2, δ^3, δ^4, &c. aus; so findet sich

$A = a$	$B = \Delta a$	$2C = \Delta^2 a$	$3D = \Delta^3 a$. &c.
$A' = \delta a$	$B' = \delta\Delta a$	$2C' = \delta\Delta^2 a$	$3D' = \delta\Delta^3 a$
$2A'' = \delta^2 a$	$2B'' = \delta^2\Delta a$	$4C'' = \delta^2\Delta^2 a$	$6D'' = \delta^2\Delta^3 a$
&c.			

Und

Und demnach jeden Werth

$$z = a + \Delta a.x + \Delta^2 a.x.\frac{x-1}{2} + \&c.$$
$$+ \delta a.y + \delta\Delta a.xy + \delta\Delta^2 a.xy.\frac{x-1}{2} + \&c.$$
$$+ \delta^2 a.y.\frac{y-1}{2} + \delta^2\Delta a.xy.\frac{y-1}{2} + \delta^2\Delta^2 a.xy.\frac{x-1}{2}.\frac{y-1}{2} + \&c.$$
$$+ \&c.$$

§. 28.

Um aber auch diese Differenzen in gewisser Ordnung zu finden; so kann es nach Anleitung beyliegender Formulartabelle geschehen, die Kürze halber nur bis auf die dritten Differenzen ausgedehnt ist. Man schreibt nemlich die gegebenen Werthe a, b, c, d &c. a′, b′, c′, d′ &c. (§. 22.) in behöriger Weite nach- und untereinander, und theilt das Papier in Fächer ein. Sodann findet man durch blosses Subtrahiren für die erste horizontale Reihe

$$\Delta a = b - a,\ \Delta b = c - b,\ \Delta c = d - c$$
$$\Delta^2 a = \Delta b - \Delta a,\quad \Delta^2 b = \Delta c - \Delta b$$
$$\Delta^3 a = \Delta^2 b - \Delta^2 a.$$

Diese Unterschiede werden, wie es aus der Tabelle erhellet, eingetragen. Auf eine ähnliche Art findet man auch

$\Delta a'$

$$\Delta a' = b' - a',\ \Delta b' = c' - b',\ \Delta c' = d' - c'$$
$$\Delta^2 a' = \Delta b' - \Delta a',\ \Delta^2 b' = \Delta c' - \Delta b'$$
$$\Delta^3 a' = \Delta^2 b' - \Delta^2 a'$$

Eben so verfährt man mit a″, b″, c″ &c. a‴, b‴, c‴ &c. Und damit werden die ersten Reihen eines jeden horizontallaufenden Feldes angefüllt. Mit den verticalen Reihen verfährt man auf eine ganz ähnliche Art. Es ist daher genug, wenn wir es in Form eines Beyspiels durch die zweyte Columne erläutern. Da haben wir

$$\delta\Delta a = \Delta a' - \Delta a,\ \delta\Delta a' = \Delta a'' - \Delta a',\ \delta\Delta a'' = \Delta a''' - \Delta a''$$
$$\delta^2\Delta a = \delta\Delta a' - \delta\Delta a,\ \delta^2\Delta a' = \delta\Delta a'' - \delta\Delta a'$$
$$\delta^3\Delta a = \delta^2\Delta a' - \delta^2\Delta a$$

Diese Differenzen werden in die zweyte Columne gesetzt, wie sie in der Formulartabelle angezeigt sind.

§. 29.

Dabey liegt nun die Formel (§. 23.) zum Grunde. Man kann auch ähnliche Tabellen für die übrigen im §. 21. angezeigten Formeln finden. Ich werde mich aber hier dabey nicht aufhalten, sondern theils von dieser Formel einen sehr allgemeinen Gebrauch anzeigen, theils auch noch in Ansehung des §. 5. etwas nachholen.

§. 30.

Man habe eine Gleichung

$$\varphi y = \psi(x, y)$$

wobey

	0				1			2		3
0	a	Δa	$\Delta^2 a$	$\Delta^3 a$	b	Δb	$\Delta^2 b$	c	Δc	d
	δa	$\delta \Delta a$	$\delta \Delta^2 a$	$\delta \Delta^3 a$	δb	$\delta \Delta b$	$\delta \Delta^2 b$	δc	$\delta \Delta c$	δd
	$\delta^2 a$	$\delta^2 \Delta a$	$\delta^2 \Delta^2 a$	$\delta^2 \Delta^3 a$	$\delta^2 b$	$\delta^2 \Delta b$	$\delta^2 \Delta^2 b$	$\delta^2 c$	$\delta^2 \Delta c$	$\delta^2 d$
	$\delta^3 a$	$\delta^3 \Delta a$	$\delta^3 \Delta^2 a$	$\delta^3 \Delta^3 a$	$\delta^3 b$	$\delta^3 \Delta b$	$\delta^3 \Delta^2 b$	$\delta^3 c$	$\delta^3 \Delta c$	$\delta^3 d$
1	a'	$\Delta a'$	$\Delta^2 a'$	$\Delta^3 a'$	b'	$\Delta b'$	$\Delta^2 b'$	c'	$\Delta c'$	d'
	$\delta a'$	$\delta \Delta a'$	$\delta \Delta^2 a'$	$\delta \Delta^3 a'$	$\delta b'$	$\delta \Delta b'$	$\delta \Delta^2 b'$	$\delta c'$	$\delta \Delta c'$	$\delta d'$
	$\delta^2 a'$	$\delta^2 \Delta a'$	$\delta^2 \Delta^2 a'$	$\delta^2 \Delta^3 a'$	$\delta^2 b'$	$\delta^2 \Delta b'$	$d^2 \Delta^2 b'$	$\delta^2 c'$	$d^2 \Delta c'$	$\delta^2 d'$
2	a''	$\Delta a''$	$\Delta^2 a''$	$\Delta^3 a''$	b''	$\Delta b''$	$\Delta^2 b''$	c''	$\Delta c''$	d''
	$\delta a''$	$\delta \Delta a''$	$\delta \Delta^2 a''$	$\delta \Delta^3 a''$	$\delta b''$	$\delta \Delta b''$	$\delta \Delta^2 b''$	$\delta c''$	$\delta \Delta c''$	$\delta d''$
3	a'''	$\Delta a'''$	$\Delta^2 a'''$	$\Delta^3 a'''$	b'''	$\Delta b'''$	$\Delta^2 b'''$	c'''	$\Delta c'''$	d'''

wobey φ und ψ Functionen vorstellen, und es soll x oder eine beliebige Function von x oder auch von x und y daraus hergeleitet werden. Zu diesem Ende setze man allgemeiner

$$z = \psi(x, y)$$

damit x und y jede beliebige Werthe haben können, und so wird nur alsdenn $z = \varphi y$ seyn, wenn sowohl x als y denjenigen Werth hat, den die fürgegebene Gleichung fordert.

§. 30.

Man nehme ferner für x und y einen beliebigen Werth an, so daß

$$x = \xi + \Delta\xi$$
$$y = \eta + \Delta\eta$$

und damit auch

$$z = \zeta + \Delta\zeta = \varphi y = \psi(x, y)$$

sey; so leitet sich aus der Formel (§. 27.) ohne Mühe folgende her

$$\varphi y = z = \zeta + \Delta\zeta$$
$$= \zeta + \frac{\Delta\xi . d\zeta}{d\xi} + \frac{(\Delta\xi)^2 . dd\zeta}{2 d\xi^2} + \&c.$$
$$+ \frac{\Delta y . \delta\zeta}{d\eta} + \frac{\Delta\xi . \Delta\eta . d\delta\zeta}{d\xi . d\eta} + \frac{(\Delta\xi)^2 . \Delta\eta . d^2\delta\zeta}{2 d\xi^2 d\eta} + \&c.$$
$$+ \frac{(\Delta\eta)^2 \delta^2\zeta}{2 d\eta^2} + \frac{\Delta\xi . (\Delta\eta)^2 d\delta^2\zeta}{d\xi . 2 . d\eta^2} + \frac{(\Delta\xi^2) . (\Delta\eta)^2 . d^2\delta^2\zeta}{2 d\xi^2 . 2 d\eta^2} + \&c.$$
$$+ \&c.$$

§. 31.

Da nun y als gegeben angesehen wird, so bleibt die Verhältniß zwischen η und $\Delta\eta$ willkührlich, weil es genug ist, daß $y = \eta + \Delta\eta$ sey. Hingegen muß

$$\Delta\xi = x - y$$

und damit auch

$$\xi = y$$

gesetzt werden, wodurch sodann sowohl ξ als $\Delta\xi$ bestimmt ist.

§. 32.

Es ist also in der erstgegebenen Formel (§. 30.) $\Delta\xi$ die einige unbekannte Größe. Und diese kömmt darinn so vor, daß alles übrige als Coefficienten von den Dignitäten von $\Delta\xi$ angesehen, und demnach kürzer

$$\varphi y = z = A + B . \Delta\xi + C . \Delta\xi^2 + \&c.$$

gesetzt werden kann, da sodann

$$A = \zeta + \frac{\Delta\eta . \delta\zeta}{d\eta} + \frac{(\Delta\eta)^2 . \delta^2\zeta}{2 d\eta} + \&c.$$

$$B = \frac{d\zeta}{d\xi} + \frac{\Delta\eta . d\delta\zeta}{d\xi . d\eta} + \&c.$$

&c.

seyn wird.

§. 33.

Da wir demnach

$$\varphi y = A + B . \Delta\xi + C . \Delta\xi^2 + \&c.$$

haben, so sieht man leicht, daß man um $\Delta\xi$ zu finden, schlechthin nur diese Reihe umzukehren hat, und die Gleichung

$$x = y + \Delta\xi$$

wird sodann auch x angeben.

§. 34.

Man setze aber, es soll überhaupt eine Function Π (x, y) gefunden werden: so bestimmt man erstlich die Function Π (ξ, η), und man wird nach der allgemeinen Formel

$$\Pi(x,y) = \Pi(\xi,\eta) + \Delta\xi.d\Pi(\xi,\eta) + \&c.$$
$$+ \frac{\Delta\eta.\delta\Pi(\xi,\eta)}{\delta\eta} + \Delta\xi.\Delta\eta.d\delta\Pi(\xi,\eta) + \&c.$$
$$+ \&c.$$

haben, welches demnach die verlangte Function seyn wird. Eine weitere Ausführung davon habe ich bey der Königl. Academie der Wissenschaften vorgelesen. Ich wende mich demnach zu dem, was ich aus obigem noch nachholen wollte.

§. 35.

Dazu wurde ich durch die Betrachtung veranlaßt, daß, so sehr auch die Formel (§. 6.)

$$y = Ax + Bx.\frac{xx - mm}{mm} + \&c.$$

und

und so auch

$$y = Ax^2 + Bx^2.\frac{xx - mm}{mm} + \&c.$$

convergiren, sie dennoch nur in solchen Fällen anwendbar sind, wo im ersten Fall

$$y = ax + bx^3 + cx^5 + \&c.$$

im andern aber

$$y = ax^2 + bx^4 + cx^6 + \&c.$$

ist, und wo demnach y für verneinte und bejahte Werthe von x einerley Werthe hat, und im ersten Fall nur in Absicht auf das + und — verschieden ist. Diese Fälle sind aber seltener, und so muß gemeiniglich

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \&c.$$

genommen werden.

§. 36.

Ob wohl man nun in diesem letzten Fall gewöhnlich

$$y = Ax + Bx.\frac{x - m}{m} + Cx.\frac{x - m}{m}.\frac{x - n}{n} + \&c.$$

setzt, so ist doch dieses nicht unumgänglich nothwendig. Es geschieht im Gegentheil gemeiniglich, daß y von den geraden Dignitäten des x ganz anders abhängt, als von den ungeraden. So z. E. ist

$$y = \sin.(a+x) = \sin.a\cos.x + \cos.a.\sin.x$$

$$= \sin.a\left(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3.4}x^4 - \frac{1}{2.3.4.5.6}x^6 + \&c.\right)$$

$$+ \cos.a\left(x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4.5}x^5 - \&c.\right)$$

Man würde also hier unschicklich

$$y = Const. + Ax + Bx.\frac{x-m}{m} + Cx.\frac{x-m}{m}.\frac{x-n}{n} + \&c.$$

setzen, weil auf diese Art die geraden und ungeraden Dignitäten von x vermengt würden.

§. 37.

Viel besser aber setzt man

$$y =$$

$$Const. + Ax + Bx.\frac{xx-mm}{mm} + Cx.\frac{xx-mm}{mm}.\frac{xx-nn}{nn} + \&c.$$

$$+ \alpha xx + \beta xx.\frac{xx-mm}{mm} + \gamma xx.\frac{xx-mm}{mm}.\frac{xx-nn}{nn} + \&c.$$

oder

$$y = Const. + (Ax + \alpha xx)$$

$$+ (Bx + \beta xx).\frac{xx-mm}{mm}$$

$$+ (Cx + \gamma xx).\frac{xx-mm}{mm}.\frac{xx-nn}{nn}$$

$$+ \&c.$$

Diese

Diese Reihe hat nun mit derjenigen, so Walmesley (§. 3.) für eine ungerade Anzahl von Ordinaten annimmt, einerley Form, und sie setzt ebenfalls voraus, daß man für x gleichgrosse bejahte und verneinte Werthe zum Grunde legen müße. Walmesley sagt dieses nicht in der Aufgabe, sondern in der Auflösung, und vermuthlich kam es ihm auch nur im Sinn, als er die Coefficienten bestimmen wollte. Den eigentlichen Grund, warum er der Reihe diese Form gegeben, zeigt er ebenfalls nicht an. Er liegt aber darinn, daß man dabey auf den Umstand acht hat, wiefern y von den geraden Dignitäten anders als von den ungeraden abhängt.

§. 38.

Und um den Unterschied zu bestimmen, bleibt allerdings kein ander Mittel, als daß man für x gleichgrosse bejahte und verneinte Werthe annimmt. Denn so hat man die Reihen

$$y = Const + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \&c.$$

$$y' = Const. - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4 - \&c.$$

demnach

$$y + y' = 2(Const \; * + bx^2 \; * + dx^4 \; * + \&c.)$$

$$y - y' = 2(* + ax \; * + cx^3 \; * + \&c.)$$

Da nun für jedes $+x$ der Werth y, und für jedes $-x$ der Werth y' gegeben, so ist auch $y+y'$

und

und $y - y'$ gegeben, und damit können die Coefficienten A, B, C &c. α, β, γ &c. bestimmt werden, wenn man überhaupt

$$\frac{y-y'}{2} = Ax + Bx.\frac{xx-mm}{mm} + Cx.\frac{xx-mm}{mm}.\frac{xx-nn}{nn}$$

$$+ Dx.\frac{xx-mm}{mm}.\frac{xx-nn}{nn}.\frac{xx-pp}{pp} + \&c.$$

und

$$\frac{y+y'}{2} = \text{Const.} + \alpha xx + \beta xx.\frac{xx-mm}{mm}$$

$$+ \gamma xx.\frac{xx-mm}{mm}.\frac{xx-nn}{nn}$$

$$+ \delta xx.\frac{xx-mm}{mm}.\frac{xx-nn}{nn}.\frac{xx-pp}{pp} + \&c.$$

setzt, woraus sich sodann durch blosses Addiren

$$y = \text{Const.} + Ax + Bx.\frac{xx-mm}{mm} + \&c.$$

$$+ \alpha xx + \beta xx.\frac{xx-mm}{mm} + \&c.$$

ergiebt. Die ganze Rechnung wird demnach auf die dritte und vierte Formel in den oben (§. 4.) erwähnten **Zusätzen zu den log.** und **trigon. Tabellen** zurückgeführt, und damit ganz einfach.

§. 39.

§. 39.

Walmesley, der sich an die Anzahl der Ordinaten hält, bemerkt, daß bey dieser Rechnung die Anzahl derselben ungerade ist, und daher ist er bemüht, auch für den Fall zu sorgen, wo ihre Anzahl gerade ist. Die Formel für diesen Fall ist

$$y = Ax + Bx.\frac{xx-mm}{mm}$$

$$+ Cx.\frac{xx-mm}{mm}.\frac{xx-nn}{nn} + \&c.$$

$$+ \alpha + \beta.\frac{xx-mm}{mm}$$

$$+ \gamma.\frac{xx-mm}{mm}.\frac{xx-nn}{nn} + \&c.$$

Hier kann nun x nicht $= 0$ angenommen werden, wenn man die Coefficienten A, B, C &c. α, β, γ &c. bestimmen will. Denn $x = 0$ fällt zwischen die zweyte und dritte Ordinate in die Mitte, und so ist die dem $x = 0$ entsprechende Ordinate als unbekannt anzusehen. Man muß auch hier für jeden bejahten Werth von x einen gleichgrossen verneinten annehmen, und damit ist

$$\frac{y+y'}{2} = \alpha + \beta\frac{xx-mm}{mm}$$

$$+ \gamma.\frac{xx-mm}{mm}.\frac{xx-nn}{nn} + \&c.$$

 und

und

$$\frac{y - y'}{2} = Ax + Bx.\frac{xx - mm}{mm}$$

$$+ C.\frac{xx - mm}{mm}.\frac{xx - nn}{nn} + \&c.$$

Diese leztere Reihe wird nun nach der dritten Formel in ersterwähnten Zusätzen (§. 29.) berechnet. Die erstere hingegen darf man nur mit xx multipliciren, um die Reihe

$$\frac{y + y'}{2}.xx = \alpha xx + \beta xx.\frac{xx - mm}{mm}$$

$$+ \gamma xx.\frac{xx - mm}{mm}.\frac{xx - nn}{nn} + \&c.$$

zu haben, welche nach der vierten Formel a. a. O. berechnet, und nachdem die Coefficienten α, β, γ bestimmt sind, wider hergestellt werden kann. Und damit ist auch hier die Sache wiederum ganz einfach gemacht.

VI.

Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten.

§. 1.

Man giebt überhaupt mehrere Bedingungen an, denen eine vollkommene Landcharte Genüge leisten soll. Tab. IV. V.VI.VII. Sie soll 1. die Figur der Länder nicht verunstalten. 2, Die Größe der Länder sollen auf der Charte ihre wahre Verhältniß unter sich behalten. 3. Die Entfernungen jeder Oerter von jeden andern sollen ebenfalls im Verhältniß der wahren Entfernungen seyn. 4. Was auf der Erdfläche in gerader Linie, das will eigentlich sagen auf einem größten Circul der Sphäre, liegt, das soll auch in der Landcharte in gerader Linie liegen. 5. Die geographische Länge und Breite der Oerter soll auf der Charte leicht können gefunden werden ꝛc. Das will nun überhaupt sagen, die Landcharten sollen in Absicht auf ganze Länder, ganze Welttheile oder die ganze Erdfläche durchaus eben das seyn, was ein Grundriß in Absicht auf ein Haus, Hof, Garten, Feld, Forst ꝛc. ist. Dieses würde nun ganz wohl angehen, wenn die Erdfläche eine ebene Fläche wäre. Sie ist aber eine Kugelfläche, und damit läßt sich nicht allen

Bedingungen zugleich Genüge leisten, sondern man muß sich eine oder einige davon besonders vorsetzen, wenn es sich der Muhe lohnt, derselben vorzüglich Genüge zu leisten.

§. 2.

Wenn man indessen bey der Vergleichung einer Charte mit einem Grundrisse verbleiben will, so läßt sich eine Vorstellungsart gedenken, bey welcher diese Vergleichung noch so ziemlich angeht. Man setze z. E. es sey von dem Grundrisse eines Berges die Rede, so gedenket man sich eine durch den Fuß des Berges gehende horizontale Ebene. Man gedenket sich ferner senkrechte Linien, die aus jedem auf dem Berge befindlichen Puncte auf die Ebene herunter fallen, und da, wo diese Linien hintreffen, stellt man sich den Ort des Puncts vor, aus welchem sie heruntergezogen gedacht werden. Auf diese Art erhält man den Grundriß des Berges dergestalt, daß man nur die Höhe eines jeden Puncts über der Ebene zu wissen nöthig hat, um sich seine wahre Lage aus dem Grundrisse vorzustellen, weil dieser die horizontale Lage des Puncts angiebt. Mehrerer Vollständigkeit halber werden dem Grundrisse noch Profilisse beygefügt, aus welchen man sich die Figur des Berges, seiner Höhe nach, deutlicher vorstellen kann. Je regulärer der Berg ist, desto weniger Profilrisse sind dazu nothwendig. Wenn also z. E. der Berg ein Abschnitt einer Kugel wäre,

wäre, so würde ein einiger Profilriß hinreichend seyn.

§. 3.

Nun hindert nichts, daß man nicht z. E. Europa als einen solchen Berg sollte ansehen können, dessen Fuß die Fläche des Meeres beym Cap. St. Vincent, bey dem Einfluß des Nils und bey der nördlichsten Spitze von Norwegen ist. Durch diese drey Puncte läßt sich eine ebene Fläche gedenken, und auf diese können aus jeden Oertern senkrechte Linien gezogen werden, welche die Lage der Oerter angeben. Das Profil ist durch einen Circulbogen leicht zu bestimmen, und auf diese Art wird die Charte von Europa dem Grundrisse eines Berges ganz ähnlich.

§. 4.

Die hiezu erforderliche Projectionsart ist die so genannte Orthographische, und ihre Gesetze sind längst bekannt. Man kann aber damit höchstens nur die halbe Erdfläche vorstellen, und zu Charten von einzelnen Ländern ist sie meines Wissens noch nie gebraucht worden. Hingegen haben sie die Astronomen zu Entwerfung der Finsternisse desto öfterer gebraucht. Sie ist endlich auch zu solchen Planisphärien des Himmels gebraucht worden, wodurch man den Auf- und Untergang der Sonne und der Sterne nach der Verschiedenheit der Polhöhen auf eine leichte Art hat vorstellig machen wollen, und da dient sie

sie zugleich auch, für jede Polhöhen die Sinus der Sonnenhöhe für jede Stunde leicht zu finden. Es braucht dazu weiter nichts, als daß man die Sphäre auf die Fläche des Colurus Solstitiorum orthographisch entwerfe. Die sämtlichen Circul der Sphäre erscheinen bey dieser Projection theils als gerade Linien, theils als Circul, mehrentheils aber als Ellipsen.

§. 5.

Man hat sich aber an den Begriff, daß eine Landcharte einen Grundriß der Erdfläche vorstellen soll, nicht gebunden, sondern statt des Grundrisses die perspectivische Entwerfung gewählt. Damit sollte die Erdfläche so gezeichnet werden, wie sie aus einem gegebenen Punct betrachtet in das Auge fallen würde. Hierüber hat ganz neulich Hr. Prof. Karsten im 5ten Bande der bayerschen Abhandlung eine allgemeine analytische Theorie bekannt gemacht, und dadurch auch diesen Theil der angewandten Analysis erweitert. Da man indessen für die Lage des Auges unzählige Puncte wählen kann, aus welchen die Erdfläche perspectivisch kann entworfen werden, so hat man sich vorzüglich an dreyerley solcher Puncte gehalten, die an sich etwas vorzügliches haben. Einmal setzte man das Auge von der Kugel unendlich entfernt, und das gab die vorerwähnte orthographische Projection. Sodann nahm man den Punct irgend in der Oberfläche der Erde, und

und diese Projectionsart wurde die stereographische genennt, vermuthlich in Ermanglung eines bestimmteren Ausdruckes. Endlich setzte man das Auge in den Mittelpunct der Erde, und diese Projectionsart mag, weil mir kein anderer Name bekannt ist, die Centralprojection heißen.

§. 6.

Die stereographische Projectionsart hat viel vorzügliches darin, daß alle Circul der Sphäre darauf theils als gerade Linien, theils als Circul erscheinen, und daß alle Winkel auf der Kugelfläche in der Projection ihre Größe behalten. Sie wird daher auch bey Entwerfung der ganzen Erdfläche und Welttheile, so wie auch der Himmelskugeln gewöhnlich gebraucht, und besonders hatte Hr. Hase für einzelne Welttheile die von ihm so genannte horizontale stereographische Projectionsart eingeführt, wo das Auge in dem Nadir des Mittelpuncts des zu entwerfenden Landes gesetzt wird. Es ist dieses die 8te vom Varenius beschriebene Art. Hr. Kästner hat bey der göttingischen Societät der Wissenschaften eine analytische Theorie darüber vorgelesen, die nun unter seinen Dissert. mathem. et physicis in öffentlichem Drucke erschienen ist. Hr. Hase gebrauchte sie besonders, weil die Entfernung der Oerter von einander noch so ziemlich genau auf solchen Charten gemessen werden kann, und auch die Figur der Länder noch

noch ziemlich beybehalten wird. Bey Verzeichnung der Halbkugel der Erde wird gewöhnlich das Auge in den 90sten und 270sten Grad des Aequators gesetzt, weil auf diese Art die alte und die neue Welt jede besonders gezeichnet werden kann. Will man hingegen die Lage der Polarländer kenntlicher machen, so wird das Auge in die Pole gesetzt, und dies ist der Grund, warum die beyden Hemisphärien des Herrn Grafen von Redern, so die Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin herausgegeben, die Pole in der Mitte haben, weil auf diese Art die Lage der unbekannten Südländer besser in die Augen fällt. Uebrigens werden bey der stereographischen Projectionsart die Länder desto größer, je mehr sie von der Mitten entfernt sind, weil die Distanzen wie die Tangenten der halben Entfernung vom Mittelpunct zunehmen.

§. 7.

Die Centralprojection hat den Vortheil, daß alle größte Circul der Sphäre auf derselben gerade Linien sind, und zwar mit Ausschluß jeder kleinern Circul, welche allemal durch Kegelschnitte vorgestellt werden, und nur in einem besondern Fall circulär sind. Diese Entwerfungsart leistet demnach den Vortheil, daß auf derselben alle die Oerter in gerader Linie liegen, die auf der Erdfläche auf einem größten Circul sind. Indessen sind mir wenigstens keine nach dieser Art gezeichnete Landcharten bekannt, es sey

sey denn, daß man diejenigen dahin rechnen wolle, die von Liebhabern der Gnomonic auf Sonnenuhren gezeichnet werden, wo diese Entwerfungsart eigentlich vorkömmt. Hingegen lassen sich Himmelscharten mit gutem Vortheile auf diese Art verzeichnen, und dies ist auch von Doppelmayer auf den 6 Platten geschehen, worauf derselbe den ganzen Himmel, nur nicht mit der Genauigkeit, die man dabey verlangen konnte, vorstellig gemacht hat. Uebrigens kann bey der Centralprojection die Halbkugel nicht ganz vorgestellt werden, weil die Entfernungen vom Mittelpunct aus, wie die Tangenten der Grade anwachsen. Dieses macht auch, daß die Größe der Länder sehr ungleich, und ihre Figur merklich verunstaltet wird.

§. 8.

Es haben demnach die drey erwähnten perspectivischen Entwerfungen ihre Vortheile und Nachtheile, und keine thut allen Bedingungen (§ 1.) Genüge. Besonders hat die Bedingung, daß die Größe der Länder ihre wahre Verhältniß behalte, bey keiner statt, und die Bedingung von der Ausmessung der Entfernung der Oerter leidet dabey theils Einschränkung, theils fordert sie besonders dazu ausgesonnene Constructionen. Dieses hat bereits Richmann in dem 13ten Bande der Petersburgischen Commentarien, so 1751 herausgekommen, angemerkt, und in der daselbst befindlichen

chen Abhandlung: de perficiendis mappis geographicis, imprimis universalibus, per idoneas Scalas metiendis distantiis inseruientes. Was **Richmann** in dieser Abhandlung vorbringt, ist überhaupt gut angemerkt, es leidet aber noch sehr merkliche Erweiterungen und schicklichere Verbesserungen.

§. 9.

Entwerfungen zu ganz besondern Absichten erfordert die Schiffarth. Dieses hat auch den Seekarten eine ihnen eigene Gestalt gegeben, die seit **Merkators** Zeiten alle Vollkommenheit erreicht zu haben scheint. Zugleich erhellte auch daraus, daß man die perspectivische Entwerfung weder als die Hauptabsicht noch als den einigen Grund zu Verzeichnung der Landcharten anzusehen habe. Denn da ohnehin nicht alle Absichten zugleich erhalten werden können, so ist es zureichend, wenn eine Charte derjenigen Absicht Genüge leistet, zu welcher sie eigentlich dienen soll. Es soll aber billig die Entwerfungsart eine oder mehrere bestimmte Absichten haben, und derselben genau angemessen seyn. So z. E. ist es nicht abzusehen, wozu des **Bellin** cylindrisch entworfene Charte besonders dienen soll, weil sie keiner bestimmten Absicht durchaus Genüge leistet.

§. 10.

Die elliptische Figur der Erde ist von der sphärischen kaum genug verschieden, daß man bey Entwerfung der Charten darauf Acht haben sollte.

sollte. Indessen hat Hr. Pr. **Lowiz** dennoch in den Schriften der ehemaligen **cosmographischen Gesellschaft**, und namentlich im deutschen **Staatsgeographus** eine Entwerfung der sphäroidischen Erdfläche berechnet und angegeben, wo alle Winkel ihre Größe behalten, wie es bey der **stereographischen Entwerfung** der Kugelfläche und bey **Mercators** Seecharten geschieht. Es ist auch die Lage der Länder und Oerter noch lange nicht so genau bestimmt, daß man auf einen Unterschied von etlichen Meilen, so bey der sphäroidischen Figur bey großen Distanzen zum Vorschein kommen kann, sollte denken können. Selbst auch dieser Unterschied müßte durchaus als genau bestimmt angenommen seyn, welches eben noch nicht ist. Es ist daher nicht zu verwundern, wenn man bey der sphärischen Figur bleibt. Sie wird ohnehin bey dem Abdrucke des Kupfers ungleich mehr elliptisch, als es die Erde an sich schon ist, weil das Papier beym Trocknen sich nach der Länge anders als nach der Breite einzieht. Dadurch kann die Erde sowohl ablang als abgeplattet erscheinen, je nachdem das Kupfer abgedruckt wird. Die sphäroidische Figur ist demnach schon aus diesem Grunde mehr ein Gegenstand der Berechnung als der Zeichnung. Wir werden sie indessen nicht ganz übergehen, sondern sie in folgendem besonders vornehmen, und sehen, was sich dabey anmerken läßt.

 §. 11.

§. 11.

Was nun von denen anfangs erwähnten Absichten der Landcharten noch wenig oder gar nicht erhalten wird, das sind die verhältnißmäßigen Distanzen und Größen der Länder. Letzteres kann, und zwar auf mehrerley Art, erhalten werden. Und da **Richmann** damit noch kaum einen Anfang gemacht hat, so wird es Stoff geben, im folgenden umständlicher davon zu handeln. Ersteres geht auf keine Art allgemein und genau an, wenn man weiter nichts, als die in Specialcharten übliche gleichtheilige Maaßstäbe dazu gebrauchen will. Constructionen, wodurch die Distanzen bey verschiedenen Projectionsarten können gefunden werden, sind an sich gut, aber gewöhnlich zu weitläuftig und unbequem. Die einfachste Art ist die bey **Mercators** Seecharten übliche. Sie giebt aber den Weg des Schiffes und seine Länge, demnach nur in dem einigen Fall die eigentliche Distanz an, wo das Schiff gerade nach dem Mittagskreise fortsegelt. **Richmann** giebt die Sache eher durch Berechnung als durch eine leichte Construction an, und da mir in dieser Sache weiter nichts brauchbareres bekannt ist; so habe ich mir die Aufgabe als ganz unaufgelößt vorgesetzt, und werde, was ich dienliches gefunden, nun vortragen.

I. Charten zu Bestimmung der Distanzen der Oerter.

§. 12.

Es seyn auf der Kugelfläche drey Oerter A, P, B. Ihre Distanzen seyn Fig. 1. 2.

$$AP = \xi$$
$$BP = \eta$$
$$AB = \zeta$$

und der Winkel

$$APB = \lambda$$

Hiebey mag P der Pol seyn, und da sieht man leicht, daß alsdann λ der Unterschied der Länge beyder Oerter A, B ist.

§. 13.

Nun seyn eben die Oerter auf der zu entwerfenden Charte a, p, b. Ihre Distanzen seyn

$$ap = x$$
$$bp = y$$
$$ab = z$$

Dadurch verstehe ich hier die Länge der geraden Linien ap, bp, ab.

§. 14.

Da nun auf der Kugelfläche die drey Winkel A, P, B zusammen allemal größer denn 180 Grade, hingegen die drey flache Winkel a, p, b allemal = 180 Gr. sind, so können sie nicht wohl mit einander verglichen, noch in ein schickliches Verhältniß gebracht werden. Ich habe daher den Winkel $apb = APB = \lambda$ gemacht. Dadurch aber erhielt der Ort B eine Bestimmung, die bey den andern beyden Oertern A, B nicht kann angebracht werden, und so sahe ich leicht, daß alle auf der Landcharte zu zeichnende Oerter eine Beziehung auf den Punct p haben würden. Ich ließ mich indessen dadurch nicht abhalten, den fernern Erfolg zu untersuchen, weil ich immer noch die Wahl frey hatte, andere Voraussetzungen anzunehmen, wenn es nicht nach Wunsch gehen würde.

§. 15.

Nun gab mir die Trigonometrie die beyden Gleichungen

$$zz = xx + yy - 2xy.\cos.\lambda$$

$$\cos.\zeta = \cos.\xi.\cos.\eta + \sin.\xi.\sin.\eta.\cos.\lambda$$

In beyden kommt von dem Winkel λ der Cosinus vor, und dieses war an sich desto schicklicher, weil es genug war, zwischen x, y, z und ξ, η, ζ geschmeidige Vergleichungen zu suchen. Es war nemlich zu sehen, wiefern x, y, z Functionen von ξ, η, ζ seyn können. Und diese Frage löste sich in die auf, wiefern die zweyte Gleichung durch behörige Verwandlung der erstern ähnlich gemacht werden konnte?

§. 16.

Da nun in beyden Gleichungen ζ, z nur einmal vorkömmt, so fing ich damit an, und die Betrachtung, daß

$$\cos.\zeta = 1 - 2\sin.\tfrac{1}{2}\zeta^2$$

ist, gab die erste Verwandlung

$$2\sin.\tfrac{1}{2}\zeta^2 = 1 - \cos.\xi.\cos.\eta - \text{ſ.}\xi.\text{ſ.}\eta.\cos.\lambda$$

Damit war nun der erste Schritt zu der gesuchten Aehnlichkeit beyder Gleichungen gethan.

§. 17.

Der andere Schritt besteht ebenfalls darinn, daß ich

$$\cos.\xi = 1 - 2\sin.\tfrac{1}{2}\xi^2$$

$$\cos.\eta = 1 - 2\sin.\tfrac{1}{2}\eta^2$$

setzte, und damit erhielt ich

$$2\sin.\tfrac{1}{2}\zeta^2 = 2\sin.\tfrac{1}{2}\xi^2 + 2\sin.\tfrac{1}{2}\eta^2 - 4\sin.\tfrac{1}{2}\xi^2.\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\eta^2 - \text{ſ}\xi.\text{ſ}\eta.\cos.\lambda$$

oder

$$\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\zeta^2 = \text{ſ.}\tfrac{1}{2}\xi^2 + \text{ſ.}\tfrac{1}{2}\eta^2 - 2\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\xi^2.\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\eta^2 - \tfrac{1}{2}\text{ſ.}\xi.\text{ſ.}\eta.\cos.\lambda.$$

Hier sahe ich nun wohl, daß, wenn auch

$$\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\zeta = z$$

gesetzt werden konnte, es doch nicht angieng

$$\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\xi = x$$

$$\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\eta = y$$

zu setzen, um die Gleichungen ähnlich zu machen. Das einige Mittel war zu sehen, ob in der zuletzt herausgebrachten Gleichung

$$\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\zeta^2 = \text{ſ.}\tfrac{1}{2}\xi^2 + \text{ſ.}\tfrac{1}{2}\eta^2 - 2\sin.\tfrac{1}{2}\xi^2.\sin.\tfrac{1}{2}\eta^2 - \tfrac{1}{2}\text{ſ.}\xi.\text{ſ.}\eta.\cos.\lambda.$$

das Glied

$$2\,\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\xi^2.\sin.\tfrac{1}{2}\eta^2$$

weggeschaft werden könnte. Dieses gieng nun dadurch an, daß

$$\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\xi^2 - \sin.\tfrac{1}{2}\xi^2.\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\eta^2 = \text{ſ.}\tfrac{1}{2}\xi^2.\cos.\tfrac{1}{2}\eta^2$$

$$\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\eta^2 - \text{ſ.}\tfrac{1}{2}\eta^2.\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\xi^2 = \sin.\tfrac{1}{2}\eta^2.\cos.\tfrac{1}{2}\xi^2$$

ist. Und damit erhielt ich

$$\mathrm{s}.\tfrac{1}{2}\zeta^2 = \mathrm{s}.\tfrac{1}{2}\xi^2.\cos.\tfrac{1}{2}\eta^2 + \mathrm{s}.\tfrac{1}{2}\eta^2.\cos.\tfrac{1}{2}\xi^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{s}.\xi.\mathrm{s}.\eta.\cos.\lambda.$$

§. 18.

Diese Gleichung schien sich nun von der gesuchten Aehnlichkeit wiederum mehr zu entfernen, weil hier die Bögen ξ, η so viel, und mehr als anfangs, in allen drey Gliedern verwickelt sind. Indessen, um sie mehr zur Gleichartigkeit zu bringen, so setzte ich in dem letzten Gliede

$$\mathrm{s}.\xi = 2\,\mathrm{s}.\tfrac{1}{2}\xi.\cos.\tfrac{1}{2}\xi$$
$$\mathrm{s}.\eta = 2\,\mathrm{s}.\tfrac{1}{2}\eta.\cos.\tfrac{1}{2}\eta$$

Und damit erhielt ich

$$\mathrm{s}.\tfrac{1}{2}\zeta^2 = \mathrm{s}.\tfrac{1}{2}\xi^2.\cos.\tfrac{1}{2}\eta^2 + \mathrm{s}.\tfrac{1}{2}\eta^2.\cos.\tfrac{1}{2}\xi^2 - 2\,\mathrm{s}.\tfrac{1}{2}\xi.\cos.\tfrac{1}{2}\xi.\mathrm{s}.\tfrac{1}{2}\eta.\cos.\tfrac{1}{2}\eta.\cos.\lambda.$$

Hier blieb nun, um die Verwickelung aufzuheben, kein ander Mittel, als daß die ganze Gleichung durch

$$\cos.\tfrac{1}{2}\xi^2.\cos.\tfrac{1}{2}\eta^2$$

getheilt würde, und dieses gieng glücklich von statten, weil sich die Gleichung in

$$\frac{\mathrm{s}.\tfrac{1}{2}\zeta^2}{\cos.\tfrac{1}{2}\xi^2.\cos.\tfrac{1}{2}\eta^2} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\xi^2 + \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\eta^2 - 2\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\xi.\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\eta.\cos.\lambda.$$

verwandelte, und daher mit

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy.\cos.\lambda.$$

verglichen werden konnte.

§. 19.

§. 19.

Ich erhielt demnach

$$x = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\xi$$
$$y = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\eta$$
$$z = \frac{\mathrm{s}.\tfrac{1}{2}\zeta}{\cos.\tfrac{1}{2}\xi.\cos.\tfrac{1}{2}\eta} = \sin.\tfrac{1}{2}\zeta.\sec.\tfrac{1}{2}\xi.\sec.\tfrac{1}{2}\eta.$$

Damit waren also x, y ähnliche Functionen von ξ, η. Hingegen war z keine Function von ζ allein, sondern von ζ, ξ, η zugleich. Indessen hat sie doch den Vortheil, daß sie von dem Winkel λ unabhängig ist, und so lange nur dieser Winkel sich verändert, kann der Theiler $\cos.\tfrac{1}{2}\xi.\cos.\tfrac{1}{2}\eta$ als ein Coefficient von beständiger Größe angesehen werden. Endlich hängt z von ξ genau auf eben die Art, wie von η, ab.

§. 20.

Es ist aber $2\sin.\tfrac{1}{2}\zeta$ die Chorde des Bogens AB, demnach die Chorde der Distanz beyder Oerter A, B. Wenn also nur λ veränderlich ist, so wächst z in Verhältniß dieser Chorde. Diese Betrachtung macht es nun möglich, die Verhältniß zwischen z und der Chorde leicht zu bestimmen.

§. 21.

Denn man setze den Winkel $\lambda = 0$, so wird $\zeta = \xi - \eta$. Da nun ξ, η gegeben sind, so ist auch die Chorde von $\xi - \eta$ gegeben, und kann mit $z = x - y = \mathrm{tang}.\tfrac{1}{2}\xi - \mathrm{tang}.\tfrac{1}{2}\eta$ leicht verglichen werden.

§. 22.

Eben diese Vergleichung geht an, wenn man $\lambda = 180^\circ$ setzt. Denn da wird

$$\zeta = \xi + \eta$$
$$z = x + y = \text{tang.} \tfrac{1}{2}\xi + \text{tang.} \tfrac{1}{2}\eta$$

und z ist hier in Verhältniß von der Chorde von $(\xi + \eta)$.

§. 23.

Wir haben demnach zwischen beyden Figuren die Vergleichung

$$(x - y) : \text{chord.} (\xi - \eta) = z : \text{chord.} \zeta.$$

oder auch

$$(x + y) : \text{chord.} (\xi + \eta) = z : \text{chord.} \zeta.$$

§. 24.

Wenn man demnach auf dem Proportionalcircul eine Chordenlinie hat, so kann man die Distanz x auf eine von diesen beyden Arten finden. 1. Man trägt die Distanz $x - y$ auf die Grade $\xi - \eta$, um dem Proportionalcircul die Oefnung zu geben. Sodann trägt man die Distanz z auf, um die Grade von ζ zu finden. Oder 2. man erhält eben die Oefnung des Proportionalcirculs, wenn man die Distanz $x + y$ auf die Grade $\xi + \eta$ trägt. Dieses letztere ist zuverläßiger, weil $x - y$ oft sehr klein ist, und zuweilen vollends $= 0$ seyn kann.

§. 25.

Da bey dieser Berechnung die Winkel bey P, p ihre Größe behalten, und die Distanzen

$$x = \text{tang.} \tfrac{1}{2}\xi$$
$$y = \text{tang.} \tfrac{1}{2}\eta$$

gemacht werden, so ist die Verzeichnung der Landcharte stereographisch, und um desto schicklicher, weil man bereits viele nach derselben gezeichnete Planisphärien sowohl der Erd- als der Himmelskugel hat, wo der Mittelpunct der Pol ist. Es gehört demnach mit unter die vielen schönen Eigenschaften dieser Projectionsart, daß die Distanzen vermittelst der Chordenlinien eines Proportionalcirculs so leicht können gefunden werden, als immer, vermittelst desselben, Linien oder Chorden proportionirt werden können.

§. 26.

Fig. 3. Es seyn in der dritten Figur, die ein solches Planisphärium vorstellt, p der Pol, und a, b die zwey Oerter, deren Distanz gesucht wird. Der Parallelkreis von b geht durch c, γ, und es findet sich $ac = 30^\circ$, und $a\gamma = 110^\circ$. Demnach wird auf den Chordenlinien des Proportionalcirculs ac auf den 30sten Grad, oder $a\gamma$ auf den 110ten Grad getragen, um demselben seine Oefnung zu geben. Sodann trägt man ab auf, und findet $39\tfrac{1}{4}$ Grad für die Distanz der beyden Oerter a, b.

§. 27.

Fig. 4. Es sey bey eben der Projectionsart der eine Ort Q und die Oerter A, B, C, D - - - M liegen auf einem gleichen Parallelkreise, so sind die Linien QA, QB, QC - - - - QM den Chorden der Distanzen der Oerter A, B, C - - - - M von dem Orte A proportional. (§. 20.)

 §. 28.

§. 28.

Sind nun die Oerter oder Puncte A, B, C - - - - M auf dem Kreise herum gleich vertheilt, so ist dieses der Fall des berühmten Cotesischen Lehrsatzes. Nemlich die Linien QA, QB, QC - - - - QM sind die Factoren des Binomialausdruckes

$$a^m \pm b^m$$

Da nun diese Linien in Verhältniß der Chorden der Distanzen der Oerter A, B, C - - - - M von Q sind, so sieht man, daß der Cotesische Lehrsatz mit geringer Veränderung bey der Kugelfläche anwendbar ist, wo der Punct Q nicht in der Fläche des Circuls liegt, in welchem die Oerter oder Puncte A, B, C - - - - M gleich vertheilt herum liegen. Doch dieses sey hier nur im Vorbeygehen angemerkt.

§. 29.

Stellt nun PQ den Abstand des Pols vom Zenith, und der Circul ADGK den Parallelkreis der Sonne oder eines Sternes vor, so sind die Linien QA, QB, QC - - - - QM den Chorden des Abstandes der Sonne oder des Sternes vom Zenith proportional. Man setze z. E. die Abweichung der Sonne RA sey 20°, die Polhöhe RQ = 50°, so ist der Abstand des Parallelkreises vom Zenith AQ = 30°, und auf der nördlichen Seite QG = 110°. Wird demnach auf den Chordenlinien des Proportionalcirculs die Distanz AQ auf den 30ten, oder QG auf den

den 110ten Grad getragen, so hat das Instrument seine gehörige Oefnung, und, wenn man für jede beliebige Stunden die Distanzen QB, QC - - - - QF aufträgt, so wird man auf eine sehr leichte Art finden, wie viel die Sonne oder der Stern jede Stunde vom Zenith entfernt ist. Und daraus ergiebt sich die Höhe der Sonne oder des Sternes über den Horizont durch ein bloßes Abziehen von 90 Graden.

§. 30.

Wenn man keinen Proportionalcircul bey der Hand hat, so muß man sich gefallen lassen, einen Circul zu beschreiben, auf welchem im erstgegebenem Beyspiele AQ eine Chorde von 30° oder QG eine Chorde von 110° sey, und diesen Circul in Grade eintheilen.

§. 31.

Oder man zeichnet sich einen Maaßstab, auf welchem AQ der Sinus von halb 30° oder 15°, oder QG der Sinus von halb 110° oder 55° sey, so werden die Linien QB, QC, QD - - - - QF auf diesem Maaßstabe die Sinus der halben Distanzen der Sonne oder des Sternes vom Zenith angeben, welche sodann in den Sinustafeln aufgesucht leicht verdoppelt werden können. Dieses Verfahren ist etwas mühsamer, als der Gebrauch des Proportionalcirculs. Es ist aber viel genauer, weil die Chordenlinien auf den Proportionalcirculn selten weiter, als in ganze Grade eingetheilt sind.

§. 32.

§. 32.

Nachdem ich diese Sätze aus den analytischen Formeln herausgebracht, so hat mich die Betrachtung, daß sie so sehr einfach sind, veranlaßt, zu sehen, ob die Sache sich nicht eben so leicht synthetisch erweisen lasse. Zu diesem Ende entwarf ich mir in der fünften Figur die Kugel orthographisch, so daß ich den Augenpunct zwischen dem Pol und dem Aequator annahm. Es
Fig. 5. stellt daher DABa die Fläche des Aequators vor. P ist der Pol, so auf der vordern Seite der Kugel liegt, p der Pol auf der hintern Seite FPfp, EPep sind zween Mittagskreise, M, N zwey Oerter auf denselben, NR der durch N gehende Parallelkreis des Aequators. Nun sollen die Puncte M, N, R auf der Fläche des Aequators als stereographisch entworfen, vorgestellt werden. Zu diesem Ende zog ich CE, CF, und so stellen diese Linien die Projection der Mittagskreise PEp, PFp vor. Ferner zog ich pM, pN, pR, und dieses gab die Puncte m, n, r, welche demnach die stereographische Entwerfung der Puncte M, N, R vorstellen. Nun ist zu beweisen, daß

$$nm : rm = \text{chord. } NM : \text{chord. } RM$$

ist.

§. 33.

Zu diesem Beweise werde ich einen bereits von Pappus angegebenen Lehrsatz gebrauchen.
Fig. 6. Es seyen in dem Circul PEp die beyden Diameter Pp, CE senkrecht. Man ziehe pE, und aus p eine beliebige Chorde pN, so ist

$$pP : pN = pn : pC$$

Dieses folgt aus der Aehnlichkeit der beyden rechtwinklichten Triangel pCn, pNP ohne Mühe. Es ist demnach

$$pN.\ pn = pP.\ pC = pE^2$$

Das will sagen: das Product von pN und pn ist von beständiger Größe, so viel man auch immer den Winkel PpN abändert.

§. 34.

Diesem Lehrsatze zufolge haben wir demnach in der fünften Figur Fig. 5.

$$pm . pM = pr . pR = pn . pN,$$

daher auch

$$pm : pr = pR : pM.$$

Da nun dieses die Triangel pmr, pRM ähnlich macht, weil sie den Winkel RpM gemeinsam haben, so ist auch

$$pm : mr = pR : RM.$$

§. 35.

Ferner, da die Puncte N, R in gleichem Parallelkreise liegen, so ist

$$pn = pr$$
$$pN = pR$$

Es verwandelt sich hiedurch die erst gefundene Analogie

$$pm : pr = pR : pM$$

in

in folgende:

$$pm : pn = pN : pM$$

Dadurch aber sind auch die Triangel pnm, pMN, wegen des gemeinsamen Winkels in p, einander ähnlich, und es ist ebenfalls

$$pm : mn = pN : NM$$

demnach

$$pm : mn = pR : NM$$

Da nun auch

$$pm : mr = pR : RM$$

gefunden worden, so wird aus diesen beyden Analogien

$$pm : pR = mn : NM = mr : RM.$$

folglich

$$mn : mr = NM : RM$$

Und dieses war zu beweisen.

§. 36.

Bey Entwerfung kleinerer Stücke der Erdfläche, z. E. einzelner Länder, hat Hase ebenfalls seine stereographische Horizontalprojection gebraucht, und dadurch den Vortheil zu erhalten gesucht, daß die Entfernungen der Oerter mittelst eines ganz einfachen Meilenmaaßes genauer, als bey andern Entwerfungsarten gemessen werden könnten. Nun ist bey der Horizontalprojection das Auge im Nadir des Mittelpuncts der
Fig. 1.2. Charte p (fig. 2.) Und da (§. 19.)

$$z = \frac{\sin \frac{1}{2}\zeta}{\cos \frac{1}{2}\xi \cdot \cos \frac{1}{2}\eta}$$

so

so ist

$$\sin \tfrac{1}{2}\zeta = z \cdot \cos \tfrac{1}{2}\xi \cdot \cos \tfrac{1}{2}\eta$$

demnach

$$\tfrac{1}{2}\zeta = z \cdot \cos \tfrac{1}{2}\xi \cdot \cos \tfrac{1}{2}\eta + \tfrac{1}{6} z^3 \cdot \cos \tfrac{1}{2}\xi^3 \cdot \cos \tfrac{1}{2}\eta^3 + \&c.)$$

$$= z \cos \tfrac{1}{2}\xi \cdot \cos \tfrac{1}{2}\eta \,(1 + \tfrac{1}{6} z^2 \cos \tfrac{1}{2}\xi^2 \cdot \cos \tfrac{1}{2}\eta^2 + \&c.)$$

Oder da

$$\cos \tfrac{1}{2}\xi = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{4}\xi^2$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\eta = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{4}\eta^2$$

so ist

$$\tfrac{1}{2}\zeta = z\,(1 - 2\,\mathrm{s.}\tfrac{1}{4}\xi^2)\,(1 - 2 \sin \tfrac{1}{4}\eta^2)$$

$$(1 + \tfrac{1}{6} z^2 (1 - 2\,\mathrm{s.}\tfrac{1}{4}\xi^2)^2 (1 - 2\,\mathrm{s.}\tfrac{1}{4}\eta^2)^2 + \&c.)$$

oder, wenn wir die vierten und höhern Dignitäten weglassen,

$$\tfrac{1}{2}\zeta = z\,(1 - 2 \sin \tfrac{1}{4}\xi^2 - 2 \sin \tfrac{1}{4}\eta^2 + \tfrac{1}{6} z^2 + \&c.)$$

§. 37.

Diese Formel giebt demnach an, wie der Fehler der einfachen Meilenmaaße anfängt merklich zu werden, wenn ξ, η von mehreren Graden genommen werden. Der Fehler hängt von ξ und η auf einerley Art ab, und wird am größten, wenn man solche Oerter auf der Charte nimmt, die von dem Mittelpunct am meisten entfernt sind. In dieser Absicht können wir der Ordnung nach für $\xi = \eta$, 5, 10, 15, 20 Grade setzen. Es hängt aber auch der Fehler von z^2 ab, und wird, wenn z größer wird, vermindert. Nun kann für einerley Werth von ξ, η die Distanz z von 0 an bis auf tang $\tfrac{1}{2}\xi$ + tang $\tfrac{1}{2}\eta$ wach-

wachsen, wenn der Winkel λ von 0 bis auf 180° zunimmt.

§. 38.

Um also diese äußerste Grenze beyzubehalten, wollen wir

$$z = n\,(\tan \tfrac{1}{2}\xi + \tan \tfrac{1}{2}\eta)$$

setzen. Dieses giebt für $\xi = \eta$

$$z = 2n.\tan \tfrac{1}{2}\xi.$$

Und damit haben wir der Ordnung nach

$\xi = 5°$	$\tfrac{1}{2}\xi = 0{,}0873218\,n\,(1 - 0{,}0019036 + 0{,}0012708\,n^2)$
$= 10°$	$= 0{,}1740774\,n\,(1 - 0{,}0076106 + 0{,}0051045\,n^2)$
$= 15°$	$= 0{,}2633050\,n\,(1 - 0{,}0171102 + 0{,}0115549\,n^2)$
$= 20°$	$= 0{,}3526540\,n\,(1 - 0{,}0303846 + 0{,}0205608\,n^2)$
&c.	&c.

§. 39.

Die in ( ) eingeschlossene Coefficienten bestimmen den Fehler in Vergleichung mit der ganzen Distanz, weil sie angeben, um den wievielten Theil die Distanz muß vermindert werden. Sie hängen von n^2 ab, und werden, wenn $n = 1$, ungefehr um $\frac{2}{3}$ vermindert. Wenn $\xi = \eta = 20°$ ist, so ist der Fehler höchstens eine Meile auf 30, zum wenigsten aber eine Meile auf 100.

§. 40.

Will man hingegen den absoluten Fehler bestimmen, so müssen die Formeln ganz genommen werden. Und da findet sich ein maximum, wenn $n = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, demnach der Winkel $\lambda = 90°$ ist. Für diesen Fall findet sich

$\xi = \eta = 5°$	$\tfrac{1}{2}\zeta = 0{,}0617458 - 0{,}0001107$
10°	$0{,}1237277 - 0{,}0008851$
15°	$0{,}1861847 - 0{,}0029834$
20°	$0{,}2493640 - 0{,}0070898$

oder in Graden, Minuten, Secunden

$\xi = \eta = 5°$	$\tfrac{1}{2}\zeta =$ 3°	32′	16″	−	0′	23″
10°	7	5	21	−	3	3
15°	10	40	3	−	10	15
20°	14	17	15	−	24	22

Man sieht hieraus, daß, wenn man keine Minute fehlen will, man ξ und η nicht über 5° annehmen müsse, und folglich die Charte nicht über 10° Breite fassen kann.

§. 41.

Uebrigens sind die Fehler, wegen der weggelassenen kleinern Glieder, hier um etwas zu groß angegeben (§. 36.). Will man sie aber genau bestimmen, so findet sich für den Fall, wo $\lambda = 90°$ und $\xi = \eta$ ist, die Formel

$$\operatorname{cos.}\zeta = \operatorname{cos.}\xi^2$$

Und diese giebt

$\xi = \eta = 5°$	$\tfrac{1}{2}\zeta =$ 3°	32′	0″	$z - \tfrac{1}{2}\zeta =$ 0′ 16″
10	7	3	11	2 10
15	10	32	43	7 20
20	13	59	43	16 32

II. Distanz der Oerter auf der Centralprojection.

§. 42.

Bey der Centralprojection wird, wie bereits oben (§. 5.) erwähnt worden, das Auge in den Mittelpunct der Kugel gesetzt. Das Auge sieht demnach alle Puncte der Kugelfläche in ihrer wahren Lage. Diese Lage wird nun durch die Projection allerdings verändert. Die größten Circul der Sphäre erscheinen als gerade Linien, und statt der Winkel kommen ihre Tangenten vor.

§. 43.

Fig. 7. Man setze demnach, der Punct C sey derjenige, wo die Tafel die Kugel berührt, und der Halbmesser der Kugel sey = CR. Vollendet man das Quadrat ARBDE also, daß AR = RB = CR, und CR auf AB rechtwinklicht sey; so läßt sich auf demselben der 6te Theil der Kugel entwerfen, weil dieses Quadrat eine Seite des um die Kugel beschriebenen Cubus vorstellt. So sehen auch die oben (§. 6.) erwähnten sechs Doppelmayerschen Platten aus, worauf er die sämmtlichen Sternbilder gezeichnet hat.

§. 44.

Es seyen nun M, N zween Sterne (oder, wenn man die Erdfläche entwirft, zwey Oerter). Durch

Durch diese ziehe man eine gerade Linie MN, so stellt dieselbe den durch die beyden Sterne oder Oerter M, N gehenden größten Circul der Sphäre vor. Um nun die Distanz dieser beyden Puncte M, N zu finden, so braucht es weiter nichts, als daß man den Winkel bestimme, den diese beyden Puncte im Mittelpuncte der Sphäre oder des Cubus bilden. Zu diesem Ende ziehe man durch C die Linie PCS auf MN senkrecht, so muß erstlich die Entfernung des Auges von dem Punct P gefunden werden. Man trage CP aus C in Q, so wird RQ diese Distanz seyn, weil CR die Distanz des Auges von der Tafel ist, und die aus dem Auge in C gezogene Linie mit CP in C einen rechten Winkel macht, welcher hier durch QCR vorgestellt wird. Man trage ferner QR aus P in S; so ist S der Punct, in welchem die Linien NS, MS gezogen werden müssen, und man wird den Winkel NSM haben, welcher von den Sternen M, N im Auge oder im Mittelpunct der Sphäre oder des Cubus gebildet wird. Dieser Winkel gemessen giebt die Distanz der Sterne MN in Graden, Minuten rc. an. Auf diese Art können demnach auf den sechs Doppelmayerschen Platten die Distanzen der Sterne sehr leicht gemessen werden.

III. Construction zu Bestimmung der Distanzen.

§. 45.

Bey der orthographischen Projection lassen sich die Distanzen der Oerter durch eine leichte Construction bestimmen, die sich aus dem oben (§. 3.) gesagten von selbst darbietet. Man findet sie auch beym Varenius, der sie aus dem Maurolycus, als ihrem ersten Erfinder, anführt. Da sie keine Schwürigkeit hat; so werde ich mich nicht länger dabey aufhalten, sondern zu der Formel (§. 18.)

$$\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\zeta^2 = \text{ſ.}\tfrac{1}{2}\xi^2.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\eta^2 + \text{coſ.}\tfrac{1}{2}\xi^2.\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\eta^2 - 2\,\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\xi.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\eta.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\xi.\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\eta.\text{coſ.}\lambda$$

zurücke kehren, und aus derselben eine andere Construction herleiten.

§. 46.

Zu diesem Ende nehme man diese Formel vierfach

$$(2\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\zeta)^2 = (2\,\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\xi.\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}\eta)^2 + (2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\xi.\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\eta)^2 - 8\,\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\xi.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\eta.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\xi.\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\eta.\text{coſ.}\lambda$$

Da nun

$$2\,\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\xi.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\eta = \text{ſ.}\frac{\xi+\eta}{2} + \text{ſ.}\frac{\xi-\eta}{2}$$

$$2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\xi.\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\eta = \text{ſ.}\frac{\xi+\eta}{2} - \text{ſ.}\frac{\xi-\eta}{2}$$

$$2\,\text{ſ.}\tfrac{1}{2}\zeta = \text{chord.}\zeta$$

ist,

ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\text{chord.}\,\zeta^2 = {} & \left[\text{ſ.}\frac{\xi+\eta}{2} + \text{ſ.}\frac{\xi-\eta}{2}\right]^2 \\ & + \left[\text{ſ.}\frac{\xi+\eta}{2} - \text{ſ.}\frac{\xi-\eta}{2}\right]^2 \\ & - 2\left[\text{ſ.}\frac{\xi+\eta}{2} + \text{ſ.}\frac{\xi-\eta}{2}\right].\left[\text{ſ.}\frac{\xi+\eta}{2} - \text{ſ.}\frac{\xi-\eta}{2}\right].\text{coſ.}\lambda\end{aligned}$$

Diese Formel kann nun eben so wie (§. 18.) mit

$$z^2 = x^2 + \eta^2 - 2xy.\text{coſ.}\lambda$$

verglichen werden. Es ist demnach

$$x = \text{ſ.}\frac{\xi+\eta}{2} + \text{ſ.}\frac{\xi-\eta}{2}$$

$$y = \text{ſ.}\frac{\xi+\eta}{2} - \text{ſ.}\frac{\xi-\eta}{2}$$

$$z = \text{chord.}\,\zeta.$$

Die ganze Sache kömmt demnach auf die Sinus der halben Summe und halben Differenz der Aequatorshöhen an. Man kann sie nach einem beliebigen Maaßstabe aus den Tafeln nehmen, und die zweyte Figur damit construiren, Fig. 2.
so wird die Seite z auf eben dem Maaßstabe die Chorde der Distanz beyder Oerter angeben.

IV. Allgemeinere Methode, die Kugelfläche so zu entwerfen, daß alle Winkel ihre Größe behalten.

§. 47.

Die **stereographische Entwerfung** der Kugelfläche, so wie **Mercators** Seecharten, haben das besonders, daß dabey alle Winkel ihre Größe behalten, die sie auf der Kugelfläche haben. Dieses giebt die gröste mögliche Aehnlichkeit, die eine ebene Figur mit einer auf der Kugelfläche verzeichneten haben kann. Die Frage blieb aber noch zurücke, ob diese Eigenschaft bey bemeldten zwo Entwerfungsarten allein vorkomme, oder ob nicht diese Entwerfungsarten, so sehr sie auch verschieden zu seyn scheinen, durch mehrere Mittelstuffen an einander grenzen? **Merkator** stellt die Mittagskreise durch Parallellinien vor, welche den Aequator senkrecht durchschneiden, und nach den Logarithmen der Cotangenten der halben Aequatorshöhe eingetheilt werden. Der Aequator selbst wird in 360 gleiche Theile, als so viele Grade getheilt. Bey dieser Entwerfungsart ist also der Winkel, unter dem die Mittagskreise sich durchschneiden sollten, $= 0$, weil dieselben gleichlaufend sind. Hingegen bey der **stereographischen Entwerfung**, welche aus dem Pol geschieht, durchschneiden sich die ebenfals geradlinichten Mittagskreise unter ihren wahren Winkeln. Wenn (Fig. 3.)

Wenn es demnach zwischen beyden Entwerfungsarten Mittelstuffen geben soll, so müßen diese darin gesucht werden, daß man die Winkel, unter welchen die Mittagskreise sich schneiden sollen, in beliebiger Verhältniß größer oder kleiner macht, als die, unter denen sie sich auf der Kugelfläche durchschneiden. Dieses ist nun der Weg, den ich hier einschlagen werde.

§. 48.

Es sey demnach P der Pol; PM, $P\mu$ zween Mittagskreise, und der Winkel $MP\mu$ unendlich klein. Der Punct M sey für die Aequatorshöhe ε, der Punct N für die Aequatorshöhe $\varepsilon + d\varepsilon$. Den Winkel $MP\mu$ setze man $= m.\, d\lambda$, wo $d\lambda$ den Unterschied der Länge, m aber die Verhältniß vorstellt, in welcher der Winkel $MP\mu$ größer oder kleiner ist als der wahre. Nun ist die Bedingung, daß (Fig. 8.)

$$\mu M : MN = d\lambda.\, \sin.\varepsilon : d\varepsilon$$

seyn soll, damit das Trapez $\mu MN\nu$ demjenigen auf der Kugelfläche, so dadurch vorgestellt wird, ähnlich werde. Setzt man demnach

$$PM = x$$
$$MN = dx$$

so ist

$$M\mu = x.\, md\lambda$$

demnach

$$mxd\lambda : dx = d\lambda \sin.\varepsilon : d\varepsilon$$

 Hier-

Hieraus folgt

$$\frac{dx}{x} = \frac{m\,d\varepsilon}{\sin.\varepsilon}$$

und

$$\log. x = m \log. \text{tang.} \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Die beständige Größe kann hier wegbleiben, und so wird $x = 1$ wenn $\varepsilon = 90^\circ$ wird, was auch immer m für einen Werth haben mag. Demnach ist $x = (\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)^m$.

§. 49.

Setzt man nun $m = 1$, so erhält man

$$x = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

so wie es bey der stereographischen Entwerfung statt hat.

§. 50.

Bey Merkators Seecharten ist $m = 0$. Hieraus würde nur $x = 1$ folgen. Wir können aber $\varepsilon = 90^\circ - p$ setzen, und damit wird

$$x = \text{tang.}\ (45 - \tfrac{1}{2}p)^m$$

$$x = \left(\frac{1 - t\tfrac{1}{2}p}{1 + t\tfrac{1}{2}p}\right)^m$$

welches

$$x = \frac{(1 - m\,t\tfrac{1}{2}p + m.\frac{m-1}{2}\,t\tfrac{1}{2}p^2 - \&c.).}{(1 - m.t\tfrac{1}{2}p + m.\frac{m+1}{2}.t\tfrac{1}{2}p^2 - \&c.)}$$

dem-

demnach für $m = 0$

$$\frac{1-x}{2m} = t\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{3}t\tfrac{1}{2}p^3 + \tfrac{1}{5}t\tfrac{1}{2}p^5 + \tfrac{1}{7}t\tfrac{1}{2}p^7 + \&c. = \log,\text{cot}.\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

giebt. Hier stellt nun $\frac{1-x}{m}$ die Grade vom Aequator an gerechnet vor, und diese wachsen in Verhältniß von $2 \log.\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\ e.$

§. 51.

Da man aber in der allgemeinen Formel

$$x = (\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)^m$$

die Wahl hat, den Werth von m nach Belieben zu bestimmen, so wollen wir noch eine Bedingung mitnehmen. Es soll also in dem Trapez $\mu MN\nu$ nicht nur μM, sondern auch νM zu MN die Verhältniß haben, die bey der Kugelfläche wirklich statt hat. Und da dieses nicht für jede Pol- oder Aequatorshöhe zugleich angeht, so soll es für eine bestimmte Aequatorshöhe E statt finden. Nun ist

$$N\nu = m d\lambda\ (x + dx)$$

und eben dieser Bogen auf der Kugelfläche ist

$$d\lambda. \sin. (\varepsilon + d\varepsilon) = d\lambda. (\sin. \varepsilon + \text{cos}. \varepsilon. d\varepsilon)$$

Dieses giebt demnach

$$d\varepsilon : dx = d\lambda\ (\sin. \varepsilon + \text{cos}. \varepsilon. d\varepsilon) : m d\lambda\ (x + dx)$$

Hieraus folgt

$$d\varepsilon. m\,(x + dx) = dx. \sin. \varepsilon + dx. \text{cos}. \varepsilon. d\varepsilon$$

$$\frac{m\,x}{dx} + m = \frac{\sin. \varepsilon}{d\varepsilon} + \text{cos}. \varepsilon$$

 Es

Es ist aber (§. 50.)

$$\frac{mx}{dx} = \frac{\sin.\varepsilon}{d\varepsilon}$$

demnach

$$\frac{\sin.\varepsilon}{d\varepsilon} + m = \frac{\sin.\varepsilon}{d\varepsilon} + \cos.\varepsilon$$

welches

$$m = \cos.\varepsilon$$

und also für die bestimmte Aequatorshöhe E,

$$m = \cos. E$$

giebt. Und damit ist die Formel

$$x = (\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)^{\cos. E}$$

so beschaffen, daß nach derselben für die Aequatorshöhe E. das Trapez $\mu MN\nu$ dem sphärischen, so es vorstellt, durchaus ähnlich ist. Es ist nemlich nichtnur μM zu MN sondern auch zu $N\nu$ in der Verhältniß, die diese Linien auf der Kugelfläche haben.

§. 52.

Ungeachtet nun diese durchgängige genaue Verhältniß nur für die Aequatorshöhe = E genau statt findet, so weicht sie doch vor und nach am allerwenigsten vom wahren ab, das will sagen, die Abweichung ist vor und nach ein minimum. Dieses macht, daß, wenn man z. E. eine Charte von Europa zu verzeichnen hat, man fur E die Aequatorshöhe des mittlern Pa-

Parallels von Europa nimmt. Und so wird E von ohngefehr 40° seyn. Wir können aber füglich

$$E = 41^\circ\ 24'\ 35''$$

und damit

$$\cos. E = \tfrac{3}{4}$$

setzen. Und so haben wir für eine Charte von Europa die Formel

$$\log. x = \tfrac{3}{4} \log. \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Diese giebt

ε	x	Diff.
10	0,16087	0,16087
20	0,27211	0,11124
30	0,37243	0,10032
40	0,46860	0,09617
50	0,56429	0,09569
60	0,66234	0,09805
70	0,76546	0,10312
80	0,87672	0,11126
90	1,00000	0,12328

Es ist klar, daß man für Europa die Grade ε nur vom 20ten bis zum 60ten gebraucht. Und da $m = \cos. E = \frac{3}{4}$ ist, so werden die Grade der Länge um $\frac{1}{4}$ kleiner genommen, so daß 30 Grad des Circuls eigentlich 40 Grad der Länge geben. Die Zeichnung stellt die 9te Figur vor. Fig. 9.

§. 53.

§. 53.

Es kann auch m so bestimmt werden, daß die Grade zweener gegebener Parallelkreise ihre wahre Verhältniß haben. Die beyden Parallelkreise seyn die von den Aequatorshöhen a, b; so muß dieser Bedingung gemäß

$$(\text{tang.} \tfrac{1}{2} a)^m : (\text{tang.} \tfrac{1}{2} b)^m = \text{sin. } a : \text{sin. } b$$

seyn. Hieraus folgt

$$m = \frac{\text{log. sin. } a - \text{log. sin. } b}{\text{log. tang. } \tfrac{1}{2} a - \text{log. tang. } \tfrac{1}{2} b}$$

§. 54.

Man nehme z. E. für Europa die Aequatorshöhen

$$a = 60^\circ$$
$$b = 20^\circ$$

so ist

$\text{l t} \tfrac{1}{2} a = 9{,}7614394$	$\text{l sin. } a = 9{,}9375306$
$\text{l t} \tfrac{1}{2} b = 9{,}2463188$	$\text{l sin. } b = 9{,}5340517$
$0{,}5151206$	$0{,}4034789$

und damit

$$m = \frac{0{,}4034789}{0{,}5151206} = 0{,}78327$$

Da nun dieser Werth der Cosinus von 38° 26′ ist, so ist hier (§. 51.)

$$E = 38^\circ\ 26'$$

Nun kann man allerdings auch für E diesen Werth annehmen, und damit erhellet, daß die hier

hier zum Grunde gelegte Bedingung mit der vorhin §. 51.) gebrauchten zugleich bestehen kann. Man kann eben so E zum Grunde legen, und dann für jede Aequatorshöhe a eine andere b bestimmen, so daß bey beyden die Grade der Parallelkreise ihre wahre Verhältniß haben. So z. E. wenn man, wie vorhin (§. 52.)

$$\text{cos. } E = \tfrac{3}{4}$$

setzt, und $a = 60^\circ$ annimmt, so findet man $b = 24^\circ\ 56'$. Denn es ist

$\text{log. t.} \tfrac{1}{2} a = 9{,}7614394$	$\text{log. sin. } a = 9{,}9375306$
$\text{log. t.} \tfrac{1}{2} b = 9{,}3445580$	$\text{log. sin. } b = 9{,}6248629$
$0{,}4168814$	$0{,}3126677$

demnach

$$m = \frac{0{,}3126677}{0{,}4168814} = \tfrac{3}{4}$$

§. 55.

Wollte man nun $m = 1$ setzen, wie dieses bey der stereographischen Entwerfung statt hat, oder $m = 0$, wie bey **Merkators** Seecharten (§. 49. 50.), so würde man in beyden Fällen $a = b$ erhalten. Demnach giebt es bey diesen beyden Entwerfungsarten nicht zween verschiedene Parallelkreise, deren Grade unter sich eben das Verhältniß, wie auf der Kugelfläche hätten, ungeachtet es, so bald m zwischen 0 und 1 fällt, unzählige giebt.

§. 56.

§. 56.

Wenn man $m < 1$ annimmt, so werden die Grade der Länge in der Verhältniß von 1 zu m kleiner, demnach gebraucht man nur m. 360 Gr. des Circuls für die 360 Grade der Länge. So z. E. wenn man, wie vorhin, $m = \frac{3}{4}$ setzt, so gebraucht man nur einen Ausschnitt von 270 Gr., um die 360 Grade der Länge vorzustellen. Soll demnach die ganze nördliche oder südliche Halbkugel vorgestellt werden, und der Anfang an das Ende passen, so kann der Ausschnitt von 270 Graden in Form eines Kegels gewölbt werden. Dieses giebt Coniglobia, worauf man schon längst gewohnt ist, die Halbkugeln des Himmels vorzustellen. Hier haben wir demnach eine solche Verfertigung derselben, wo alle Winkel ihre wahre Größe behalten, und demnach die Sternbilder mit denen am Himmel die größte mögliche Aehnlichkeit haben. Diesen Vorzug haben die bekannten Zimmermannschen Sternkegel nicht. Der Ausschnitt ist dabey von 300 Graden, und der Mittagskreis in 90 gleiche Theile getheilt, dieses macht, daß 10 Grade des Aequators 13 Graden des Mittagskreises gleich sind, und so sind die Längen den Breiten nicht proportional.

§. 57.

Da man bey solchen Sternkegeln ebenfalls die Wahl hat, den Werth von m in der Formel

$$x = (\text{tang}\, \tfrac{1}{2}\varepsilon)^m$$

besondern Absichten gemäß zu bestimmen, so werden wir setzen, daß die ersten 45° den folgenden gleich seyn sollen, so daß auf dem Sternkegel der 45ste Parallelkreis den Mittagskreis in zween gleiche Theile theile. Dieser Bedingung zufolge wird $x = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 45°$, demnach

$$\tfrac{1}{2} = (\text{tang}\, 22\tfrac{1}{2})^m$$

$$m = \frac{\log.\, 2}{\log.\, \text{tang}\, 67\frac{1}{2}°} = \frac{0{,}3010300}{0{,}3827757} = 0{,}78643$$

wofür man, weil es hier auf kleine Unterschiede nicht ankömmt, wegen bequemerer Rechnung $m = \frac{4}{5}$ oder auch, wie vorhin, $m = \frac{3}{4}$ annehmen kann, je nachdem man den Conus mehr oder weniger flach haben will. Will man denselben so flach, wie die Zimmermannschen haben, so muß $m = \frac{5}{6}$ genommen werden.

V. Fernere Erweiterung eben derselben Methode.

§. 58.

Wir werden nun den Fall setzen, daß die Mittagskreise Circul seyn sollen, welche sich in beyden Polen durchschneiden. Geschieht dieses so, daß die Durchschnittswinkel in den Polen ihre Größe behalten, so ist dieses die stereographische Entwerfungsart, nach welcher die meisten Planisphärien der Erdkugel entworfen werden, und die daher schon längst bekannt ist. Die Parallelkreise erscheinen darauf ebenfalls circulär, Fig. 10.

culär, und durchschneiden die Mittagskreise unter rechten Winkeln, so daß die Verhältniß der Grade der Länge und der Breite durchaus beybehalten wird.

§. 59.

Dieses Umstandes werden wir uns nun so bedienen, daß wir setzen, die Mittagskreise sollen sich in den Polen unter solchen Winkeln schneiden, die in der Verhältniß von 1 zu m größer oder kleiner, als die wahren sind. Die Frage ist nun, die Parallelkreise dergestalt zu ziehen, daß die Verhältniß zwischen den Graden der Länge und Breite, und so auch alle Winkel ihre wahre Größe behalten.

§. 60.

Hiebey bleiben nun die Parallelkreise vor wie nach circulär, und sie durchschneiden die die Mittagskreise vorstellenden Circul vor wie nach unter rechten Winkeln. Auch werden sie eben so wie bey der stereographischen Entwerfungsart gezogen. Es bleibt also nur, daß man für jeden Parallelkreis den Punct bestimme, durch welchen er gezogen werden muß.

§. 61.

Fig. 10. Es seyen demnach P, p die zween Pole, Pp ein Mittagskreis, welcher hier eine gerade Linie ist. Man theile Pp in A in zween gleiche Theile, und ziehe durch A die Linie DAB senkrecht, so wird diese den Aequator vorstellen. Nun sey B der

der Mittelpunct eines Circulbogens PMp, welcher einen von dem Mittagskreise PAp unendlich wenig entfernten Mittagskreis vorstelle. Der Unterschied der Länge sey $=\lambda$, so muß der Winkel $MPA = m.\lambda$ seyn. Man setze $AP = 1$, so ist $MA = \text{tang}\,\frac{1}{2} m\lambda$ oder, weil λ unendlich klein ist,

$$MA = \tfrac{1}{2} m\lambda.$$

Ferner ist $AB = \text{cotang.}\ m\lambda$, oder ebenfalls, weil λ unendlich klein ist,

$$AB = \frac{1}{m\lambda}$$

Man setze nun, der Punct R sey für die Aequatorshöhe ε.

Man mache

$$AR = x$$

$$-Rr = dx$$

so ist

$$MB = NB = \frac{1}{m\lambda} + \tfrac{1}{2} m\lambda$$

$$RB = \sqrt{\left(\frac{1}{m^2\lambda^2} + x^2\right)} = \frac{1}{m\lambda} + \tfrac{1}{2} x^2 m\lambda$$

demnach

$$NR = \tfrac{1}{2} m\lambda (1 - xx)$$

Nun soll

$$NR : Rr = \lambda.\ \text{sin.}\,\varepsilon : d\varepsilon$$

seyn, damit die Grade der Länge zu den Graden der Breite ihre wahre Verhältniß behalten. Wir haben demnach

$$-\tfrac{1}{2}m\lambda\,(1-xx):dx=\lambda\,\text{sin.}\,\varepsilon:d\varepsilon$$

woraus

$$-\frac{m\,d\varepsilon}{\text{sin.}\,\varepsilon}=\frac{2\,dx}{1-xx}$$

folgt. Man setze

$$x=\text{cos.}\,\phi$$

so ist

$$\frac{m\,d\varepsilon}{\text{sin.}\,\varepsilon}=\frac{2\,d\phi}{\text{sin.}\,\phi}$$

welches

$$(\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon)^m=\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\phi^2$$

giebt, woraus man, weil

$$x=\frac{1-t\frac{1}{2}\phi^2}{1+t\frac{1}{2}\phi^2}$$

ist, den Werth

$$x=\frac{1-(\text{tang.}\,\frac{1}{2}\varepsilon)^m}{1+(t.\,\frac{1}{2}\varepsilon)^m}=1-\frac{2}{\text{cot.}\,\frac{1}{2}\varepsilon^m+1}$$

erhält.

§. 62.

Hiebey hat man nun wiederum die Wahl, den Werth von m nach Belieben zu bestimmen. Was sich aber am natürlichsten darbeut, ist, daß man

$$m=\tfrac{1}{2}$$

setze. Denn bey $m=0$ verfällt man auf Merkators

tors Zeichnung der Seecharten. Und bey $m=1$ kömmt die längst bekannte **stereographische** Entwerfungsart heraus, wo nur die halbe Kugelfläche auf der mit dem Halbmesser AP beschriebenen Circulfläche vorgestellt wird. Hingegen bey $m=\frac{1}{2}$ bringt man die ganze Kugelfläche darauf, weil die Mittagskreise sich in den Polen unter halben Winkeln schneiden, und dadurch die 360 Grade der Länge auf 360 halbe oder 180 ganze Grade herunter gesetzt werden.

§. 63. vgl. Vorrede letzte S.

Ich habe zu diesem Ende $m=\frac{1}{2}$ gesetzt, und da fand sich für

$\varepsilon=90$	$x=0,00000$
80	0,04383
70	0,08888
60	0,13648
50	0,18844
40	0,24746
30	0,31783
20	0,40856
10	0,54346

Dadurch ließen sich nun die Parallelkreise von 10 zu 10 Graden ziehen, wie sie in der 11ten Fig. 11.
Figur vorgestellt sind. Sie durchschneiden alle Mittagskreise unter rechten Winkeln, und die Mittagskreise selbst laufen in beyden Polen unter solchen Winkeln zusammen, welche halb so groß als die wahren sind. Endlich haben aller Orten die Grade der Breite zu den Graden der

 Länge

Länge ihre wahre Verhältniß, und alle Winkel behalten ihre wahre Größe, die zween einige Puncte, so die Pole vorstellen, ausgenommen, weil da die Winkel nur die Helfte ihrer Größe haben.

§. 64.

Es ist noch anzumerken, daß es bey dem Integriren der Formel (§. 61.)

$$\frac{m\,d\varepsilon}{\sin.\varepsilon} = \frac{2\,d\phi}{\sin.\phi}$$

willkührlich bliebe, nach Belieben bey dem Integral

$$\tfrac{1}{2} m \log.\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2} = \varepsilon \log.\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}\phi + Const.$$

die beständige Größe zu bestimmen. Man bestimme sie z. E. überhaupt so, daß $x = 0$ und damit $\phi = 90^\circ$ werde, wenn $\varepsilon = E$ wird. Dieses wird die allgemeinere Formel

$$x = 1 - \frac{2}{(\operatorname{tang}.\frac{1}{2}E)^m.(\cot.\frac{1}{2}\varepsilon)^m + 1}$$

geben. Und man erhält dadurch, daß die gerade Linie, welche in der 10ten Figur den Aequator vorstellt, einen beliebigen Parallelkreis vorstelle. Dessen ohnerachtet wird man für den Pol, wo $\varepsilon = 0$ ist

$$x = +1$$

und für den Pol, wo $\varepsilon = 180^\circ$ ist

$$x = -1$$

und

und damit die beyden Pole von dem Mittelpunct gleich weit entfernt erhalten. Die Folge davon ist aber nur, daß die Grade der Breite auf beyden Seiten des Aequators einander unähnlich werden, und die Zeichnung weniger regulär ist, als wo man $E = 90^\circ$ und damit $\operatorname{tang}.\frac{1}{2}E = 1$ setzt, wie es in der Figur geschehen, die etwas ungleich unbedingteres hat.

VI. Allgemeinster Vortrag eben derselben Methode.

§. 65.

Wenn es die Frage ist, die Kugelfläche überhaupt so zu entwerfen, daß die Mittagskreise von den Parallelkreisen durchaus unter rechten Winkeln durchschnitten werden, die Grade der Breite zu den Graden der Länge aller Orten ihre wahre Verhältniß, und damit auch alle Winkel ihre Größe behalten; so machen die bisher betrachteten Fälle nur einen geringen Theil von allen möglichen hieher gehörigen Fällen aus, da diese Kreise nicht blos durch gerade Linien und Circulbögen, sondern durch unzählige Arten von krummen Linien mit Beybehaltung ersterwähnter Bedingnisse vorgestellt werden können. Die Aufgabe in dieser völligen Allgemeinheit vorgetragen, ist, wo nicht schwerer, doch wenigstens auch nicht leichter, als die von den Traiectoriis reciprocis, und mit derselben in

 einer

einer sehr engen Verbindung, weil unter diesen Traiectoriis auch wirklich mehrere Arten vorkommen, die der hier aufzulösenden Aufgabe Genüge leisten.

§. 66.

Eine allgemeine Auflösung dieser Aufgabe, dafern man nicht bey Differentialformeln und Quadraturen oder allgemeinen Benennungen von Functionen stehen bleiben will, scheint nicht wol zu erwarten zu seyn, da sichs leicht voraussehen läßt, daß sie sich auf unzählige und mit einander kaum etwas gemein habende krumme Linien ausdehnen muß. Ich habe mich daher sogleich, da ich die zum Grunde liegende Differentialformeln gefunden, zu den unendlichen Reihen gewendet, und würde es gethan haben, wenn auch zu völliger und allgemeiner Integrirung der Differentialformeln mehr Anschein da gewesen wäre. Denn so oft man aus Ermangelung einer gerade zum Ziel führenden Methode die Integralien erst durch blindhin anzustellende Versuche finden muß, da rechne ich die unendlichen Reihen mit unter solche Versuche. Es ist klar, daß diese sich summiren lassen, so oft das Differential wirklich integrirt werden kann, und es sind mir schon öfters Fälle vorgekommen, wo die Summe der Reihe leichter als das Integral aus der Differentialformel gefunden werden konnte, und sodann die Spur anzeigte, wie es hätte gefunden werden können, wenn man die Methode voraus gewußt hätte.

§. 67.

§. 67.

Es stelle demnach in der 12ten Figur CA die Abscissenlinie, CE eine senkrechte Linie, so mit den Ordinaten parallel läuft, EM einen Parallelkreis für die Polhöhe p, und LM einen Mittagskreis für die Länge λ vor. Man ziehe die Ordinate nMQ, und setze Fig. 12.

$$CQ = x$$
$$QM = y$$

Ferner sey auf dem Mittagskreise m ein Punct für die Polhöhe $p + dp$, und auf dem Parallelkreise sey μ ein Punct für die Länge $\lambda + d\lambda$. Man ziehe nm, νM mit AC, und $\mu\nu$ mit CE parallel, so fordert die Bedingung der Aufgabe, daß der Winkel $\mu Mm = 90 = \nu Mn$, demnach die in ν, n rechtwinklichte Triangel $\nu M\mu$, nMm einander ähnlich seyn, und überdis sich μM zu Mm wie die Grade der Länge zu den Graden der Breite verhalten, demnach

$$\mu M : Mm = \text{cos}. p.\, d\lambda : dp$$

sey: wofür sich aber wegen der Aehnlichkeit der Triangel die beyden Analogien

$$\nu M : Mn = \text{cos}. p.\, d\lambda : dp$$
$$\nu\mu : mn = \text{cos}. p.\, d\lambda : dp$$

setzen lassen, welche beyde Bedingungen in sich schließen.

§. 68.

Nun ist sowohl x als y eine Function von p und λ zugleich. Wenn man demnach so wohl x

 als

als y differentiirt, so hat jedes Differential einen mit dp und einen mit $d\lambda$ multiplicirten Theil, und wir können überhaupt

$$dy = Mdp + md\lambda$$
$$dx = Ndp + nd\lambda$$

setzen, und damit M, m, N, n als Functionen von p und λ ansehen. Nun ist für einen und eben denselben Mittagskreis LM die Länge λ beständig, demnach $d\lambda = 0$. Dieses giebt in der Figur

$$+ dy' = Mn = Mdp$$
$$- dx' = - mn = Ndp$$

Hinwiederum ist für einen und eben denselben Parallelkreis EM die Breite p beständig, und damit $dp = 0$. Dieses giebt

$$+ dy'' = \mu\nu = md\lambda$$
$$+ dx'' = \nu M = nd\lambda$$

so daß also die ganzen Differentialien

$$dy = dy' + dy'' = Mn + \mu\nu$$
$$dx = - dx' + dx'' = - mn + M\nu$$

sind.

§. 69.

Setzt man nun diese Werthe in vorigen beyden Analogien, so erhält man

$$+ nd\lambda : + Mdp = \cos. p. d\lambda : dp$$
$$+ md\lambda : - Ndp = \cos. p. d\lambda : dp$$

Und hieraus

$$+ M \cos. p = n$$
$$- N \cos. p = m$$

§. 70.

§. 70.

Durch diese zwo Gleichungen lassen sich nun in den Differentialformeln (§. 68.)

$$dy = Mdp + md\lambda$$
$$dx = Ndp + nd\lambda$$

von den vier Functionen M, m, N, n zwo wegschaffen, und man erhält, wenn man z. E. M und m wegschaft,

$$dy = \frac{ndp}{\cos. p} - N \cos. p. d\lambda$$

wo demnach y durch die von x herrührende Functionen n, N ausgedrückt, und damit eine Function von x wird.

§. 71.

So z. E. bey **Merkators** Entwerfung ist

$$x = \lambda$$

demnach

$$dx = d\lambda$$

Dieses macht

$$N = 0$$
$$n = 1$$

demnach

$$dy = \frac{dp}{\cos. p}$$

$$y = \log. \text{tang.} (45° + \tfrac{1}{2} p)$$

§. 72.

Eben so ist bey der **stereographischen** Entwerfung, wo C der Mittelpunct, CA der Aequator ist,

$$x = \frac{\sin.\lambda.\cos.p}{1+\cos.\lambda.\cos.p}$$

demnach

$$dx = \frac{(\cos.\lambda+\cos.p)\cos.p\,d\lambda - \sin.p.\sin.\lambda.dp}{(1+\cos.\lambda.\cos.p)^2}$$

Dieses macht

$$N = -\frac{sp.s\lambda}{(1+\cos.\lambda.\cos.p)^2}$$

$$n = +\frac{(\cos.\lambda+\cos.p)\cos.p}{(1+\cos.\lambda.\cos.p)^2}$$

demnach

$$dy = \frac{(\cos.\lambda+\cos.p)\,dp + sp.\cos.p.s\lambda.d\lambda}{(1+\cos.\lambda.\cos.p)^2}$$

$$y = \frac{sp}{1+\cos.\lambda.\cos.p}$$

§. 73.

Auf diese Art kann x durch λ, p bestimmt, willkührlich angenommen, und die dazu gehörende Differentialgleichung für y gefunden werden. Und da man gleichergestalt

$$dx = -\frac{m}{\cos.p}dp + M\cos.p.d\lambda$$

findet, so hat man auch die Wahl, eine Gleichung für y anzunehmen, und daraus die Differentialgleichung für x zu finden. Es kann aber allzuleicht geschehen, daß eine solche Gleichung nichts vorstellt, weil sie so beschaffen seyn muß, daß, wenn man in $-\frac{m}{\cos.p}$ nur λ, und in M. cos. p nur p als veränderlich ansieht, diese beyde Ausdrücke durch das Differentiiren einerley Werthe geben, wenn ersterer durch dλ, letzterer durch dp getheilt wird. Eben dieses gilt auch von der ersten Gleichung (§. 70.)

$$dy = \frac{ndp}{\cos.p} - N\cos.p.d\lambda$$

Man kann übrigens auch aus den Differentialformeln

$$dy = Mdp + md\lambda$$
$$dx = Ndp + nd\lambda$$

vermittelst der Gleichungen

$$+M.\cos.p = n$$
$$-N.\cos.p = m$$

M und N wegschaffen, und da erhält man

$$dy = \frac{ndp}{\cos.p} + md\lambda$$

$$dx = -\frac{mdp}{\cos.p} + nd\lambda$$

Diese Gleichungen haben nun den Vortheil, daß nur das eine Glied mit dp und cos. p behaftet ist.

Das

Das hat auch den Herrn de la Grange, dem ich die Aufgabe mitgetheilt, bewogen, darüber noch fernere Untersuchungen anzustellen. Derselbe machte zu diesem Ende

$$\frac{dp}{\cos.p} = d\mu$$

welches $\mu = \log.\,\mathrm{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}p)$

giebt, und daraus folgte

$$dy = + n\,d\mu + m\,d\lambda$$
$$dx = - m\,d\mu + n\,d\lambda$$

demnach

$$dy\sqrt{-1} = + n\,d\mu.\sqrt{-1} + m\,d\lambda.\sqrt{-1}$$
$$dx = + m\sqrt{-1}.\,d\mu\sqrt{-1} + n\,d\lambda$$

ferner hieraus

$$dx + dy\sqrt{-1} = (m\sqrt{-1} + n).\,(d\mu\sqrt{-1} + d\lambda)$$
$$dx - dy\sqrt{-1} = (m\sqrt{-1} - n).\,(d\mu\sqrt{-1} - d\lambda)$$

Dieses zeigt nun überhaupt an, daß $m\sqrt{-1} + n$ eine Function von $\mu\sqrt{-1} + \lambda$, und hinwiederum $m\sqrt{-1} - n$ eine Function von $\mu\sqrt{-1} - \lambda$ seyn müße. (Man sehe z. E. Bougainville Calcul Integral P. II. Chap. 16. Probl. 2). Damit aber ist auch

$x + y\sqrt{-1}$ eine Function von $\mu\sqrt{-1} + \lambda$

und

$x - y\sqrt{-1}$ eine Function von $\mu\sqrt{-1} - \lambda$

Die Anwendung hievon auf besondere Fälle geht mit sehr ungleichem Erfolge von statten. Bey einigen der einfachsten Entwerfungsarten hat sie keine

keine Schwierigkeit. Bey andern aber thut man eben so wohl, wenn man gleich anfangs unendliche Reihen zu Hülfe nimmt. Uebrigens kann man noch ferner

$\frac{y}{x} = \mathrm{tang.}\,v$	$\frac{\mu}{\lambda} = \mathrm{tang.}\,w$
$y = \beta.\,\sin.\,v$	$\mu = \alpha\,\sin.\,w$
$x = \beta.\,\cos.\,v$	$\lambda = \alpha\,\cos.\,w$

setzen. Damit erhält man

$x + y\sqrt{-1} = \beta\,e^{+v\sqrt{-1}}$	$\mu\sqrt{-1} + \lambda = \alpha.e^{+w\sqrt{-1}}$
$x - y\sqrt{-1} = \beta.e^{-v\sqrt{-1}}$	$\mu\sqrt{-1} - \lambda = -\alpha e^{-w\sqrt{-1}}$

demnach, wenn man die Function durch φ anzeigt,

$$\beta.e^{+v\sqrt{-1}} = \varphi\,(\alpha.e^{+w\sqrt{-1}})$$
$$\beta.e^{-v\sqrt{-1}} = \varphi\,(-\alpha.e^{-w\sqrt{-1}})$$

Hieraus folgt nun, daß man z. E.

$$\beta e^{+v\sqrt{-1}} = A + B.\alpha^2.e^{2w\sqrt{-1}} + C\alpha^4.e^{4w\sqrt{-1}} + \&c.$$
$$\beta e^{-v\sqrt{-1}} = A + B.\alpha^2.e^{-2w\sqrt{-1}} + C\alpha^4.e^{-4w\sqrt{-1}} + \&c.$$

setzen kann; wodurch nach bekannten Formeln

$$x = \beta\cos.v = A + B.\alpha^2.\cos.2w + C.\alpha^4.\cos.4w + \&c.$$
$$y = \beta\sin.v = \quad B.\alpha^2.\sin.2w + C.\alpha^4.\sin.4w + \&c.$$

gefunden wird. Und da ist nun

$$w = \mathrm{Arc.\,tang.}\left(\frac{\log.\,\mathrm{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}p)}{\lambda}\right)$$

§. 74.

Da man auf diese Art dennoch auch auf unend-

unendliche Reihen verfällt, so werde ich unmittelbar zu den zwo Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dy &= Mdp + md\lambda \\ dx &= Ndp + nd\lambda \end{aligned}$$

(§. 70.) zurücke kehren. Der Umstand, daß hier

$$\begin{aligned} +M.\,\text{coſ.}\,p &= n \\ -N.\,\text{coſ.}\,p &= m \end{aligned}$$

seyn, (§. 69.) und demnach sowohl M als N mit coſ. p multiplicirt werden muß, leitet uns auf die schicklichste Form, die wir denen für y und x anzunehmenden unendlichen Reihen geben können. Wir setzen nemlich

$$\begin{array}{lllll} y = A & + B\lambda & + C\lambda^2 & + \&c. \\ \quad + A'\,\text{ſ.}p & + B'\,\text{ſ.}p.\lambda & + C'\,\text{ſ.}p.\lambda^2 & + \&c. \\ \quad + A''\,\text{ſ.}2p & + B''\,\text{ſ.}2p.\lambda & + C''\,\text{ſ.}2p.\lambda^2 & + \&c. \\ \quad + A'''\,\text{ſ.}3p & + B'''\,\text{ſ.}3p.\lambda & + C'''\,\text{ſ.}3p.\lambda^2 & + \&c. \\ \quad + \&c. \end{array}$$

und

$$\begin{array}{lllll} x = a & + b\lambda & + c\lambda^2 & + \&c. \\ \quad + a'\,\text{coſ.}p & + b'\,\text{coſ.}p.\lambda & + c'.\,\text{coſ.}p.\lambda^2 & + \&c. \\ \quad + a''\,\text{coſ.}2p & + b''\,\text{coſ.}2p.\lambda & + c''\,\text{coſ.}2p.\lambda^2 & + \&c. \\ \quad + a'''\,\text{coſ.}3p & + b'''\,\text{coſ.}3p.\lambda & + c'''\,\text{coſ.}3p.\lambda^2 & + \&c. \\ \quad + \&c. \end{array}$$

§. 75.

Wird nun y sowohl als x differentiirt, so findet man M, m, N, n, und damit können die Gleichungen

$$\begin{aligned} +M\,\text{coſ.}\,p &= n \\ -N\,\text{coſ.}\,p &= m \end{aligned}$$

ausführlich vorgestellt werden. In Ansehung der erstern ist nach angestellter Rechnung und behöriger Reduction

$$\begin{array}{lll} M\,\text{coſ.}\,p \\ = \frac{1}{2}A' & + \frac{1}{2}B'\lambda & + \&c. \\ + \frac{1}{2}(2A'')\,\text{coſ.}p & + \frac{1}{2}.\,2B''\,\text{coſ.}p\,\lambda & + \&c. \\ + \frac{1}{2}(A' + 3A''')\,\text{coſ.}2p & + \frac{1}{2}(B' + 3B''')\,\text{coſ.}2p.\lambda & + \&c. \\ + \frac{1}{2}(2A'' + 4A'''')\,\text{coſ.}3p & + \frac{1}{2}(2B'' + 4B'''')\,\text{coſ.}3p.\lambda & + \&c. \\ + \frac{1}{2}(3A''' + 5A^{v})\,\text{coſ.}4p & + \frac{1}{2}(3B''' + 5B^{v})\,\text{coſ.}4p.\lambda & + \&c. \\ \quad \&c. \end{array}$$

und

$$\begin{array}{llll} n = b & + 2c\lambda & + 3d\lambda^2 & + \&c. \\ \quad + b'\,\text{coſ.}p & + 2c'\,\text{coſ.}p\,\lambda & + 3d'\,\text{coſ.}p.\lambda^2 \\ \quad + b''\,\text{coſ.}2p & + 2c''\,\text{coſ.}2p.\lambda & + 3d''\,\text{coſ.}2p.\lambda^2 \\ \quad + b'''\,\text{coſ.}3p & + 2c'''\,\text{coſ.}3p.\lambda & + 3d'''\,\text{coſ.}3p.\lambda^2 \end{array}$$

§. 76.

Hier können nun die Coefficienten Glied für Glied mit einander verglichen werden; und so findet man

$$\begin{array}{l|l|l} b = \frac{1}{2}A' & c = \frac{1}{4}B' & d = \frac{1}{6}.\,C' \\ b' = \frac{1}{2}(2A'') & c' = \frac{1}{4}(2B'') & d' = \frac{1}{6}(2C'') \\ b'' = \frac{1}{2}(A' + 3A''') & c'' = \frac{1}{4}(B' + 3B''') & d'' = \frac{1}{6}(C' + 3C''') \\ b''' = \frac{1}{2}(2A'' + 4A'''') & c''' = \frac{1}{4}(2B'' + 4B'''') & d''' = \frac{1}{6}(2C'' + 4C'''') \\ b'''' = \frac{1}{2}(3A''' + 5A^{v}) & c'''' = \frac{1}{4}(3B''' + 5B^{v}) & d'''' = \frac{1}{6}(3C''' + 5C^{v}) \\ \quad \&c. & \quad \&c. & \quad \&c. \end{array}$$

§. 77.

§. 77.

Auf eine ganz ähnliche Art findet man vermittelst der Gleichung $- N\cos.\,\nu = m$ die Werthe

$B = \frac{1}{2}a'$	$C = \frac{1}{4}b'$	$D = \frac{1}{6}c'$
$B'' = \frac{1}{2}(2a'')$	$C' = \frac{1}{4}(2b'')$	$D' = \frac{1}{6}(2c'')$
$B'' = \frac{1}{2}(a' + 3a''')$	$C'' = \frac{1}{4}(b' + 3b''')$	$D'' = \frac{1}{6}(c' + 3c''')$
$B''' = \frac{1}{2}(2a'' + 4a'''')$	$C''' = \frac{1}{4}(2b'' + 4b'''')$	$D''' = \frac{1}{6}(2c'' + 4c'''')$
$B'''' = \frac{1}{2}(3a''' + 5a^{V})$	$C'''' = \frac{1}{4}(3b''' + 5b^{V})$	$D'''' = \frac{1}{6}(3c''' + 5c^{V})$
&c.	&c.	&c.

§. 78.

Das Gesetz des Fortganges in diesen Ausdrücken ist sehr einfach. Man findet auch leicht, daß sie von einander wechselsweise abhängen, und zwar

die b von den A
die c von den B, demnach von den a
die d von den C, demnach von den A
&c.

die B von den a
die C von den b, demnach von den A
die D von den c, demnach von den a
&c.

und so hängen alle übrige Coefficienten von den a, A ab.

§. 79.

§. 79.

Man findet demnach

$b = \frac{1}{2}(\ast + A')$ $\quad B = \frac{1}{2}(\ast + a')$

$b' = \frac{1}{2}(\ast + 2A'')$ $\quad B' = \frac{1}{2}(\ast + 2a'')$

$b'' = \frac{1}{2}(A' + 3A''')$ $\quad B'' = \frac{1}{2}(a + 3a''')$

$b''' = \frac{1}{2}(2A'' + 4A'''')$ $\quad B''' = \frac{1}{2}(2a'' + 4a'''')$

$b'''' = \frac{1}{2}(3A''' + 5A^{V})$ $\quad B'''' = \frac{1}{2}(3a''' + 5a^{V})$

&c. &c.

Und überhaupt

$b^{k} = \frac{1}{2}[(k-1)A^{k-1} + (k+1)A^{k+1}]$ $\quad B^{k} = \frac{1}{2}[(k-1)a^{k-1} + (k+1)a^{k+1}]$

Ferner

$c = \frac{1}{2.4}(\ast \quad \ast \quad + \quad 2a'')$ $\quad C = \frac{1}{2.4}(\ast \quad \ast \quad + \quad 2A'')$

$c' = \frac{1}{2.4}(\ast + 2a' + 6a''')$ $\quad C' = \frac{1}{2.4}(\ast + 2A' + 6A''')$

$c'' = \frac{1}{2.4}(\ast + 8a'' + 12a'''')$ $\quad C'' = \frac{1}{2.4}(\ast + 8A'' + 12A'''')$

$c''' = \frac{1}{2.4}(2a' + 18a''' + 20a^{V})$ $\quad C''' = \frac{1}{2.4}(2A' + 18A''' + 2\ A^{V})$

$c'''' = \frac{1}{2.4}(6a'' + 32a'''' + 30a^{VI})$ $\quad C'''' = \frac{1}{2.4}(6A'' + 32A'''' + 30A^{VI})$

$c^{V} = \frac{1}{2.4}(12a''' + 50a^{V} + 42a^{VII})$ $\quad C^{V} = \frac{1}{2.4}(12A''' + 50A^{V} + 42A^{VII})$

$c^{VI} = \frac{1}{2.4}(20a'''' + 72a^{VI} + 56a^{VIII})$ $\quad C^{VI} = \frac{1}{2.4}(20A'''' + 72A^{VI} + 56A^{VIII})$

&c. &c.

Und überhaupt

$$c^k = \tfrac{1}{4}\left[(k-1)\,B^{k-1} + (k+1)\,B^{k+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2.4}\left[\begin{array}{l}(k-1).(k-2)\,a^{k-2} + 2kk\,a^k \\ \qquad + (k+1).(k+2)\,a^{k+2}\end{array}\right]$$

$$C^k = \tfrac{1}{4}\left[(k-1)\,b^{k-1} + (k+1)\,b^{k+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2.4}\left[\begin{array}{l}(k-1).(k-2)\,A^{k-2} + 2kk\,A^k \\ \qquad + (k+1).(k+2)\,A^{k+2}\end{array}\right]$$

Ferner

$$d = \frac{1}{2.4.6}(\ast \quad \ast \quad + 2A' + 6A''')$$

$$d' = \frac{1}{2.4.6}(\ast \quad \ast \quad + 16A'' + 24A'''')$$

$$d'' = \frac{1}{2.4.6}(\ast + 8A' + 60A''' + 60A^{V})$$

$$d''' = \frac{1}{2.4.6}(\ast + 40A'' + 152A'''' + 120A^{VI})$$

$$d'''' = \frac{1}{2.4.6}(6A' + 114A''' + 310A^{V} + 210A^{VII})$$

$$d^{V} = \frac{1}{2.4.6}(24A'' + 248A'''' + 552A^{VI} + 336A^{VIII})$$

&c.

Eben so auch die D, D′, D″ &c.
durch die a′, a″, a‴ &c.

Und

Und überhaupt

$$d^k = \tfrac{1}{6}\left[(k-1)\,c^{k-1} + (k+1)\,c^{k+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2.4.6}\left\{\begin{array}{l}(k-1).(k-2)\,(k-3).\,a^{k-3} \\ (k-1).(3k^2 - 3k + 2)\,a^{k-1} \\ (k+1).(3k^2 + 3k + 2)\,a^{k+1} \\ (k+1).(k+2).(k+3).\,a^{k+3}\end{array}\right\}$$

Ferner

$$e = \frac{1}{2.4.6.8}(\ast \quad \ast \quad \ast \quad 16a'' + 24a'''')$$

$$e' = \frac{1}{2 \ldots 8}(\ast \quad \ast + 16a' + 120a''' + 120a^{V})$$

$$e'' = \frac{1}{2 \ldots 8}(\ast \quad \ast + 136a'' + 480a'''' + 360a^{VI})$$

$$e''' = \frac{1}{2 \ldots 8}(\ast + 40a' + 576a''' + 1360a^{V} + 840a^{VII})$$

$$e'''' = \frac{1}{2 \ldots 8}(\ast + 240a'' + 1696a'''' + 3120a^{VI} + 1680a^{VIII})$$

&c.

Eben so auch die E, E′, E″ &c.
durch die A′, A″, A‴ &c.

Und

Und überhaupt

$$e^k = \frac{1}{8}\left[(k-1)\,D^{k-1} + (k+1)\,D^{k+1}\right]$$

$$-\frac{1}{2.4.6.8}\left\{\begin{array}{l}(k-1).(k-2).(k-3).(k-4)\,a^{k-4}\\ (k-1).(k-2).(4k^2-8k+8)\,a^{k-2}\\ k.k.(6k^2+10)\,a^k\\ (k+1).(k+2)(4k^2+8k+8)\,a^{k+2}\\ (k+1).(k+2)(k+3)(k+4).a^{k+4}\end{array}\right\}$$

Auf diese Art können die folgenden Coefficienten ebenfalls bestimmet werden. Ich werde es aber bey dieser allgemeinen Anzeige bewenden lassen, da es überhaupt betrachtet genug ist, gezeigt zu haben, daß die Rechnung auch bey den verwickeltesten Reihen von statten geht. In besondern Fällen giebt es merklich Abkürzungen, wie wir es sogleich sehen werden.

VII. Anwendung der Methode auf einen besondern Fall.

§. 80.

Es giebt mehrere Landcharten selbst auch von ganzen Welttheilen, wo ihre Verfertiger, vermuthlich Kürze halber, sich folgender Verzeichnungsart bedienet haben. Man zieht mitten durch die Charte herunter eine gerade Linie, und theilt sie in so viele gleiche Theile als der Mittagskreis, den sie vorstellt, Grade der Breite haben soll. Durch jede Grade werden senkrechte Linien

Linien gezogen, und diese stellen die Parallelkreise des Aequators vor. Sie werden ebenfalls in gleiche Theile getheilt, welche die Grade der Länge vorstellen sollen. Da aber die Grade der Länge desto kleiner sind, je näher der Parallelkreis bey dem Pol ist, und zwar im Verhältniß des Sinus des Abstandes vom Pole; so werden auch auf diesen Linien die Grade in eben der Verhältniß kleiner gemacht. Dadurch lassen sich dann die übrigen Mittagskreise ziehen. Es sind krumme Linien, die nur den Aequator unter rechten Winkeln, jede Parallelkreise aber unter schiefen Winkeln durchschneiden, und daher auch den Ländern eine mehr oder minder schief gestreckte Lage geben. Die Linien selbst sind die von **Leibnitz** so genannte Sinuslinien, und sie sind nur darinn von einander verschieden, daß die Ordinaten bey jeder in beständiger Verhältniß größer oder kleiner sind.

§. 81.

Von dieser Entwerfungsart werden wir hier die zwo Bedingungen beybehalten, daß, erstlich, der mittlere Mittagskreis geradlinicht, und in gleichgroße Grade getheilt sey, sodann, daß der Aequator ebenfalls geradlinicht sey, und den Mittagskreis senkrecht durchschneide. Zu diesen Bedingungen fügen wir aber noch die, daß alle Parallelkreise alle Mittagskreise unter rechten Winkeln schneiden, und die Grade der Länge zu den Graden der Breite durchaus ihre wahre

Verhältniß behalten sollen. Diese zwo letztere Bedingungen machen, daß die Aufgabe unter der vorhin (§. 65. folgg.) angeführten viel allgemeineren enthalten ist. Hingegen dienen die zwo erstern Bedingungen, die Form der unendlichen Reihen zu bestimmen, die wir zum Behuf der Auflösung annehmen müssen. Da ich bey dieser Aufgabe eigentlich anfieng, so nahm ich für y und x solche Reihen an, die nach den Digni-
Fig. 11. täten von p und λ fortgiengen. In der Figur stellt nun CA den Aequator, CB den mittlern Mittagskreis vor. CE ist $=p$, und CL eine Function von λ. In E müssen rechte Winkel, und jeder Parallelkreis auf beyden Seiten von CB ähnlich seyn. Dieses machte, daß y durch lauter gerade Dignitäten von λ, und durch lauter ungerade Dignitäten von p, hingegen x durch ungerade Dignitäten von λ und durch gerade Dignitäten von p ausgedruckt werden mußte, und zwar so, daß, wenn $p=0$, auch $y=0$, und x nur eine Function von λ würde; und hinwiederum, daß, wenn $\lambda=0$, alsdann $y=p$ und $x=0$ seyn mußte.

§. 82.

Die Rechnung, die ich hierüber anstellte, gab

$$
\begin{aligned}
y = {} & p \\
& + \tfrac{1}{2}\lambda^2 p - \tfrac{4}{2}\cdot\frac{1}{1.2.3}\lambda^2 p^3 + \frac{16\lambda^2 p^5}{2\;1.2.3.4.5} - \frac{64}{2}\cdot\frac{\lambda^2 p^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c. \\
& + \tfrac{5}{24}\lambda^4 p - \tfrac{7}{18}\lambda^4 p^3 + \tfrac{5}{18}\lambda^4 p^5 - \&c. \\
& + \tfrac{61}{720}\lambda^6 p - \tfrac{443}{1440}\lambda^6 p^3 + \&c. \\
& + \tfrac{139}{4032}\lambda^8 p - \&c. \\
& + \&c.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x = {} & \lambda - \tfrac{1}{2}\lambda p^2 + \frac{1}{2.3.4}\lambda p^4 - \frac{1}{2.3.4.5.6}\lambda p^6 + \&c. \\
& + \tfrac{1}{6}\lambda^3 - \tfrac{5}{12}\lambda^3 p^2 + \tfrac{41}{144}\lambda^3 p^4 - \tfrac{73}{864}\lambda^3 p^6 + \&c. \\
& + \tfrac{1}{24}\lambda^5 - \tfrac{61}{240}\lambda^5 p^2 + \tfrac{101}{480}\lambda^5 p^4 - \&c. \\
& + \tfrac{61}{5040}\lambda^7 - \tfrac{139}{1008}\lambda^7 p + \&c. \\
& + \tfrac{139}{28224}\lambda^9 - \&c. \\
& + \&c.
\end{aligned}
$$

§. 83.

Da ich aber diese Reihen summirte, so fand sich, wiewohl anfangs nur durch Induction,

$$y = p + \frac{1}{4}\,\mathrm{s}.2p.\lambda^2 + \frac{4\,\mathrm{s}.2p + 3\,\mathrm{s}.4p}{4.8.1.3.}.\lambda^4 + \frac{34\,\mathrm{s}.2p + 60\,\mathrm{s}.4p + 30\,\mathrm{s}.6p}{4.8.12.\ 1.3.5}.\lambda^6 + \frac{496\,\mathrm{s}.2p + 1512\,\mathrm{s}.4p + 1680\,\mathrm{s}.6p + 630\,\mathrm{s}.8p}{4.8.12.16\ 1.3.5.7}.\lambda^8 + \frac{11056\,\mathrm{s}.2p + 50880\,\mathrm{s}.4p + 93240\,\mathrm{s}.6p + 75600\,\mathrm{s}.8p + 22680\,\mathrm{s}.10p}{4.8.12.16.20.\ 1.3.5.7.9}.\lambda^{10} + \&c.$$

Und

$$x = \mathrm{cos}.p.\lambda + \frac{\mathrm{cos}.p + \mathrm{cos}.3p}{4.1.3}.\lambda^3 + \frac{4\,\mathrm{cos}.p + 10\,\mathrm{cos}.3p + 6\,\mathrm{cos}.5p}{4.8.\ 1.3.5}.\lambda^5 + \frac{34\,\mathrm{cos}.p + 154\,\mathrm{cos}.3p + 210\,\mathrm{cos}.5p + 90\,\mathrm{cos}.7p}{4.8.12.\ 1.3.5.7}.\lambda^7 + \frac{496\,\mathrm{cos}.p + 3520\,\mathrm{cos}.3p + 8064\,\mathrm{cos}.5p + 7560\,\mathrm{cos}.7p + 2520.\,\mathrm{cos}.9p}{4.8.12.16.\ 1.3.5.7.9}.\lambda^9 + \&c.$$

Ich nahm aber darauf Reihen von dieser Form mit unbestimmten Coefficienten an, und fand damit, daß die Induction ganz richtig war.

§. 84.

Dabey ließ ich es aber nicht bewenden, sondern bemerkte, daß sich diese Werthe von y und x herunterwerts summiren ließen, und es fand sich

$$y = p + \text{ſ}.2p.t\tfrac{1}{2}\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\text{ſ}.4p.t\tfrac{1}{2}\lambda^4 + \tfrac{1}{3}\text{ſ}.6p.t\tfrac{1}{2}\lambda^6 + \tfrac{1}{4}\text{ſ}.8p.t\tfrac{1}{2}\lambda^8 + \&c.$$

$$x = 2\,\text{coſ}.p.t\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{2}{3}\text{coſ}.3p.t\tfrac{1}{2}\lambda^3 + \tfrac{2}{5}\text{coſ}.5p.t\tfrac{1}{2}\lambda^5 + \&c.$$

§. 85.

Endlich ließen sich auch diese Reihen noch summiren, und es fand sich

$$y = p + \text{Arc. tang.}\ \frac{\text{ſ}.\,2p.t.\tfrac{1}{2}\lambda^2}{1 - \text{coſ}.\,2p.t.\tfrac{1}{2}\lambda^2}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{1 + 2\,t.\tfrac{1}{2}\lambda.\text{coſ}.p. + t.\tfrac{1}{2}\lambda^2}{1 - 2\,t.\tfrac{1}{2}\lambda.\text{coſ}.p. + t.\tfrac{1}{2}\lambda^2}\right)$$

oder, wenn man $p = 90^\circ - \varepsilon$ setzt,

$$y = 90^\circ - \varepsilon + \text{Arc. cot.}\,(\text{cot}.2\varepsilon + \text{cot}.\tfrac{1}{2}\lambda^2.\text{coſec}.2\varepsilon)$$

$$x = \tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{1 + \text{ſ}.\lambda.\text{ſ}.\varepsilon}{1 - \text{ſ}.\lambda.\text{ſ}.\varepsilon}\right) = \tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{\text{coſec}.\varepsilon + \text{ſ}.\lambda}{\text{coſec}.\varepsilon - \text{ſ}.\lambda}\right)$$

oder noch kürzer

$$\text{cot}.y = \text{coſ}.\lambda.\text{tang}.\varepsilon$$

§. 86.

Hieraus fand sich nun hinwiederum

dy

$$dy = \frac{\text{coſ}.\lambda.\,dp + \text{ſ}.p.\,\text{coſ}.p.\,\text{ſ}.\lambda.\,d\lambda}{1 - \text{coſ}.p^2.\,\text{ſ}.\lambda^2}$$

$$dx = \frac{\text{coſ}.p.\text{coſ}.\lambda.\,d\lambda - \text{ſ}.\lambda.\text{ſ}.p.\,dp}{1 - \text{coſ}.p^2.\,\text{ſ}.\lambda^2}$$

demnach

$$+M = \frac{\text{coſ}.\lambda}{1 - \text{coſ}.p^2.\text{coſ}.\lambda^2} \quad\Big|\quad +m = \frac{\text{ſ}.p.\text{coſ}.p.\text{ſ}.\lambda}{1 - \text{coſ}.p^2.\text{coſ}.\lambda^2}$$

$$-N = \frac{\text{ſ}.p.\text{ſ}.\lambda}{1 - \text{coſ}.p^2\,\text{coſ}.\lambda^2} \quad\Big|\quad +n = \frac{\text{coſ}.\lambda.\text{coſ}.p}{1 - \text{coſ}.p^2.\text{coſ}.\lambda^2}$$

wo man leicht sieht, daß diese Ausdrücke den beyden zum Grunde liegenden Gleichungen (§. 69.)

$$+M\,\text{coſ}.p = n$$
$$-N\,\text{coſ}.p = m$$

Genüge leisten, und damit die bey Summirung gebrauchte Induction ebenfalls bewähren.

§. 87.

Aus der Formel

$$x = \tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{1 + \text{ſ}\varepsilon\,\text{ſ}\lambda}{1 - \text{ſ}\varepsilon\,\text{ſ}\lambda}\right)$$

erhellet, daß x eben so von ε, wie von λ abhängt, so daß man z. E. für $\varepsilon = 40^\circ$, $\lambda = 60^\circ$ eben den Werth von x erhält, den man für $\varepsilon = 60^\circ$ $\lambda = 40^\circ$ findet.

§. 88.

Setzt man nun $\varepsilon = 90^\circ$, oder $p = 0$, so ist

x

$$x = \frac{1}{2}\log.\left(\frac{1+\text{ſ}.\lambda}{1-\text{ſ}.\lambda}\right) = \log.\text{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)$$

Demnach nehmen die Grade des Aequators, von C an gerechnet, eben so zu, wie die Grade der Breite bey **Merkators** Seecharten. In der That läuft auch, wie wir im folgenden sehen werden, die ganze Zeichnungsart mit **Merkators** seiner auf eines hinaus.

§. 89.

Setzt man $\lambda = 90^\circ$, so wird

$$x = \frac{1}{2}\log.\frac{1+\text{ſin}.\varepsilon}{1-\text{ſin}.\varepsilon} = \log.\text{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varepsilon)$$

und

$$y = 90^\circ$$

Demnach wird der Mittagskreis, welcher um 90° von CB entfernt ist, mit dem Aequator parallel, und die Grade der Aequatorshöhe nehmen, vom Pol aus gerechnet, auf demselben eben so zu, wie die Grade der Länge auf dem Aequator von [E] aus gerechnet, oder wie die Grade der Breite bey **Merkators** Seecharten. Die Folge hieraus ist, daß, da die Parallelkreise jede Mittagskreise unter rechten Winkeln schneiden, sie sich von E nach M aufwerts ziehen, und bey dem 90sten Grad der Länge in D mit CB parallel werden. Oberhalb D haben sie wiederum eben die Krümmung. Und da DB > BE ist, so sind es reguläre Ovallinien, die desto ablanger werden, je weiter sie vom Pol weg sind.

§. 90.

Man findet ferner für jeden Parallelkreis den Halbmesser des Krümmungskreises

in $E = \text{tang}.\,\varepsilon$

in $D = \text{ſin}.\,\varepsilon$

und für jeden Mittagskreis BML den Halbmesser des Krümmungskreises

in $L = \text{coſec}.\,\lambda$

Endlich haben die Mittagskreise in [B] einen Wendungspunct. Ihr Halbmesser der Krümmung ist daselbst unendlich, und dieses macht, daß sie den Pol in einer sehr geraden Richtung durchschneiden. Ueberhaupt sind sie von den vorhin (§. 80.) erwähnten Sinuslinien desto weniger verschieden, je kleiner λ ist.

§. 91.

Ich habe übrigens die Werthe von x und y für jede 10 Gr. von ε und λ in beyliegender Tafel berechnet vorgestellt, und nach derselben in der 13ten Figur **Amerika** entworfen. Die Zeich- Fig. 13.
nung fällt desto natürlicher aus, da auf dem Mittagskreise von 300 Gr. Länge die Grade der Breite gleiche Größe haben, und selbst auch die Grade der Länge nicht sehr ungleich sind. Sie würden es aber geworden seyn, wenn die Charte auf beyden Seiten noch mehrere Grade der Länge hätte fassen sollen. So aber ließ sich **Amerika** schicklich zwischen 80 Gr. Länge, auf dem Aequator gerechnet, einschließen. **Europa** und **Afrika** fallen

Für x

	λ=0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
ε=0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10	0,00000	0,03016	0,05946	0,08704	0,11209	0,13382	0,15153	0,16465	0,17271	0,17543
20	0,00000	0,05946	0,11752	0,17271	0,22363	0,26830	0,30531	0,33323	0,35051	0,35638
30	0,00000	0,08704	0,17271	0,25541	0,33697	0,40360	0,46360	0,50987	0,53928	0,54931
40	0,00000	0,11209	0,22363	0,33697	0,43944	0,53923	0,62805	0,69946	0,74644	0,76291
50	0,00000	0,13382	0,26830	0,40360	0,53923	0,67283	0,79889	0,90733	0,98310	1,01068
60	0,00000	0,15153	0,30531	0,46360	0,62805	0,79889	0,97296	1,13817	1,26892	1,31694
70	0,00000	0,16465	0,33323	0,50987	0,69946	0,90733	1,13817	1,38939	1,62549	1,73542
80	0,00000	0,17271	0,35051	0,53928	0,74644	0,98310	1,26892	1,62549	2,08925	2,43624
90	0,00000	0,17543	0,35638	0,54931	0,76291	1,01068	1,31694	1,73542	2,43624	infinit.

Für y

ε=0	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080
10	1,39626	1,39886	1,40648	1,41926	1,43670	1,45793	1,46541	1,51056	1,54018	1,57080
20	1,22173	1,22643	1,24125	1,26545	1,29888	1,34097	1,39078	1,44695	1,50364	1,57080
30	1,04720	1,05380	1,07370	1,10712	1,16690	1,21348	1,28977	1,37584	1,47088	1,57080
40	0,87266	0,88019	0,90311	0,94239	0,99951	1,07617	1,17367	1,29133	1,42611	1,57080
50	0,69813	0,70568	0,72891	0,76961	0,83088	0,91699	1,03361	1,18375	1,36703	1,57080
60	0,52360	0,53025	0,55094	0,58800	0,64585	0,73182	0,85707	1,03599	1,27464	1,57080
70	0,34907	0,35401	0,36953	0,39782	0,44355	0,51522	0,62923	0,81648	1,10100	1,57080
80	0,17453	0,17717	0,18542	0,20086	0,22624	0,27627	0,33904	0,48601	0,79305	1,57080
90	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	

fallen bey dieser Zeichnungsart ebenfalls und noch um desto besser aus, da noch weniger Grade der Länge dazu erfordert werden. Endlich nimmt sich auch Asien gut aus, wenn man den 90sten Grad der Länge als den mittlern annimmt, und vom Aequator nicht mehrere Grade beybehält, als die vom 50sten bis zum 135sten gehen.

§. 92.

Fig. 12. Diese Entwerfungsart kömmt übrigens mit **Merkators** seiner ganz überein. Der Unterschied ist nur, daß bey **Merkator** BC der Aequator, DB, RM, CA Mittagskreise sind. Wir haben vorhin (§. 85.)

$$x = \tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{1+\mathrm{s}.\lambda.\mathrm{s}\varepsilon}{1-\mathrm{s}.\lambda.\mathrm{s}\varepsilon}\right)$$

gefunden. Da nun überhaupt

ε den Bogen BM

λ den Winkel MBR

vorstellt, so ist

$$\mathrm{s}\lambda.\mathrm{s}\varepsilon = \sin.\varphi$$

und demnach ist φ der Bogen des aus M auf den Mittagskreis BC senkrecht gezogenen größten Circuls der Sphäre. Setzen wir diesen Werth, so ist

$$MR = x = \tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{1+\mathrm{s}.\varphi}{1-\mathrm{s}.\varphi}\right) = \log.\mathrm{tang}.(45^\circ\ \tfrac{1}{2}\varphi)$$

Demnach stellt MR nach **Merkators** Zeichnungsart den Bogen φ wirklich vor.

VIII.

VIII. Reguläre Entwerfungen der Erdfläche.

§. 93.

Unter den vielerley Entwerfungsarten der Kugelfläche haben diejenigen eine vorzüglichere Regelmäßigkeit, wo die Mittagskreise durch gerade Linien vorgestellt werden, die einander in dem Pol unter ihren wahren Winkeln durchschneiden, und die vom Pol aus sämtlich auf einerley Art in Grade getheilt werden, so daß der Aequator und dessen Parallelkreise Circul sind, die ihren gemeinschaftlichen Mittelpunct im Pol haben. Eine solche Entwerfungsart stellt die Fig. 3. 3te Figur vor. Sie hat nur das besonders, daß die Halbmesser der Parallelkreise, wie die Tangenten der Helfte ihrer Entfernung vom Pole, zunehmen. Man sieht aber leicht, daß sie nach einem andern beliebigen Gesetze zunehmen können, ohne daß der Regularität übrigens etwas benommen wird.

§. 94.

Es ist eben so ganz gleichgültig, ob der Mittelpunct p den Pol, oder einen jeden andern Punct der Erdfläche vorstelle. Denn auf der Kugelfläche kann jeder Punct als ein Pol angesehen werden. Stellt aber p nicht den Pol vor, so erhalten jede Linien andere Namen. Die Mittagskreise werden sodann Verticalcircul, der Aequator wird der Horizont, und die Parallelkreise

kreise

kreise des Aequators werden Almucantharat oder Höhenkreise, endlich werden die Grade des Aequators Azimuthalbögen oder Grade der Weltgegenden. Dieses folgt unmittelbar aus der Erklärung der Wörter. Man kann sich die Sache auch folgendermaßen vorstellen. Es sey z. E. der Punct p Berlin, p A dessen Mittagskreis, so zeigen die Winkel apA, bpA, γpA an, wie viele Grade die Oerter a, c, b, γ vom Mittagskreise ost- oder westwerts liegen, und ap, cp, bp, γp in Graden genommen, geben den Abstand dieser Oerter von Berlin in Graden. Nimmt man demnach statt solcher willkührlichen Oerter die Durchschnittspuncte jeder Mittagskreise und Breitenkreise, so können die Winkel apA, bpA &c. und die Grade ap, bp &c. durch bekannte trigonometrische Rechnungen gefunden, und daher auch die Mittagskreise und Breitenkreise so gezogen werden, daß die Regularität der Entwerfung durchaus beybehalten werde.

§. 95.

Nun nimmt man bey Entwerfung der Halbkugeln der Erde gewöhnlich den 90sten und 270sten Grad der Länge auf dem Aequator zum Mittelpunct p an, und damit fallen die beyden Pole in B und A, und DpE wird der Aequator. Dieses macht sodann, daß die Mittags- und Breitenkreise in den vier Vierteln DpB, EpB, EpA, DpA, auf eine durchaus ähnliche Art gezeichnet werden.

§. 96.

§. 96.

Es sey z. E. in der 14ten Figur ACE der Aequator, P, p die Pole, M der Durchschnittspunct des Mittagskreises PMLp und des Breitenkreises MB. Da nun die Entwerfungsart so beschaffen seyn soll, daß alle durch den Mittelpunct C gehende gerade Linien größte Circul der Sphäre vorstellen, und auf einerley Art in Grade eingetheilt seyn sollen, so ist CM ein Bogen eines solchen größten Circuls, welcher in Graden den Abstand des Puncts M von C vorstellt, und der Winkel ACM bestimmt die Lage des Puncts M in Absicht auf die Lage des Aequators. Fig. 14.

§. 97.

Man setze nun

den Unterschied der Länge CL $= \lambda$

die Breite LM oder CB $= p$

den Winkel ACM $= \omega$

den Abstand CM $= k$

so ist

$$\cos. k = \cos. \lambda . \cos. p$$

$$\text{tang.}\,\omega = \text{tang.}\, p : \sin. \lambda$$

Nach diesen Formeln sind beyliegende Tafeln berechnet, welche p und ω für jede Bögen p, λ von 5 zu 5 Graden vorstellen. Der Gebrauch ist folgender.

§. 98.

Man theile den Circul APEp in Grade,

Für ω

	p=0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
λ=0		90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0
5	0. 0	45. 7	63.42	71 59	76 32	79.25	81.25	82.54	84 4	85. 1	85.49	86.30	87. 7	87.47	88.11	88.40	89. 7	89.35	90. 0
10	0. 0	26.44	45.26	5[illegible]. 3	64.30	69.35	73.16	76. 4	78.18	80. 9	81.43	83. 4	84.16	85.22	85.58	87.20	88.15	89. 8	90. 0
15	0. 0	18 40	34.16	46. 0	54.35	60.58	65.51	69.43	72.46	75.29	77.45	79.44	81.30	83. 7	84.37	86. 2	87.23	88.42	90. 0
20	0. 0	14.21	27.16	38. 5	46.47	53.45	59.21	63.58	67.49	71. 7	73.59	76.32	78.50	80.56	82.54	84 46	86.31	88.17	90. 0
25	0. 0	10.56	22.39	32.22	40.44	47.49	53.48	58 53	63 16	67. 5	70.29	73.31	76.17	78 51	81.15	83.32	85.44	87.55	90. 0
30	0. 0	9.54	19.26	28.11	36. 3	43 0	49. 9	54.28	59.13	63.26	67.14	70.42	73.54	76.53	79.41	82.22	84.53	87.30	90. 0
35	0. 0	8.40	17. 6	25. 2	32.24	39. 7	45.11	50.41	55.39	60.10	64 18	68. 7	71.41	75. 2	78.12	81.16	84.14	87. 8	90. 0
40	0. 0	7.45	15.20	22.38	29.31	35.58	41 56	47.27	52.33	57.16	61.39	65 46	69.38	73.39	76.50	80 14	83.32	86 47	90. 0
45	0. 0	7. 3	14. 0	20.45	27.14	33.24	39 14	44.43	49.53	54.44	59 19	63.39	67.48	71.45	75.34	79.16	82.53	86.28	90. 0
50	0. 0	6.31	12.58	19.17	25.25	31.20	37. 0	42.25	47.36	52.33	57.16	61.48	66. 9	70.21	74.25	78.24	82.18	86.10	90. 0
55	0. 0	6. 6	12. 9	18. 7	23.58	29.39	35 11	40.32	45.41	50.41	55 30	60.10	64 41	69. 6	73.45	77.37	81.47	85.54	90. 0
60	0. 0	5.46	11.31	17.12	22.48	28 18	33.42	38.57	44. 6	49. 6	54 0	58.46	63.26	68. 1	72.30	76.56	81.19	85.40	90. 0
65	0. 0	5.31	11. 1	16.28	21.53	27.13	32.30	3[illegible].41	42.48	47.49	52 45	57.36	62.23	67. 5	71.45	76.21	80.55	85.28	90. 0
70	0. 0	5.19	10.38	15.55	21.10	26.24	31.34	36 41	41 46	46.47	51.45	56.39	61.31	66.20	71. 7	75.52	80.36	85 18	90. 0
75	0. 0	5.11	10.21	11 31	20.39	25.46	30.52	35.56	40.47	46. 0	50.59	55.56	60.51	65.45	70.38	75.29	80.20	85.10	90. 0
80	0. 0	5. 5	10. 9	15.13	20 17	25.20	30 23	35.25	40 26	45 26	50.26	55.25	60.23	65.20	70.17	75.13	80. 9	85. 5	90. 0
85	0. 0	5. 1	10. 2	15. 4	20. 4	25. 5	30. 6	35. 6	40. 6	45. 7	50. 6	55. 6	60. 6	65. 5	70. 4	75. 3	80. 2	85. 1	90. 0
90	0. 0	5. 0	10. 0	15. 0	20. 0	25. 0	30. 0	35. 0	40. 0	45. 0	50. 0	55. 0	60. 0	65. 0	70. 0	75. 0	80. 0	85. 0	90. 0

Für $\varkappa$

	p=0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
λ=0	0. 0	5. 0	10. 0	15. 0	20. 0	25. 0	30. 0	35. 0	40. 0	45. 0	50. 0	55. 0	60. 0	65. 0	70. 0	75. 0	80. 0	85. 0	90. 0
5	5. 0	7. 4	11.10	15.48	20.35	25.28	30.23	35.19	40.16	45.13	50.11	55. 9	60. 8	65. 9	70. 5	75. 3	80. 2	85. 1	90. 0
10	10. 0	11.10	14. 6	17.58	22.16	26.48	31.29	36.13	41. 2	45.44	50.44	55.36	60.30	65 24	70.19	75.14	80. 9	85. 5	90. 0
15	15. 0	15.48	17.58	21. 6	24.49	28.54	33.14	37.42	42.16	46.55	51.37	56 21	61. 7	65.55	70.43	75.31	80.21	85.10	90. 0
20	20. 0	20.35	22.16	24.49	27.59	31.37	35.32	39.40	43.57	48.22	52.50	57.53	61.58	66.36	71.15	75 55	80.37	85.18	90. 0
25	25. 0	25.28	26.48	28.54	31.37	34.47	38.20	42. 4	46. 2	50. 2	54.22	58.41	63. 3	67.26	71.57	76.26	80.57	85.29	90. 0
30	30. 0	30.23	31.29	33.14	35.32	38.20	41.25	44.49	48.26	52.14	56.10	60 13	64.20	68 32	72 46	77. 3	81.21	85.40	90. 0
35	35. 0	35.19	36.13	37.42	39.40	42. 4	44.49	47.51	51. 8	54.36	58.13	61.58	65.46	69.45	73.44	77.46	81.49	85.54	90. 0
40	40. 0	40.16	41. 2	42.16	43.57	46. 2	48.26	51. 8	54. 4	57.12	60 30	63.56	67.29	71. 7	74.49	78.34	82.21	86.10	90. 0
45	45. 0	45.13	45.44	46.55	48.22	50. 2	52.14	54 36	57.12	60. 0	62.58	66. 4	69.18	72.37	76 0	79 27	82.57	86.28	90. 0
50	50. 0	50.11	50.44	51.37	52.50	54.22	56 10	58.13	60.30	62.58	65.36	68.22	71.15	74.14	77 18	80.25	83.35	86.47	90. 0
55	55. 0	55. 9	55.36	56.21	57.23	58.41	60.13	61.58	63.56	66. 4	68.22	70.48	73.20	75.58	78.41	81.28	84.17	87. 8	90. 0
60	60. 0	60. 8	60.30	61. 7	61.58	63. 3	64.20	65 46	67.29	69.18	71.15	73.20	75 31	77.48	80. 9	82.34	85. 1	87.30	90. 0
65	65. 0	65. 9	65.24	65.55	66 36	67.29	68 32	69.45	71. 7	72.37	74.14	75.58	77 48	79.43	81.41	83.45	85.47	87.53	90. 0
70	70. 0	70. 5	70.19	70 43	71.15	71.57	72.46	73.44	74.49	76. 0	77.18	78.41	80. 9	81.41	83.17	84.55	86.36	88.17	90. 0
75	75. 0	75. 3	75.14	75.31	75.55	76.26	77. 3	77.46	78.34	79.27	80.25	81.28	82.34	83 45	84.55	86.10	87.26	88.42	90. 0
80	80. 0	80. 2	80. 9	80.21	80.37	80.57	81 21	81.49	82.21	82.57	83.35	84.17	85. 1	85.47	86.36	87 26	88.16	89. 8	90. 0
85	85. 0	85. 2	85. 5	85.10	85.18	85 29	85.40	85 29	86.10	86.28	86.47	87. 8	87.30	87.53	88.17	88.42	89 8	89.34	90. 0
90	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0	90. 0

Sodann nehme man ein beliebiges Gesetz an, nach welchem die durch C gehende gerade Linien (welche, wie gesagt, gröste Circul vorstellen) in Grade getheilt werden sollen. Diese Eintheilung nehme man auf einer Regel, welche sich um C herumdrehen läßt, wirklich vor, so daß die Grade von C aus gezählt werden. Ist dieses geschehen, so wird die Regel so gedreht, daß für jeden Werth von p und λ, der Bogen $AN = \omega$ werde. Den entsprechenden Werth von k sucht man auf der Eintheilung CN, und zeichnet dadurch den Punct M, welcher der verlangte Durchschnittspunct für λ und p seyn wird. Z. E. für $\lambda = 50$, $p = 30$ findet sich in der Tafel

$$\omega = 37^\circ.\ 0'$$
$$k = 56.\ 10$$

und damit wird

$$AN = 37^\circ.\ 0'$$

und für den Punct M auf CN $56^\circ.\ 10'$ genommen.

§. 99.

Es kömmt demnach nur darauf an, nach welchem Gesetze die Grade auf CN aufgetragen werden. Macht man z. E.

$$CM = \sin. k$$

so daß jede Grade da geschrieben werden, wo ihre Sinus von C gegen N getragen, hinfallen, so erhält man die **orthographische** Entwerfung.

Man erhält die **stereographische**, wenn man

$$CM = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ k$$

macht. Macht man hingegen

$$CM = \text{tang.}\ k$$

so kömmt die **Centralentwerfung** heraus. Da diese Entwerfungsarten bekannt sind, so habe ich zur Abänderung

$$CM = k$$

gemacht, und damit CN in 90 gleiche Theile, als so viele Grade getheilt. Man kann aus der 15ten Figur ersehen, wie die daraus fliessende Entwerfungsart ausfällt. Sie hat den Vortheil, daß auf jedem Mittags- und Breitenkreise die Grade sehr wenig ungleich sind, und daß sich diese beyden Arten von Kreisen auch nicht unter sehr schiefen Winkeln schneiden. Die Durchschnittswinkel auf AP, CP, CA sind durchaus von 90 Graden, und die Grade sowohl auf CA als auf CP sind gleichgroß, und so auch die Grade auf AP. Es hat übrigens diese Entwerfungsart weiter keine nähere Absicht, als daß man die Distanzen jeder Oerter von C auf einer gleichtheiligen Scale abmessen kann. Hingegen werden wir im folgenden sehen, daß, wenn man

Fig. 15.

Fig. 14.

$$CM = \sin.\ \tfrac{1}{2}\ k$$

macht, und damit auf der Regel jede Grade dahin schreibt, wo die Sinus ihrer Helften, von C

M 2 gegen

gegen N getragen, hintreffen, die ungleich mehr bestimmte Bedingung dabey eintrift, daß jede Länder dem Raume nach eine ihrer wahren Größe proportionirte Größe in der Zeichnung behalten.

IX. Entwerfungsarten der Erdfläche in Absicht auf die Größe der Länder.

§. 100.

Bey allen bisher erwähnten Entwerfungsarten der Erdfläche kann auf die Größe der Länder keine Rücksicht genommen werden, weil sie andern Absichten Genüge zu leisten gewidmet sind. Bey der stereographischen, und noch vielmehr bey der centralen Projection, werden die Grade von der Mitte aus größer, und damit scheinen auch die Länder, so von der Mitte der Charte weiter wegliegen, viel größer zu seyn, als sie wirklich sind. Bey Merkators Seecharten wird, was gegen die Pole liegt, unendlich groß. Hingegen bey der orthographischen Projection wird, was von der Mitte der Charte weiter weg ist, immer kleiner, und die am Rande herum liegenden Länder unendlich klein. Wenn es demnach die Frage ist, die Erdfläche so zu entwerfen, daß jede Länder ihre genaue proportionirte Größe behalten, so muß die Entwerfungsart besonders dazu eingerichtet werden.

§. 101.

§. 101.

Dieses kann nun auf sehr vielerley Arten geschehen. Es ist aber die allgemeine Auflösung der Frage von nicht geringerer Schwürigkeit und Weitläuftigkeit, als die, wovon oben (§. 65.) die Rede war. Wir können aber einige der einfacheren Fälle vornehmen, welche dadurch, daß sie bestimmter sind, weniger Schwürigkeiten haben. Der erste sey demnach derjenige, wo die Mittagskreise gerade parallele Linien sind, die den Aequator und dessen Parallelen, die ebenfalls gerade sind, rechtwinklicht durchschneiden. Dieser Fall ist sehr leicht. Denn der Aequator wird in 360 gleiche Theile als so viele Grade getheilt, die Mittagskreise sind dabey gerade Linien, so den Aequator unter rechten Winkeln schneiden, und die Grade der Breite werden da geschrieben, wo die Sinus derselben vom Aequator auf- und herunterwärts getragen, hinfallen. Auf diese Art stellt die 16te Figur den Raum der ganzen Erdfläche vor. Das ganze Verfahren gründet sich darauf, daß die Zonen der Erdfläche vom Aequator an gegen die Pole, ihrem räumlichen Inhalte nach, wie die Sinus der Breite zunehmen. Dieses macht auch, daß die Grade der Breite gegen den Pol zu sehr merklich kleiner, und bey dem Pol unendlich klein werden. Da indessen die ersten 30 Grade der Breite nicht sehr ungleich sind, so fällt eine Charte von Afrika, oder anderer um den Aequator herum liegender Länder noch ziemlich gut aus. Fig. 16. Fig. 17.

 §. 102.

§. 102.

Hingegen für solche Länder, die, wie z. E. **Amerika** ihre gröste Länge von Norden nach Süden haben, ist es besser, wenn man diese Zeichnungsart dergestalt umkehrt, daß man nicht den Aequator, sondern den mittlern Mittagskreis durch eine gerade in gleichgrosse Grade eingetheilte Linie vorstellt, den Aequator hingegen nach den Sinus der Grade der Länge eintheilt. Die 18te Figur stellt **Asien** nach dieser Art entworfen vor. AP ist der in gleichgrosse Grade getheilte Mittagskreis, so mitten durch die Charte geht. DAB ist der Aequator von A gegen D und B nach den Sinus der Grade der Länge eingetheilt. Jeder Durchschnittspunct M wird leicht gefunden. Denn die Ordinate MR ist der Sinus der Länge oder des Winkels RPM, und PR ist ein Bogen, dessen Tangente dem Product aus der Tangente der Aequatorshöhe PM, und dem Cosinus des Winkels RPM gleich ist. Die Ordinate MR stellt einen grösten Circul vor, welcher den Mittagskreis PA in R senkrecht durchschneidet. Man ziehe MQ auf AB senkrecht, so finden sich in Q die Grade des Bogens AQ abgeschnitten, dessen Sinus der Linie RM = AQ gleich ist. Ich habe für jede Durchschnittspuncte von 10 zu 10 Graden die Grade von AR und AQ in beyliegender Tafel vorgestellt, welche einen doppelten Eingang hat, und wo für jeden Punct M, p die Polhöhe, λ die Länge von A an gerechnet, vorstellt. Fig. 18.

stellt. Diese Tafel durfte nicht besonders berechnet werden, weil sie aus der vorhergehenden (§. 97.) herausgezogen, und nur die Aufschriften verändert werden konnten.

§. 103.

Ich werde nun zu einer andern Entwerfungsart fortschreiten, wo die Mittagskreise gerade Linien sind, die sich in dem Pol unter ihren wahren Winkeln durchschneiden. Die Frage ist, sie so in Grade zu theilen, daß jede Länder das wahre Verhältniß ihrer Größe erhalten.

§. 104.

Es seyn in der 8ten Figur Pn, $P\nu$ zween unendlich nahe Mittagskreise, und aus dem Pol P als aus einem Mittelpunct werden zween unendlich nahe Breitenkreise $M\mu$, $N\nu$ gezogen. Der erste sey für die Aequatorshöhe ε, der andere für $\varepsilon + d\varepsilon$. Der Winkel $NP\nu$ sey $= i\lambda$, und man setze $PM = x$, $MN = dx$. Hieraus folgt nun Fig. 8.

$$M\mu = xd\lambda$$

und damit ist der Inhalt von

$$MN\nu\mu = xdx.d\lambda$$

Dieser Inhalt muß dem durch dieses Räumchen vorgestellten Räumchen der Kugelfläche gleich, und demnach

$$xdx.d\lambda = \sin.\varepsilon.\ d\varepsilon.d\lambda$$

M 4 seyn.

Die Grade AR

λ^p	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10.0	10. 9	10 38	11.31	12.58	15.20	19.26	27.16	45.26	90.0
20.0	20.17	21.10	22.48	25.25	29.31	36. 3	46.47	64.30	90.0
30.0	30.23	31.34	33.42	37. 0	41.56	49. 6	59.21	73.16	90.0
40.0	40.26	41.46	44. 6	47.36	52.33	59.13	67.49	78.18	90.0
50 0	50.26	51.45	54. 0	57.16	61.39	67.14	73.59	81.43	90.0
60 0	60.23	61.31	63.26	66. 9	69.38	73.54	78.50	84.16	90.0
70.0	70.17	71. 7	72.30	74.25	76.50	79.41	82.54	85.58	90.0
80.0	80. 9	80.36	81.19	82.18	83.32	84.53	86.31	88.15	90.0

Die Grade AQ

λ^p	80	70	60	50	40	30	20	10	0
10	1.44	3.24	4.59	6.25	7.39	8.39	9.23	9.51	10.0
20	3.24	6 43	9.51	12.42	15 11	17.14	18.45	19.41	20.0
30	4.59	9.51	14.29	18.45	22.31	25.40	28. 2	29.30	30 0
40	6 25	12.42	18.45	24.24	29.30	33.50	37.10	39.16	40.0
50	7.39	15 11	22.31	29.30	35.56	41.34	46. 3	48.58	50.0
60	8.39	17.14	25.40	33.50	41.34	48.35	54.28	58.31	60.0
70	9.23	18 45	28. 2	37.10	46. 3	54.28	62. 1	67.44	70.0
80	9.51	19 41	29.30	39.16	48.58	58.31	67.44	75.54	80.0
90	10. 0	20. 0	30. 0	40. 0	50. 0	60. 0	70. 0	80. 0	90 0

seyn. Demnach ist

$$xdx = \sin.\varepsilon.d\varepsilon = -d\cos.\varepsilon$$

$$\tfrac{1}{2}xx = \text{Const.} - \cos.\varepsilon$$

Nun soll $x = 0$ seyn, wenn $\varepsilon = 0$ ist. Demnach wird

$$\tfrac{1}{2}xx = 1 - \cos.\varepsilon = 2\sin.\tfrac{1}{2}\varepsilon^2$$

$$x = 2\sin.\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Dieses ist demnach die Eintheilung der Mittagskreise, von welcher zu Ende des §. 99. die Rede war. Da wir die Anwendung, die davon gemacht werden kann, daselbst bereits gewiesen haben, so können wir dieser Anwendung zufolge
Fig. 19. in der 19ten Figur die zwo Halbkugeln der Erde vorstellig machen, wo nun die Pole nicht in der Mitte, sondern oben und unten am Rande des Kreises sind. Die Mittagskreise, so wie die Parallelkreise, sind krumme Linien, die sich vermittelst zweener Circul construiren lassen, indem ihre Ordinaten die Differenz der Ordinaten zweener Circul sind.

§. 105.

Es sey in der 14ten Figur alles, wie §. 96. 97. so ist

$$CM = 2\sin.\tfrac{1}{2}k$$

Man ziehe die Ordinate MQ, und setze

$$QC = x$$

$$MQ = y$$

so

so ist (§. 97.)

$$y : x = \text{tang.}\,\omega = \text{tang.}\,p : \sin.\lambda$$

Ferner

$$x^2 + y^2 = CM^2 = 4\sin.\tfrac{1}{2}k^2 = 2(1 - \cos.k)$$

Da nun (§. cit.)

$$\cos.k = \cos.\lambda.\cos.p$$

so ist

$$x^2 + y^2 = 2 - 2\cos.\lambda.\cos.p$$

Wenn man nun aus diesen zween Gleichungen

$$y\,\text{f}\,\lambda = x\,\text{tang.}\,p$$

$$x^2 + y^2 = 2 - 2\cos.\lambda.\cos.p$$

entweder λ oder p wegschaft, so erhält man im ersten Fall eine Gleichung zwischen x, y, p und diese bestimmt die krumme Linie für jeden Parallelkreis, dessen Breite = p. Im andern Fall erhält man eine Gleichung zwischen x, y, λ. Und diese bestimmt die krumme Linie für jeden Mittagskreis, der um λ Grade von C entfernt ist.

§. 106.

Die Gleichung für den ersten Fall oder für die Parallelkreise ist

$$x^2 + y^2 = 2 - 2\cos.p\sqrt{\left(1 - \frac{xx}{yy}.\text{tang.}\,p^2\right)}$$

Und aus dieser findet man nach mehreren Reductionen

$$y = \sqrt{(1 + \text{f}.p - \tfrac{1}{4}x^2)} \pm \sqrt{(1 - \text{f}.p - \tfrac{1}{4}x^2)}$$

oder, wenn

$$p = 90^\circ - \varepsilon$$

 gesetzt

gesetzt wird,

$$y = \sqrt{(2\cos.\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 - \tfrac{1}{4}x^2)} \pm \sqrt{(2\sin.\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}$$

§. 107.

Für den andern Fall oder für die Mittagskreise ist die Gleichung

$$x = \sqrt{(1 + \mathrm{s}.\lambda - \tfrac{1}{4}y^2(1 + \mathrm{s}.\lambda)^2)} \pm \sqrt{(1 - \mathrm{s}\lambda - \tfrac{1}{4}y^2(1 - \mathrm{s}.\lambda)^2)}$$

oder, wenn man

$$\lambda = 90^\circ - L$$

setzt,

$$x = \cos.\tfrac{1}{2}L^2 . \sqrt{(2\sec.\tfrac{1}{2}L^2 - y^2)} \pm \mathrm{s}.\tfrac{1}{2}L^2 . \sqrt{(2\operatorname{cosec}.\tfrac{1}{2}L^2 - y^2)}$$

§. 108.

Wir haben bey dem bisher betrachteten Fall (§. 103) angenommen, daß die Mittagskreise sich in dem Pol unter ihren wahren Winkeln schneiden. Diese Bedingung läßt sich so abändern, daß man setzt, die Winkel sollen n mal größer oder kleiner, als die wahren seyn. Dadurch wird nun die Gleichung (§. 104)

$$x\,dx.d\lambda = \sin.\varepsilon.d\varepsilon.d\lambda$$

in folgende

$$m\,x\,dx.d\lambda = \sin.\varepsilon.d\varepsilon.d\lambda$$

verwandelt, welche

$$m\,x\,dx = \mathrm{s}.\varepsilon.d\varepsilon. = -d\cos.\varepsilon$$

demnach

$$\tfrac{1}{2}m.xx = \mathrm{Const.} - \cos.\varepsilon$$

und,

und, wenn Const. wie vorhin, bestimmt wird,

$$\tfrac{1}{2}xx = \frac{1}{m}(1 - \cos.\varepsilon) = 2\,n.\sin.\tfrac{1}{2}\varepsilon^2$$

demnach

$$x = 2.\sin.\tfrac{1}{2}\varepsilon.\sqrt{\frac{1}{m}}$$

giebt.

§. 109.

Da man hier die Wahl hat, m nach Belieben zu bestimmen, so kann eben so, wie oben, (§. 56. 57.) wenn man nach dieser Formel Coniglobia verfertigen will, $m = \frac{3}{4}$ oder $= \frac{4}{5}$, oder $= \frac{5}{6} =$ &c. genommen werden.

§. 110.

Will man sich aber der Formel bedienen, um einzelne Länder, z. E. Europa zu zeichnen, so kann m dadurch bestimmt werden, daß auf der Charte der mittlere Grad der Breite zu dem mittleren Grad der Länge seine wahre Verhältniß habe, demnach

$$mxd\lambda : dx = \mathrm{s}\varepsilon'.\,d\lambda : d\varepsilon'$$
$$mxd\lambda\,.\,d\varepsilon' = \mathrm{s}\varepsilon'.\,dx\,.\,d\lambda$$

sey. Da nun

$$x = 2\,\mathrm{s}.\tfrac{1}{2}\varepsilon : \sqrt{m}$$
$$dx = d\varepsilon.\cos.\tfrac{1}{2}\varepsilon : \sqrt{m}$$

so findet sich hieraus

$$m = \cos.\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 = \frac{1 + \cos.\varepsilon}{2}$$

Nimmt

Nimmt man nun z. E. für Europa, wie oben (§. 52.)

$$\cos \varepsilon = \tfrac{3}{4}$$

so wird

$$m = \tfrac{7}{8}$$

und in dieser Verhältniß müßen die Grade der Länge vermindert werden. Für die Grade der Breite ist sodann

$$x = 4\sqrt{\tfrac{2}{7}} . \sin . \tfrac{1}{2}\varepsilon = 2{,}1380900 . \sin . \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Fig. 20. Wie die Zeichnung ausfällt, kann man aus der 20ten Figur sehen. Ich werde dabey nur noch anmerken, daß die 17te, 18te und 20te Figur nach einerley Maaßstabe gezeichnet sind, und daher die drey darinn vorgestellten Welttheile in Absicht auf ihre Größe mit einander verglichen werden können.

X. Entwerfung der sphäroidischen Erdfläche.

§. 111.

Die Erde ist überhaupt von der sphärischen Figur sehr wenig verschieden, und dieses macht auch, daß man sich bey Entwerfung der Erdfläche nicht sehr nach ihrer abgeplatteten Figur umsieht. Zu diesem Umstande kömmt aber noch ein anderer, welcher erheblicher zu seyn scheint. Es geht nemlich an sich nicht an, die Erdfläche so zu entwerfen, daß nicht die verschiedenen Theile an Größe und Lage ungleich und unähnlich werden sollten, weil eine krumme Fläche nicht in eine Ebene ausgebreitet werden kann. Die daher rührende Unähnlichkeit ist nun so beträchtlich, daß der Unterschied der sphärischen und der sphäroidischen Figur der Erde dabey ganz unmerklich wird. Soll demnach dieser Unterschied etwas auf sich haben, so muß die Entwerfung zu ganz besondern Absichten gewidmet und eingerichtet seyn.

§. 112.

Unter solchen Absichten gehört nun der Gebrauch der Seecharten bey der Schiffarth oben an. Man hatte auch nicht unterlassen, die genaue Bestimmung der Figur der Erde als etwas für die Schiffarth sehr wichtiges vorzustellen, und in der That lohnte es sich der Mühe, zu sehen, ob die Erde viel oder wenig abgeplattet ist. Die Verbesserung der Seecharten und die genauere Bestimmung der Richtung der Schiffe und ihres Weges hängt schlechthin davon ab, wenn zumal bey trüben Wetter das Schiff sicher geleitet werden soll.

§. 113.

Es kann ferner bey Specialcharten, wenn sie sehr genau seyn sollen, ebenfalls die Frage vorkommen, daß man die Verhältniß der Grade der Länge zu den Graden der Breite so bestimme, wie sie bey der sphäroidischen Erdfläche wirklich statt findet. Man kann endlich auch bey Entwerfung größerer Länder, ganzer Welttheile oder

oder selbst der ganzen Erdfläche sich, vorsetzen, die wahre Verhältniß bemeldter Grade dabey zum Grunde zu legen. Und sollte es sich finden, daß die Sache nicht mehr Arbeit fordert, als die Entwerfung der sphärischen Fläche, so ist offenbar, daß man sich eben so gut an die wahre Figur der Erde wird halten können. Durch diese Betrachtungen wird also bestimmt, wohin wir unser Augenmerk zu richten haben.

§. 114.

Wir werden uns vors erste um die Verhältniß der Grade der Länge zu den Graden der Breite umzusehen haben, weil sich sodann das meiste aus den vorhergehenden Abschnitten ohne Mühe auf die Entwerfung der sphäroidischen Erdfläche wird anwenden lassen. Es sey demnach $AC = CB$, der Halbmesser des Aequators $= 1$, $PC = b$ die halbe Erdaxe, und APB stelle einen Mittagskreis der Erde vor, den wir als eine Ellipse ansehen. Die Eccentricität sey $= e = \sqrt{(1 - bb)}$. Ferner sey M ein beliebiger Punct des Mittagskreises, MQ auf dem Aequator, MR auf der Axe senkrecht, und MT eine Tangente; so ist der Winkel TMP, den wir $= p$ setzen, der Polhöhe des Puncts M gleich. Man mache ferner

Fig. 21.

$$CQ = MR = x$$
$$MQ = CR = y$$

und den Bogen

$$AM = v$$

so

so findet man aus der Natur der Ellipse

$$\sqrt{x} = \left(\frac{1}{1 + b^2 . tp^2}\right)$$

Nun ist $x = MR$ der Halbmesser des Parallelkreises, in welchem der Punct M liegt. Setzt man nun zween Mittagskreise, deren Unterschied der Länge dem Differential $d\lambda$ gleich ist, so ist $xd\lambda = d\lambda : \sqrt{(1 + b^2 . tp^2)}$ der durch diese Mittagskreise abgeschnittene Theil des durch M gehenden Parallelkreises. Nennen wir diesen Theil $= dw$; so haben wir

$$dw = xd\lambda = \frac{d\lambda}{\sqrt{(1 + b^2 . tp^2)}}$$

§. 115.

Ferner findet man aus der Natur der Ellipse das Element des Bogens v

$$dv = \operatorname{cosec} p . dx$$

Da nun

$$dx = \frac{b^2 . tp . dtp}{(1 + b^2 tp^2)^{3:2}}$$

gefunden wird, so ist

$$dv = \frac{b^2 . \operatorname{cosec} . p . tp . dtp}{(1 + b^2 . tp^2)^{3:2}}$$

§. 116.

Hieraus folgt nun

$$dv : dw = \frac{b^2 . \operatorname{cosec} . p . tp . dtp}{(1 + b^2 . tp^2)^{3:2}} : \frac{d\lambda}{\sqrt{(1 + b^2 . tp^2)}}$$

oder

oder nach allen Reductionen

$$dv : dw = b^2 dp : \cos. p (1 - e^2 \text{ſ}. p^2) d\lambda$$

Dieses ist demnach die Verhältniß, die eigentlich zu suchen war. Wir werden sie nun auf einige Entwerfungsarten anwenden.

§. 117.

Bey den Seecharten werden sowohl die Mittagskreise als die Parallelkreise durch gerade einander senkrecht durchschneidende Linien vorgestellt, und die Grade des Aequators sind durchaus von gleicher Größe sowohl unter sich als mit den Graden jeder Parallelkreise. Dabey ist demnach

$$dw = d\lambda$$

und demnach

$$dv = \frac{b^2 dp}{\cos. p (1 - e^2 \text{ſ}. p^2)}$$

Hier stellt nun v nicht mehr den elliptischen Bogen AM, sondern dessen Projection auf der Charte vor. Wird diese Formel integrirt, so ist

$$v = \tfrac{1}{2} \log. \left(\frac{1 + \sin. p}{1 - \sin. p}\right) - \tfrac{1}{2} e. \log. \left(\frac{1 + e \sin. p}{1 - e \sin. p}\right)$$

oder

$$v = \log. \tan g. (45^\circ + \tfrac{1}{2} p) - \tfrac{1}{2} e \log. \left(\frac{1 + e \text{ſ}. p}{1 - e \text{ſ}. p}\right)$$

oder

$$v = l\, t (45^\circ + \tfrac{1}{2} p) - e^2 \text{ſ}. p - \tfrac{1}{3} e^4 \text{ſ}. p^3 - \tfrac{1}{5} e^6 \text{ſ} p^5 - \&c.$$

In

In dieser Formel bleibt das erste Glied allein, wenn $e = 0$, demnach die Erde als eine Kugel angenommen wird. Man sieht demnach, wie sich die Grade der Breite bey der Entwerfung der sphäroidischen Erdfläche verkürzen. Setzt man Kürze halber

$$e \sin. p = \sin. \phi$$

so erhält man

$$v = \log. \tan g. (45^\circ + \tfrac{1}{2} p) - e. \log. \tan g. (45^\circ + \tfrac{1}{2} \phi)$$

Der Erfolg ist nun überhaupt der, daß die Richtung des Schiffes auf der sphäroidischen Erdfläche mit dem Aequator oder dessen Parallelkreisen etwas kleinere Winkel macht, als auf der sphärischen Erdfläche. So z. E. wenn das Schiff im ersten Fall unter einem Winkel von 45° vom Aequator gegen Norden oder Süden fahrt, so wird dieser Grad auf der sphäroidischen Erdfläche um etwan 15 Minuten kleiner, wenn es in beyden Fällen sowohl der Länge als der Breite nach um einen Grad fortrücken soll. Auf der sphäroidischen Erdfläche sind ferner die Grade der Breite von ungleicher Größe, und so muß auch diese Ungleichheit in Rechnung gebracht werden, wenn man alles genau bestimmt haben will. Folgende Tabelle ist nach den erst gefundenen Formeln berechnet.

p	l t(45 + ½ p)	e.l t(45 + ½ φ)	v
5	0,0873773	0,0007560	0,0866213
10	0,1754259	0,0015068	0,1739191
15	0,2648420	0,0022461	0,2625959
20	0,3563785	0,0029686	0,3534099
25	0,4508754	0,0036688	0,4472066
30	0,5493061	0,0043414	0,5449647
35	0,6528365	0,0049814	0,6478551
40	0,7629098	0,0055839	0,7573259
45	0,8813736	0,0061442	0,8752294
50	1,0106831	0,0066579	1,0040252
55	1,1542346	0,0071217	1,1471134
60	1,3169578	0,0075305	1,3094273
65	1,5064543	0,0078825	1,4985718
70	1,7354151	0,0081742	1,7272409
75	2,0275894	0,0084036	2,0191848
80	2,4362460	0,0085688	2,4276772
85	3,1312990	0,0086685	3,1226315
90	infinit.	0,0087019	infinit.

In dieser Tabelle habe ich eben so wie in der vorhergehenden Abhandlung

$$b = \frac{229}{230}$$

und demnach

$$e = 0,0931490$$
$$e^2 = 0,0086767$$
$$e^4 = 0,0000753$$
$$e^6 = 0,0000006$$

ange-

angenommen. Der Halbmesser des Aequators ist dabey = 1, und demnach ein jeder Grad des Aequators = 0,0174533.

§. 118.

Wird diese Tabelle bis auf jede einzelne Grade oder vollends bis auf jede 10 Minuten erweitert, und die in vorhergehender Abhandlung gegebene Tafel von der Länge der Grade in Klaftern mit dazu genommen, so lassen sich die bey der Leitung eines Schiffes vorfallende Aufgaben leicht auflösen. Ich werde ein einiges Beyspiel davon geben. Ein Schiff kömmt aus dem Parallelkreise des 30sten Grades in den Parallelkreis des 40sten nach einer schiefen Richtung, so daß es zugleich 10 Grade der Länge zurückgelegt hat. Es soll die Länge des Weges bestimmt werden, wenn man setzt, die Richtung seines Laufes sey immer dieselbe gewesen. Nun sind nach der Tabelle der vorhergehenden Abhandlung

vom Pol bis zum 40ten Gr. ---	2865489	Klafter
30ten - - - -	3435205	
Unterschied	569716	

Ferner nach erstgegebener Tabelle (§. 117.)

vom Aequator bis zum 40ten Gr. ---	0,7573259
30ten - - -	0,5449647
Unterschied - -	0,2123612

End-

Endlich sind auf dem Aequator 10 Grade, $=0{,}1745329$. Man mache nun

$0{,}2123612 : 0{,}1745329 = 1 : 0{,}8218681$

so ist $0{,}8218681$ die Tangente des Winkels, so der Lauf des Schiffes mit dem Mittagskreise macht. Daraus findet sich die Secante dieses Winkels $= 1{,}2943984$, und mit dieser müssen die 569716 Klafter multiplicirt werden. Das Product 739013 Klafter giebt die gesuchte Länge des Weges.

§. 119.

Wir werden nun zu dem §. 48 zurückkehren, und die daselbst angegebene Entwerfungsart auf die sphäroidische Figur der Erde anwenden. Es sey demnach, wie dort,

Fig. 8.

$$PM = x$$
$$MN = dx$$
$$MP\mu = m.\,d\lambda$$

so muß (nach §. 116.)

$MN : M\mu = b^2\,dp : \cos.\,p\,(1 - e^2 \sin.\,p^2).\,d\lambda$

seyn. Nun ist

$$MN = dx$$
$$M\mu = x\,m\,d\lambda$$

demnach

$dx : x\,m\,d\lambda = -b^2\,dp : \cos.\,p\,(1 - e^2 \sin.\,p^2)\,d\lambda$

woraus folgt

$$-\frac{dx}{mx} = \frac{b^2.\,dp}{\cos.\,p.\,(1 - e^2 \sin.\,p^2)}$$

und

und, wenn man integrirt, eben so, wie vorhin, (§. 117.)

$$\frac{1}{m}\log.\frac{1}{x} = \log.\mathrm{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}p) - c\log.\mathrm{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi)$$

oder noch kürzer

$$\frac{1}{m}\log.\frac{1}{x} = v.$$

Demnach läßt sich x vermittelst der letzten Columne der im §. 117 gegebenen Tabelle leicht bestimmen, weil

$$-\log.x = mv$$

ist. Es müssen aber bey dieser Formel hyperbolische Logarithmen verstanden werden.

§. 120.

Der Werth von m läßt sich eben so, wie oben, (§. 48. folgg.) auf mehrere Arten bestimmen. Setzt man z. E.

$$m = 1$$

so erhält man die Projectionsart, wo die Winkel im Pole ihre wahre Größe behalten.

§. 121.

Man kann aber ebenfalls, wie im §. 51 den Werth von m so bestimmen, daß in der Projection nicht nur $M\mu$ sondern auch $N\nu$ zu MN Verhältniß haben, die auf der sphäroidischen Erdfläche bey einer gegebenen Polhöhe P wirklich statt findet. Es ist demnach

$$\frac{M\mu}{MN} = \frac{mxd\lambda}{dx} = -\frac{\cos.\, p\,(1 - e^2 \sin.\, p^2)\, d\lambda}{dp}$$

$$\frac{N\nu}{MN} = \frac{m(x+dx)\,d\lambda}{dx} =$$

$$-\frac{d\lambda(\cos.p - \sin.p\,dp):(1 - e^2 \sin.p^2 - 2e^2 \sin.p.\cos.p.dp)}{dp}$$

Wird die erste dieser Gleichungen von der zweyten abgezogen, so findet sich nach allen Reductionen

$$m = \sin.\, p - e^2.\, \sin.\, p\,(1 - 3\cos.\, p^2)$$

Demnach, wenn für p die gegebene Polhöhe P gesetzt wird,

$$m = \sin.\, P - e^2 \sin.\, P\,(1 - 3.\, \cos.\, P^2)$$

Der Gebrauch hievon ist, wie oben §. 51. 52.

§. 122.

Die im 5ten Abschnitte (§. 58. folgg.) angegebene Entwerfungsart läßt sich ebenfalls in ihrer ganzen Allgemeinheit auf die elliptische Figur der Erde anwenden. Es ist weiter nichts nöthig, als daß man im §. 61. anstatt

Fig. 10. $$NR : Rr = \lambda \sin.\, \varepsilon : d\varepsilon$$

nach dem §. 116.

$$NR : Rr = \cos.\, p\,(1 - e^2 \sin.\, p^2)\,\lambda : b^2\, dp$$

demnach (§. 61.)

$$\tfrac{1}{2} m\lambda\,(1 - xx) : dx = \lambda.\, \cos.\, p\,(1 - e^2 \sin.p^2) : b^2 dp$$

setze:

setze, woraus man

$$\frac{2\,dx}{m(1 - xx)} = \frac{b^2\, dp}{\cos.\, p\,(1 - e^2.\sin.\, p^2)}$$

und durch die Integration (§. 117.)

$$\frac{1}{m} \log.\, \frac{1+x}{1-x} = v$$

erhält, so daß die Zahlen der dritten Columne im §. 117. auch hier gebraucht werden können.

§. 123.

Vermittelst dieser Formel läßt sich nun die sphäroidische Erdfläche auf mehrere Arten dergestalt entwerfen, daß die Mittagskreise und Parallelkreise Circulbögen sind, daß diese sich durchaus unter rechten Winkeln schneiden, und die Grade der Länge und der Breite diejenige Verhältniß haben, die auf der sphäroidischen Erdfläche wirklich statt findet, und daß endlich dabey alle Winkel ihre wahre Größe behalten. Macht man hiebey $m = \frac{1}{2}$, so erhält man eine der 11ten Figur durchaus ähnliche Entwerfung der sphäroidischen Erdfläche.

VII.
Von Beobachtung und Berechnung der Cometen, und besonders des Cometen von 1769.

§. 1.

Tab. VIII. IX. X.

Die Erscheinungen der Cometen sind solche Anlässe, wo auch diejenigen, die aus der Astronomie keine Hauptbeschäftigung machen, ihren Vorrath von astronomischen Kenntnissen wiederum hervorziehen, theils um den Comet zu beobachten, theils auch um über seinen Lauf Muthmaßungen und Berechnungen anzustellen, und ihren Bekannten oder auch dem Publico davon Nachricht zu geben. Die Cometen sind ein Artikel selbst für öffentliche Zeitungen, und aus denselben, so wie aus den gelehrten Zeitungen, läßt sich abnehmen, wie weit es einem jeden gelingt, etwas zuverläßiges anzugeben, und so auch, wie weit ein jeder zurückebleibt.

§. 2.

Ungeachtet nun die genaue Bestimmung der wahren **Laufbahn** eines Cometen die Hauptschwürigkeit ist, so giebt es doch auch selbst bey der Beobachtung desselben verschiedenes anzumerken, das man voraus wissen muß. Ein Comet erscheint, so zu sagen, unversehens, zuweilen nur wenige Tage, und wenn auch seine Sichtbarkeit von längerer Dauer ist, so ist es doch gut, wenn man, so bald er anfängt sichtbar zu seyn, zur Beobachtung schreiten kann, ohne sich auf die Art und Weise lange zu besinnen, oder mehrere Tage mit Zurüstungen zu verlieren. Es ist klar, daß man dadurch desto ehender in Stand gesetzt ist, zu sehen, wie der Comet ferner seinen Lauf nehmen werde.

§. 3.

Ich bin eben nicht gesonnen, hier nur für Astronomen zu schreiben, die eine mit allem Vorrathe versehene Sternwarte haben. Ich werde vielmehr darauf bedacht seyn, auch für solche Liebhaber der Sternkunde zu sorgen, die ihre Beobachtungen theils mit wenigerem Vorrathe, theils auch bequemer, allenfalls auch nur zu ihrem eigenen Vergnügen anstellen wollen. Die Nachrichten, die ich von dem Comet 1769 in öffentlichen Blättern gefunden, und die mir sowohl besonders als in gedruckten Schriften zugekommen, geben mir Versicherung, daß meine Bemühung nicht vergebens seyn werde. Ich sahe, daß bey den Beobachtungen verschiedenes zu erinnern war, woran die Beobachter nicht dachten. Einige hatten statt der **wahren** Bahn des Cometen nur die **scheinbare** berechnet, wobey die wahre Bahn als geradlinicht angenommen wird. Andere suchten die wahre Bahn als eine Parabel zu bestimmen, und sahen sich nachher genöthigt, in ihrer Rechnung sehr beträchtliche Aenderungen vorzunehmen. Ja sie erregten dadurch den Zweifel, daß ihre über ehemals erschienene Cometen angestellte Berechnungen, zumal von solchen, die nur wenige Tage sichtbar gewesen, eben so beträchtlicher Aenderungen bedörfen. Dieses hat auch bereits ein Engländer denen so hurtigen französischen Calculatoren vorgeworfen.

§. 4.

Um nun in der ganzen Sache in behöriger Ordnung zu verfahren, werde ich überhaupt vom leichteren zum schwereren fortgehen, und besonders was die Beobachtungen betrift, die Betrachtungen darüber nach der Zeitordnung der Erscheinung der Cometen vornehmen.

I. Das Aufsuchen der Cometen.

§. 5.

Ein Comet wird im Heranrücken gegen die Sonne und die Erde sichtbar, und mehrentheils muß er sich schon bis innerhalb der Bahn des Mars heruntergesenkt haben, wenn er mit bloßen Augen gesehen werden soll. Zuweilen muß er sowohl der Sonne als der Erde noch näher seyn. Die Möglichkeit, einen Cometen in größern Entfernungen zu sehen, hängt von der Schärfe des Auges ab. Der Schweif ist

ist alsdann entweder sehr klein oder ganz unsichtbar, oder der Comet hat gar keinen. Und da bleibt nur die ebenfalls noch kleine Atmosphäre, die dem Comet ein blasses und trübes Ansehen giebt, woran derselbe als ein Comet zu erkennen ist. Wer alle Sterne gut kennt, bemerkt zuweilen einen Cometen dadurch, daß er an einer Stelle sichtbar ist, wo kein Firstern steht. Indessen muß in solchen Fällen aus andern Umständen geschlossen werden, daß es ein Comet und nicht etwan ein neuer Stern ist. Dahin gehört, daß ein Comet nicht an der Stelle stehen bleibt, sondern nach und nach seinen Ort ändert, daß man Cometen von Irrlichtern, Sternschneutzen, Nordlichtern und andern Lufterscheinungen unterscheiden könne, kann ich hier voraussetzen. Man findet in allen Anfangsgründen der Mathematik und Naturlehre, daß ein Comet den täglichen Umlauf mit Sternen und Planeten gemein haben müße, wiewohl es geschehen kann, daß ein Comet so wie der Mond und noch vielmal geschwinder von Stern zu Stern fortwandert.

§. 6.

Man kann aber der Schärfe des Auges mit einem Fernrohr zu Hülfe kommen, wenn man sich ein Vergnügen daraus macht, von neu zu sehenden Cometen die erste Nachricht zu haben. Das Fernrohr kann ganz einfach seyn. Es ist genug wenn das Objectivglas eine Brennweite von

von 7 oder 8 Zoll hat. Die Oefnung wird so groß gelassen als nöthig ist, damit man, so blaß und dunkel ein Comet seyn mag, denselben mit genugsamen Lichte sehen könne. Das Augenglas kann einen Zoll Brennweite haben. Seine Oefnung muß ebenfalls so groß seyn, als immer möglich ist, damit man einen desto größern Theil des Himmels mit einemmale übersehen könne. Ich habe ein solches Fernrohr von 8 Zoll, wo nemlich das Objectivglas 7 Zoll, das Augenglas 1 Zoll Brennweite hat. Die Oefnung des Augenglases ist ebenfalls 1 Zoll im Diameter. Dem Objectivglas kann ich eine Oefnung von 8 bis 12 Linien im Diameter lassen. Erstere ist unter Tagen hinreichend, weil der Augenstern klein ist. Letztere kann ich des Nachts gebrauchen. Damit übersehe ich mit einemmale einen Kreis am Himmel, der 6 bis 7 Grade im Diameter hat. Dessen unerachtet ist es scharf genug, daß ich bey hellen Nächten die Satelliten des Jupiter dadurch sehe, wenn sie nur nicht gar zu nahe bey demselben sind. Ich konnte auch durch dieses Fernrohr den Comet 1769 noch den 26ten November Abends, da er schon sehr nahe in den Dünsten beym Horizont war, das letztemal sehen. Er war damals schon weit über die Erdbahn hinaus, und von der Erde über zweymal weiter als die Sonne entfernt.

§. 7.

Ein solches Fernrohr dient nun eigentlich zum Aufsuchen der Cometen, wenn man damit nach

nach den Parallelcirculn des Horizonts, oder den Almucantharat in der Runde herumsieht. Beym ersten Herumfahren sieht man alle Sterne, die nicht über 6 Grad über den Horizont erhöht sind. Das zweytemal reicht man bis an die Sterne, die 12 Grad Höhe haben. Fährt man so fort, so reicht man das funfzehntemal bis an das Zenith, und damit hat man die ganze sichtbare Halbkugel des Himmels durchmustert. Es ist sehr vermuthlich, daß Hr. Meßier, der seit mehreren Jahren immer die Cometen zuerst entdeckt, wenn sie mit blossem Auge noch nicht zu sehen sind, sie auf diese oder eine ähnliche Art aufsucht, und den Himmel monathlich wenigstens einmal durchmustert. In 10 Jahren hat er 10 Cometen wahrgenommen, und so ist nicht zu vermuthen, daß es nur zufälligerweise geschehen. Seitdem habe ich mir eine Lorgnette verfertiget, welche nur $2\frac{1}{2}$ Zoll lang ist, und über 7 Grade faßt. Das Objectivglas hat eine Brennweite von $3\frac{3}{4}$ Zoll, und eine Oefnung von 13 Linien. Das Augenglas ist Concav, und hat eine Brennweite von 1 Zoll. Diese Lorgnette hat den Vortheil, daß sie die Lage der Sachen nicht verkehrt vorstellt.

§. 8.

Uebrigens ist es eben nicht nothwendig, daß jeder Comet anfangs aufgesucht werden muß. Ein Comet kann sich gegen dem Südpol der Erde

Erde nähern, ohne daß wir ihn anfangs sehen. Kommt er sodann mit einemmal über unsern Horizont hinauf, so zeigt er sich gleich anfangs in einer beträchtlichen Größe. Eben so kann auch ein Comet währenden Mondscheins sich der Erde nähern, und erst dann sichtbar werden, wenn der Mond ihn nicht mehr verdunkelt. Dieses war der Fall des Cometen von 1769. Man sahe ihn in Deutschland erst zu Ende des Augusts, weil erst alsdann der Mond anfing nach Mitternacht aufzugehen, und aus allem erhellte, daß man ihn schon vorher hätte müßen sehen können, wenn nicht trübes Wetter und Mondschein hinderlich gewesen wären. Endlich kann auch ein Comet unter Tagen der Erde nahe kommen, und erst dann anfangen des Abends oder des Morgens sichtbar zu seyn. In allen solchen Fällen, und besonders wenn der Comet Morgens frühe anfängt gesehen zu werden, sind es gewöhnlich Landleute, Reisende und Nachtwachen, die ihn zuerst sehen und ankündigen. Dieses ist auch bey dem Cometen 1769 an mehreren Orten geschehen. Ich hatte selbst auch auf diese Art zum erstenmal Nachricht davon. Das anderemal, da nemlich der Comet wieder aus den Sonnenstralen herauskam, durfte ich mir nicht erst Nachricht geben lassen, weil ich voraus wußte, daß ich ihn nach der Mitte des Octobers, sobald der Mondschein und die Witterung es zuließ, des Abends gegen Westen am Fuße des Berges Mænalus nahe bey der Schlange würde

würde aufzusuchen haben. Indessen mußte ich doch bis auf den 23ten October Geduld haben, ehe ich ihn das erstemal wieder sehen, und das

Quantum mutatus ab illo!

ausrufen konnte. In der That schien er so zugerichtet, daß man ihn kaum wieder erkennen konnte.

Squallentem barbam & concretos sanguine crineis
Vulneraque illa gerens, quæ circum plurima *solem*
Accepit —

§. 9.

Wenn man sich indessen bey den ersten Nachrichten von der Erscheinung eines Cometen auf die Stadtwächter verlassen muß, so steht es damit sehr mißlich aus. Solche Leute mengen Cometen, Sternschnuppen, Irrwische, Nordlichter, Feuerkugeln, Träume, Blendwerke, kurz alles durch einander. Man muß sie umständlich ausfragen, ob die von ihnen gesehene Erscheinung am Himmel oder auf der Erde gestanden, ob sie gehüpft, gesprungen, gelaufen, oder stille gestanden, ob sie lange gedauert habe, ob sie sich die ganze Zeit über immer gleich gezeigt, wie groß sie gewesen, ob sie wirklich den Kopf und den Schweif deutlich gesehen, und wie groß beydes aussahe, von welcher Farbe ꝛc. Werden solche Fragen vernünftig beantwortet, so läßt sich schon verschiedenes daraus abnehmen, und beurtheilen, ob es auf einen Cometen paßt oder nicht. Man kann solche Leute auch fragen,

gen, ob sie auch einen von den ehemals erschienenen Cometen gesehen, und in welchem Jahre? Endlich, wenn alles, was sie antworten, wirklich einen Cometen vermuthen läßt, so bleibt noch die schwerste Frage, in welcher Gegend des Himmels sie ihn gesehen haben? Auf diese Frage wird gewöhnlich die Antwort seyn, der **Comet habe über diesem oder jenem Gebäude, Dorfe, Straße rc. gestanden.** Diese Antwort ist in ihrer Art ganz recht, denn solche Leute sehen so zu reden nicht den Comet selbst, sondern sein Bild, so wie es ihnen in der Luft ungefehr in der Höhe der Wolken zu schweben scheint. Von da an ziehen sie mit dem Auge eine Linie herunterwerts, und bestimmen dadurch den Ort, über welchem der Comet zu stehen **scheint.**

§. 10.

Nun ist mit einer solchen Antwort noch nicht viel ausgerichtet. Man muß an den Ort hingehen, wo die Leute gestanden, und sich den Ort weisen lassen, damit man die Gegend des Himmels finden könne. Sodann muß man auch fragen, um wie viel Uhr sie den Comet daselbst gesehen, damit man die Himmelskugel darnach stellen, und die Sternbilder aufsuchen könne, bey welchen der Comet soll gestanden haben. Da aber gewöhnlich alles dieses sehr weitläuftig fällt, so wartet man lieber auf die nächste helle Nacht, wo man, wenn die Erscheinung in der That ein Comet war, denselben gewöhn-

gewöhnlich wieder sehen wird, dafern es nemlich, da ihn die Leute sahen, nicht das letztemal war. Der Umstand, daß der Schweif immer von der Sonne weggekehrt ist, kann zuweilen auch dienen, sich näher zu erkundigen, wenn die Leute auf die Frage, wohin der Schweif gerichtet gewesen, geschickt zu antworten im Stande sind.

§. 11.

So sieht es noch dermalen mit dem Aufsuchen und den ersten Nachrichten von Cometen aus. Man hat bisher nur ein einigesmal die Ankunft eines Cometen mit behöriger Zuverlässigkeit erwartet. Dis war 1757, und, wenn man mit **Clairaut** alle Umstände in die Rechnung zog, erst 1759. Man konnte zwar den Tag der ersten Erscheinung nicht angeben, indessen war es immer dabey möglich, die Gegend des Himmels anzuzeigen, wo derselbe, in welchem Monate man ihn auch zuerst sehen sollte, aufzusuchen seyn würde. Er bot sich indessen einem Landmann bey Dresden von selbst an, und man fand bald, daß es in der That der schon seit dem Anfange des Jahrhunderts von Halley angekündigte Comet war. In diesem Jahrhundert haben wir höchstens noch einen Cometen, welcher ungefehr 1790 wiederkommen soll, voraus zu erwarten. Es ist der, so 1532 und 1661 gesehen und beobachtet worden, und, in so fern man nur aus zwo Beobachtungen schliessen

sen kann, eine Periode von 129 Jahren hat. Rechnet man damit rückwärts, so kömmt man auf die Jahre 1403, 1274, 1145 rc. Auf diese Jahre finden sich bey **Lubiniezki** Cometen aufgezeichnet, aber ohne alle Umstände, und damit läßt sich auf die Identität dieser Cometen nicht zuverläßig schließen. Man wird auch überhaupt erst in einigen Jahrhunderten im Stande seyn, die Rückkunft der Cometen voraus zu sagen, wenn nemlich alle inzwischen erscheinende Cometen fleißig beobachtet und richtig berechnet werden.

§. 12.

Inzwischen hat **Hanov** ein sehr vollständiges Verzeichniß der bis 1748 gesehenen Cometen in seinen **Seltenheiten der Natur und Oeconomie** herausgegeben. Er war auch darauf bedacht, einen Versuch zu machen, **dieses Register in solche Ordnung zu bringen, daß man die Cometen mit der Zeit, wie die Planeten, von einander unterscheiden, und ihre Erscheinungen vorhersagen könne.** Von diesem Versuche ist mir nun weiter nichts bekannt worden. Indessen hat das Problem einen Anschein von Möglichkeit. Man kann vermittelst eines solchen Registers eine Menge von Perioden finden, die wenigstens Perioden von Cometen seyn können. Ich habe wirklich einen Versuch davon gemacht, fand aber dennoch, daß die allzugrosse Anzahl der Cometen das

das Problem weniger brauchbar macht, als es, wenn der Cometen weniger wären, seyn würde. Um dieses begreiflich zu machen, so setze man z. E. daß alle Jahr ein Comet erscheine, so ist klar, daß man so viele Perioden herausbringen kann, als man immer will, wenn man weiter nichts als die Jahre der Erscheinung zum Grunde legt. Nun erscheinen zwar nicht alle Jahre Cometen, indessen stehen doch in dem Hanovschen Register von 1500 bis 1600 mehr als 50 Cometen aufgezeichnet, und dieses giebt eins ins andere gerechnet, alle zwey Jahr einen Comet. Nun sind die periodischen Zeiten der Cometen um 1 oder 2 Jahr veränderlich, wie man es an dem von 1759 sehen kann, und wie es überhaupt auch aus der allgemeinen Schwere begreiflich ist. Demnach kann man auch aus diesem Grunde bey einer so grossen Anzahl von Cometen nicht gewiß seyn, zu welcher Periode ein jeder gehört, wenn man weiter nichts als das Jahr der Erscheinung vor sich hat. Wären hingegen nur wenige Cometen, so würden sich auch aus Vergleichung der Jahre ihre Perioden eher ausfinden lassen. So aber muß man mehrere Umstände zu Hülfe nehmen, und dieses kann erst in den folgenden Zeiten geschehen, weil wir dermalen nur noch 50 bis 60 Cometen genauer berechnet haben. Inzwischen werden wir uns mit dem Aufsuchen oder dem Anzeigen der Stadtwachen, Reisenden rc. begnügen müssen.

§. 13.

Der Ort des Himmels, wo ein Comet das erstemal gesehen wird, kann ein jeder Punct des Himmels seyn. Denn der Caßinische Thierkreis der Cometen ist eine leere Erdichtung, woran sich die Cometen gar nicht binden. Indessen läßt sich dennoch verschiedenes überhaupt anmerken. Man kann zugeben, daß die Cometen, die beym Pol der Ecliptic gesehen werden, seltener sind, weil sie voraus setzen, daß zur Zeit, wenn der Comet innerhalb der Erdbahn eintritt, die Erde sich gerade unter demselben befinde. Dieser Fall ist nun sehr selten, und der Comet kann zwölfmal wiederkehren, ehe die Erde sich wiederum in gleicher Lage findet, es sey denn, daß die Periode des Cometen genau von einer Anzahl Jahren ist, welches aber wegen der Veränderlichkeit derselben nicht statt hat.

§. 14.

Sodann kommen die Cometen, indem sie zur Sonne heranrücken, zugleich auch der Ecclipticnäher, und zwar weil die Sonne in der Ecclipticist. Dieses macht nun ebenfalls, daß die Cometen der Ecclipticdesto näher gesehen werden, je näher sie zur Sonne kommen. Cassini hätte demnach sowohl die Sternbilder der Eccliptic als die so nächst an dieselben grenzen, als einen Thierkreis der Cometen ansehen können. Dadurch aber würde dieser Thierkreis so breit geworden seyn, daß er den größten Theil des

des Himmels eingenommen hätte, und der Gebrauch wäre sehr geringe gewesen. Denn die Absicht eines solchen Thierkreises sollte eigentlich seyn, daß man ein für allemal wüßte, in welchen Sternbildern man die Cometen aufzusuchen habe. Können aber die Cometen in allen Sternbildern erscheinen, so fällt diese Absicht ganz weg, weil man sodann die Cometen am ganzen Himmel herum aufsuchen muß.

II. Die ersten Beobachtungen eines Cometen.

§. 15.

Man mag nun einen Comet durch eigenes Nachsuchen oder auf fremde Nachrichten gefunden haben, so ist nun die Frage, was weiter vorzunehmen ist. Ich setze voraus, daß man denselben nicht bloß anstaunen wolle. Denn dieses bedarf keiner besondern Anleitung. Die Hauptabsicht soll seyn, denselben dergestalt zu beobachten, daß man auf seine fernere Erscheinung, so bald möglich, einen Schluß machen könne. Dazu gehört nun, **daß man ohne weitere Säumniß seinen Ort am Himmel bestimme, und die Zeit dieser ersten Beobachtung genau bemerke.** Sodann kann man ihn mit guter Weile genauer betrachten, und **seine Gestalt, Größe, Dunstkreis, Länge, Figur und Richtung des Schweifes bemerken und aufzeichnen.**

 Nach

Nach Verlauf von einer oder zwoen Stunden beobachtet man seinen Ort nochmals, um zu sehen, ob er geschwinde oder langsam von Stern zu Stern forrückt, und wohin er seinen Lauf richtet. Dadurch findet man sich in Stand gesetzt, zu urtheilen, wo man ihn in der folgenden Nacht aufzusuchen habe. Es hat Cometen gegeben, die in Zeit von 24 Stunden 40 Grade durchlaufen haben. Es kann auch ein Comet mit eben der Geschwindigkeit sich so bewegen, daß, da man ihn die erste Nacht sehr gut sieht, er die nächstfolgende Nacht bereits unter dem Horizonte oder unter den Sonnenstralen oder bey dem Monde ist. In solchen Fällen thut man gut, wenn man gleich die erste Nacht die Beobachtungen Stunde für Stunde fortsetzt. Und da Cometen, die so schnell laufen, nothwendig sehr nahe bey der Erde vorbey gehen, so kann es auch geschehen, daß sie eine merkliche Parallaxe haben, und diese kann eben so wichtig werden, als der Durchgang der Venus vor der Sonnenscheibe. Bewegt sich aber der Comet sehr wenig, so kann man um desto sicherer darauf zählen, daß er auch noch die folgenden Nächte sichtbar seyn werde.

§. 16.

Wenn ein Comet sich bey der ersten Erscheinung sehr geschwinde bewegt, und in einem Tage mehrere Grade durchläuft, so kann man sicher schliessen, daß er schon vorher hätte gesehen werden können. Denn er muß nothwendig schon nahe bey der Sonne oder der Erde oder beyden seyn. Die scheinbare Bewegung eines Cometen rührt sowohl von der Bewegung der Erde als des Cometen selbst, und von der Lage desselben in Ansehung der Erde her. Der Comet selbst läuft desto geschwinder, je näher er der Sonne kömmt. Die Bewegung der Erde hingegen ist an sich merklich gleichförmig, und hat in die scheinbare Bewegung des Cometen einen desto grössern Einfluß, je näher der Comet bey der Erde vorbeygeht. Fragt man nun aber, warum dann der Comet nicht eher gesehen worden, so muß diese Frage aus den Umständen entschieden werden.

1. Tritt der Comet aus den Sonnenstralen, indem er sich von der Sonne wegbewegt, so ist die Frage bald entschieden.
2. Sie entscheidet sich eben so leicht, wenn der Mondschein oder trübe Tage Hindernisse waren.
3. Sieht man aus der Richtung des Laufes, daß der Comet vorhin unter dem Horizonte gewesen, so ist ebenfalls klar, daß ihn die Antipoden vorhin gesehen haben, oder wenigstens haben sehen können.
4. Findet hingegen keiner von diesen Umständen statt, so hat man ihn bloß deßwegen nicht früher gesehen, weil man das Aufsuchen versäumt hat.

§. 17.

Wenn sich hingegen ein Comet bey der ersten Erscheinung sehr langsam bewegt, so kann man bloß daraus auf seine Entfernung keinen Schluß machen. Ein Comet kann aus bloß optischen Ursachen ganz stille zu stehen scheinen, oder stationarius seyn, und sich indessen nähern oder entfernen. Da er aber inzwischen bey einerley Sternen bleibt, so fährt er dessen unerachtet fort sichtbar zu seyn. Am gewöhnlichsten aber bewegen sich die Cometen sowohl aus optischen als physischen Gründen langsam, wenn sie entweder erst anfangen in den Kreis ihrer Sichtbarkeit heranzurücken, oder wiederum daraus wegziehen.

§. 18.

Aus der scheinbaren Richtung des Laufes läßt sich auf die wahre Richtung nicht unbedingt schließen. Beyde können zuweilen zusammentreffen. Sie können aber auch einander entgegengesetzt seyn. Alles dieses kömmt auf die Lage des Cometen gegen die Erde an. Wenn man aber die Erdbahn zeichnet, und sowohl den Ort der Erde als auch die Linien, nach welchen der Comet von der Erde aus gesehen worden, bestimmt, so fällt der optische Effect von der Bewegung der Erde weg, und da läßt sich mehrentheils schon daraus schließen, was es überhaupt betrachtet mit der wahren Bewegung des Cometen für eine Bewandniß habe. Wir werden dieses

dieses aber im folgenden näher betrachten können, und uns hier noch mit den Beobachtungen beschäftigen.

III. Die Beobachtung des scheinbaren Orts der Cometen.

§. 19.

Ich werde hier die verschiedene Arten, den Ort eines Cometen zu bestimmen, durchgehen, und darüber einige Anmerkungen machen. Wenn es nur überhaupt darum zu thun ist, daß man andern anzeigen könne, wo sie den Cometen aufzusuchen haben, da ist die bloße Kenntniß der Sterne oder eine Himmelscharte, z. E. Bayers Uranometrie, Flamsteds oder Doppelmayers Atlas hinreichend. Bey dem Comet 1769 hatte dieses im Anfang seiner Erscheinung um so viel weniger Schwürigkeit, weil derselbe durch die sternenreichste Gegend des Himmels seinen Lauf nahm.

§. 20.

Will man sich aber mit den etwas unbestimmten Ausdrücken, **nahe, bey, neben, über, unter** etc. nicht begnügen, sondern den Ort genauer angeben, so sucht man etwa zween Sterne, welche mit dem Comet eine gerade Linie machen. Man sucht zugleich noch zween andere Sterne, die ebenfalls mit dem Comet in gerader Linie sind. Der Durchschnitt dieser zwo geraden Linien, der so viel möglich rechtwinklicht seyn muß, bestimmt sodann den Ort des Cometen, so daß man nur noch die Stunde und Minute anzugeben hat, wenn der Comet in dieser Stellung beobachtet worden.

§. 21.

Alles dieses scheint ganz einfach, leicht und nett zu seyn. Sieht man aber genauer nach, so werden solche gerade Linien öfters nur mit bloßem Auge gezogen, und da kann man sich sehr merklich irren, und zwar aus eben den Gründen, aus welchen der Himmel ein flach gedrücktes Gewölbe zu seyn, oder der Comet über diesem oder jenem Gebäude zu stehen scheint.

§. 22.

Nun giebt man freylich den Rath, daß man einen Faden ausspannen, und dann sehen soll, ob derselbe den Comet und die beyden Sterne zugleich bedecke. Damit geht es nun etwas besser. Der Comet bewegt sich, demnach geht er bald zwischen diesen, bald zwischen andern Sternen durch. Die Frage ist nur, den Augenblick zu treffen, wenn es geschieht. Diesen Augenblick wartet man aber nicht immer ab, und damit geschieht es, daß man den Comet in solchen Augenblicken mit zween Sternen in gerader Linie setzt, wo er noch mehrere Minuten eines Grades davon weg ist. Man setze aber, daß man den wahren Augenblick ganz genau treffe, so macht eine Linie die Sache noch nicht aus. Der Comet

Comet soll im Durchschnitt zwoer geraden Linien beobachtet und angegeben werden, und diese Linien sollen, jede durch zween Sterne gehen. Da muß ich sagen, daß der Fall, wo dieses alles genau zusammentrift, so selten ist, daß man dabey gewöhnlich um viertel Grade fehlen kann. Es ist ohnehin nicht anzurathen, daß man hiezu Sterne gebrauche, die viele Grade von einander entfernt sind.

§. 23.

Man gebraucht daher auch noch andere Mittel, und besonders das Augenmaaß. Man nimmt nemlich zween nächst bey dem Comet befindliche Sterne, und stellt sich den Triangel vor, den diese Sterne mit dem Comet bilden. Diesen Triangel sucht man sodann in den Himmelscharten nachzuzeichnen, so gut es das Augenmaaß angiebt. Allein auch hierin kann man sich, auch mit dem besten Augenmaaße sehr merklich irren, und zwar aus eben dem Grunde, aus welchem die Sonne und der Mond am Horizonte viel größer zu seyn scheinen, als wenn sie näher beym Zenith sind. Man fehlt eben so, wenn man sich getraut, den Abstand des Cometen von Sternen in Graden zu schätzen. So schien im September 1769 der Schweif des Cometen, so lange der Comet am Horizonte war, von einer ungeheuren Länge. Er schien sich aber desto mehr zu verkürzen, je mehr der Comet sich über den Horizont erhub, ungeachtet das

das äußerste Ende immer bey eben den Sternen zu sehen war.

§. 24.

Ich führe diese Anmerkungen um desto mehr an, da ich bey verschiedenen Beobachtern des Cometen bemerkt, daß sie darauf nicht Achtung gegeben, und die daher entstehenden Fehler noch mit denenjenigen vermengt haben, die aus der verzogenen Figur und ungleichen Graden der Doppelmayerschen Charte herrührten, wo ohnehin auch viele Sterne sehr unrichtig eingetragen sind. Ich hatte die ersten Beobachtungen des Cometen von jemand erhalten, der sich der bisher erwähnten Mittel, ihrer Fehler ungeachtet, bedient, und sie bis auf einzelne Minuten genau anrühmte. Die darnach construirte Bahn des Cometen aber wich gleich in den ersten Tagen so sehr von den folgenden Beobachtungen ab, daß ich sie nachgehends neu verzeichnen, dem bemeldten Fehler nachspühren, und die Construction endlich auf meine eigene Beobachtungen gründen mußte. Ich hatte diese zwar ebenfalls nur vermittelst der Schätzung nach dem Augenmaaße angestellt, allein um den von der scheinbaren Figur des Himmels herrührenden optischen Betrug zu vermeiden, gebrauchte ich eine Lorgnette, die nur einen Grad faßte. Da sich aber der Comet immer bey Sternen befand, von denen er weniger als einen Grad entfernt war, so gieng die Schätzung durch die Lorgnette an. Statt der Doppelmayerschen Charte zeichnete ich die Sterne genau, und nach dem Maaß ihrer Entfernungen, und damit ließ sich die jedesmalige Stellung des Cometen bis auf einige wenige Minuten bestimmen. Diesen Unterschieden half ich endlich noch dadurch ab, daß ich die scheinbare Bahn des Cometen zwischen den bemerkten Puncten so einförmig durchzog, daß sie zwischen den 8 angestellten Beobachtungen das Mittel hielte. Der Erfolg zeigte auch, daß ich nicht Ursach hatte, von meiner nach diesen Beobachtungen bestimmten Bahn des Cometen abzugehen, die ich nebst der verzeichneten Charte der Königl. Akademie der Wissenschaften den 14ten September vorlegte.

§. 25.

Da ich indessen voraus sahe, daß der Comet bey seiner Rückkehr von der Sonnen an einem solchen Orte des Himmels erscheinen würde, wo die Sterne in ungleich geringerer Anzahl sind, als bey dem Stier und dem Orion, wo er im September gesehen wurde; so verfertigte ich mir ein **Bouguerisches** Objectivmicrometer. Ich nahm ein gutes Brillglas von 10 Zoll Brennweite, und ließ es mitten entzwey schneiden, um jeden Theil in einen Schieber einzufassen, nachdem ich ihn dem Durchschnitte nach eben abgeschliffen hatte. Das ganze Instrument stellt die erste Figur vor. A, B sind zwey viereckigte Röhren, C eine runde, in welcher Fig. 1

cher das Ocularglas, so $1\frac{1}{2}$ Zoll Brennweite und 11 Linien Oefnung hat, eingesetzt ist. Vorne an der Röhre B ist das Plättgen DEFG befestigt, in welchem die beyden Schieber aa, bb zwischen dem Plättgen DF und der Röhre B durchgehen. Die in den Schiebern aa, bb eingesetzten Hälften des Glases haben eine Oefnung von 8 Linien. Die Breite der Röhre B ist von 2 Zoll, EF von $2\frac{1}{2}$ Zoll, DE von $7\frac{1}{2}$ Zoll. Die in dem Plättgen DF gemachte Oefnung hat eine Länge von 3 Zoll, und ist 8 Linien breit, so viel nemlich die Oefnung des Objectivglases austrägt. Werden beyde Schieber so weit ausgezogen, daß die Oefnung der Gläser anfängt, die Röhre B an beyden Seiten zu berühren, so stehen die Mittelpuncte der Gläser 7 Grade weit von einander. Diese 7 Grade haben eine Länge von 15 Linien, demnach jeder Grad 2, 14 Linien. Ich theilte jeden Grad in 6 Theile, oder von 10 zu 10 Minuten ein, und damit konnte ich so ziemlich die Schätzung bis auf einzelne Minuten treiben. Eigentlich sollten die Grade ungleich, und zwar nach den Tangenten getheilt seyn. Da ich mich aber mit einzelnen Minuten begnügte, so konnte ich dieses unterlassen. Denn die 7 Grade halbirt, geben für jedes Glas $3\frac{1}{2}$ Grade. Nun ist von $3\frac{1}{2}$ Graden

die Tangente = 0,0611626
der Bogen = 0,0610865

der Unterschied = 0,0000761

Der

Der Unterschied beträgt demnach auf 800 nur 1, und damit auf die ganzen 7 Grade nur $\frac{1}{2}$ Minute, wofür ich ohnehin nicht gut stehen konnte. Wenn aber auch der Unterschied größer wäre, so könnte man desselben gar leicht Rechnung tragen.

§. 26.

Dieses Instrument, so ich von fester Pappe ganz leicht gemacht hatte, konnte ich nun ganz bequem gebrauchen, den Abstand des Cometen von Sternen zu messen. Ich hielt es mit der einen Hand vor das Auge, und mit der andern trieb ich mit dem Zeigefinger den einen Schieber ~~aus~~werts, mit dem Daumen aber schob ich den andern auswerts, die übrigen Finger gebrauchte ich zum Andrucken und Festehalten. Mehrerer Versicherung wegen maß ich immer den Abstand des Cometen von 3 oder 4 Sternen. Dieses gieng bis auf den 19ten Wintermonath ganz gut von statten. Auch den 22ten wäre es noch angegangen. Ich konnte aber, weil der Himmel neblicht wurde, nur einen Abstand messen. Den 26ten sahe ich zwar den Cometen noch durch den oben (§. 6.) beschriebenen Aufsucher, hingegen mit diesem Ausmesser konnte ich ihn, wenn beyde Gläser in den Schiebern beysammen waren, nur mühsam, und wenn sie ausgezogen wurden, gar nicht mehr sehen, weil das Licht wegen der kleinern Oefnung des Objectivs zu schwach war, bey dem Auseinanderziehen

Hein

ziehen aber um die Hälfte schwächer wurde, und überdis das durch beyde Hälften einfallende Licht sich vermengte. Der Hauptgrund aber war wohl in denen sich in der Luft aufhäufenden Dünsten zu suchen.

§. 27.

Ich wollte nun denen, die bey Erscheinung eines Cometen denselben auf eine leichte Art und zu ihrem eigenen Vergnügen beobachten möchten, diese beyden Instrumente anrathen, zumal, wenn sie weiter nichts als die Gläser einzukaufen haben, und das übrige selbst machen können. Es ist doch auch so wenigstens immer besser, als wenn sie sich mit der blossen Schätzung nach dem Augenmaasse, oder mit Ausspannung eines Fadens begnügen, wobey Fehler von viertel und halben Graden mit unterlaufen können. Wer aber mehr aufwenden will, kann sich beyde Instrumente von einem geschickten Mechanicus, und besonders den Auemesser so machen lassen, daß die Schieber durch Schrauben auseinandergetrieben, und die auf der vordern Seite befindliche Eintheilungen vermittelst eines nonius oder Räderwerkes bis auf die äußersten Kleinigkeiten genau gemacht werden. Man muß aber alsdann auch eine Reductionstafel haben, um die Tangenten in Grade zu verwandeln, wenn man alles so genau nehmen will.

§. 28.

Es sind übrigens noch andere Methoden, einen Cometen zu beobachten, bereits bekannt. So

So z. E. um den Abstand des Cometen von Sternen zu finden, läßt sich jeder Sector, so wie auch der Reflexionsquadrant oder Octant gebrauchen, wiewohl letzterer, so wie ihn die Schiffer gebrauchen, gewöhnlich nur auf einzelne Minuten geht.

§. 29.

Am gewöhnlichsten gebraucht man ein Fernrohr mit Creuzfäden im Micrometer, und stellt es überhaupt betrachtet so, daß der Comet und vor oder nachher ein bekannter Stern durch die Fäden geht. Die Fäden können horizontal und vertical, oder nach der Richtung des Aequators und der Mittagscircul gestellt seyn, oder endlich, wenn man nebst dem Cometen zween Sterne durchgehen läßt, eine jede Lage haben. Man muß aber den Winkel genau wissen, unter welchem sich die Fäden durchschneiden. Man beobachtet sodann die Zeit, wenn sowohl der Comet als die Sterne durch jeden Faden gehen, und diese muß bis auf einzelne Secunden, ja bis auf Theile von Secunden richtig bestimmt werden, weil jede Secunde Zeit 15 Secunden eines Grades beträgt. Wenn der Comet sehr nahe beym Pol ist, so ist dieses Verfahren sehr unsicher, weil derselbe sehr langsam durch die Fäden geht. Die Hauptschwürigkeit aber ist, daß sich nicht immer Sterne so nahe beym Cometen befinden, daß dieselben kurz vor und nach dem Cometen durch die Fäden gehen. Bey dem

dem Cometen von 1769 traf es fürnemlich nur in der Nacht zwischen dem 3ten und 4ten Herbstmonat zu, wo er nahe bey dem hellen Stern in der Schulter des Orions anfieng in Orions Rücken einzutreten. Auch fand ich, daß in verschiedenen Nachrichten diese vortheilhafte Stellung erhoben wurde. Damals wurde er von mehreren sehr genau beobachtet, die sich vor und nachher mit einer blossen Schätzung genügen liessen. Man gebraucht gern Fernröhren, die sehr vergrößern, weil man damit genauer beobachten kann. Es haben aber solche Fernröhren ein sehr kleines Feld, und damit lassen sich nicht immer mehrere nahmhafte Sterne mit einemmal, oder gleich nach einander sehen. Es hat mir übrigens diese Methode niemals recht brauchbar geschienen. Fehlt man in Ansehung der Zeit um 1 Secunde, so beträgt der Fehler sogleich $\frac{1}{4}$ Minute eines Grades. So genau aber lassen sich immer Distanzen auch messen.

§. 30.

Endlich bedient man sich, wo man die Instrumente dazu hat, auch des Azimuth und der Höhe. Es setzt aber dieses eine genaue Bestimmung der Polhöhe und der Mittagslinie voraus, und überdis muß auch so wie bey den übrigen Beobachtungsarten die Zeit genau bestimmt seyn.

IV.

IV. Berichtigung der Beobachtungen des scheinbaren Orts der Cometen.

§. 31.

Was man nun auf eine der erstbeschriebenen Arten beobachtet hat, das muß sodann noch in verschiedenen Absichten theils geprüft, theils von mit unterlaufenden Fehlern gereinigt, theils auch auf die wahre Länge und Breite reducirt werden. Beyde erstere Stücke werden um so viel nothwendiger, je unzuverläßiger die Beobachtungen sind, demnach besonders, wo man sich mit einer blossen Schätzung nach dem Augenmaaße begnügte. In diesem Fall vorzüglich muß die Menge der Beobachtungen das, was an der Genauigkeit abgeht, ersetzen, weil das Mittel aus mehreren Beobachtungen, wo man wenigstens nicht vorsetzlich und immer auf einerley Art gefehlt hat, immer auch einen gewissen Grad von Zuverläßigkeit erhält. Nun folgen bey den Cometen die mehreren Beobachtungen, der Zeit nach, auf einander, und der Comet setzt inzwischen seinen Lauf fort. Dieses macht, daß das Mittel aus den mehreren Beobachtungen auf ganz besondere Art muß genommen werden. Das Mittel ist hier nicht ein einzener Punct, sondern die scheinbare Bahn des Cometen. Diese würde durch die beobachteten Stellen oder Puncte durchgezogen werden müssen,

sen, wenn die Lage dieser Puncte ganz genau bestimmt wäre. Liegen aber diese Puncte nicht in einer merklich einförmig fortgehenden krummen Linie, so muß diese zwischen den bemerkten Puncten so durchgezogen werden, daß sie so zu reden das Mittel halte. Es ist aber nicht genug, daß man nur die Bahn so schlechthin ziehe. Man soll auch genauer bestimmen können, in welchem Punct der Bahn der Comet zur Zeit jeder Beobachtung war. So z. E. kann es sich zutragen, daß einer oder mehrere der bemerkten Puncte wirklich in der Bahn des Cometen und indessen dennoch nicht in dem behörigen Ort der Bahn liegen. Man nehme indessen diese Puncte, so wie man sie bemerket hat, an. Man suche eines jeden Länge und Breite. Sodann sehe man die Zeiten der Beobachtungen als Abscissen, und diese Längen und Breiten als Ordinaten an, so sollen die Endpuncte dieser Ordinaten, sowohl für die Längen als für die Breiten, in zwoen sich ebenfalls einförmig krümmenden Linien liegen. Ist dieses nicht, so müßen diese zwo Linien ebenfalls so zwischen den Puncten durchgezogen werden, daß sie zwischen denselben das Mittel halten. Dadurch werden die Ordinaten so verbessert, daß sie den wahren näher kommen, und eben daher auch zuverläßiger sind. Indessen haben die äußersten immer einen geringern Grad von Zuverläßigkeit, weil man aus Ermangelung entfernterer Beobachtungen nicht so bestimmt sehen kann, wie die beyden

den krummen Linien auf beyden Seiten zu verlängern sind.

§. 32.

Diese Art zu verfahren habe ich nebst mehreren andern in dem ersten Theile der **Beyträge** zur **Mathematik** angegeben, und sowohl daselbst als bey andern Anlässen mit mehreren Beyspielen erläutert. Da ich den Comet im Herbstmonathe 1769 nur durch blosse Schätzungen beobachtete, und selbst die Zeit auch nur mittelst der Taschenuhr bestimmte, so wurde mir der Gebrauch dieser Methode ebenfalls nothwendig, um so mehr, da aus solchen nur während 14 Tagen, und in dieser Zeit nur achtmal angestellten Beobachtungen die ganze Laufbahn wenigstens so weit bestimmt werden sollte, als der Comet nach seiner Rückkehr von der Sonne sichtbar bleiben würde. Der Erfolg war, daß der Comet bis gegen das Ende des Novembers sich nun etwan zwey Tage verspätet hatte. Und bey genauerem Nachrechnen fand sich, daß von diesen zween Tagen wenigstens einer daher rührte, daß die Laufbahn des Cometen nicht parabolisch sondern elliptisch war.

§. 33.

Sind nun die Beobachtungen selbst schon genauer, so bleiben dennoch dabey einige Umstände mitzunehmen, und diese rühren 1) von der Bewegung des Cometen, 2) von der Stralenbrechung, 3) von der Abirrung der Licht-

 strahlen,

strahlen, 4) von der Parallaxe des Cometen her. Der Einfluß dieser Umstände ist nicht immer gleich groß. Die Bewegung kann zuweilen sehr langsam seyn, die Parallaxe ist auch selten merklich. Die Abirrung des Lichtes kann auch nur alsdann genau bestimmt werden, wenn die Bahn des Cometen ziemlich genau bekannt ist. Die Stralenbrechung richtet sich nach der Höhe des Cometen und der Sterne, mit welchen derselbe verglichen wird.

§. 34.

Man setze nun z. E. daß man den Ort eines Cometen durch Ausmessung seines Abstandes von zween Sternen bestimmt habe. Ist nun jeder Abstand von zween Beobachtern in gleichem Augenblicke gemessen worden, so kömmt die Bewegung des Cometen nicht in Betrachtung, und man hat nur der Stralenbrechung Rechnung zu tragen. Zu diesem Ende berechnet man für die Zeit der Beobachtung das Azimuth und die Höhe eines jeden der beyden Sterne. Zu der Höhe addirt man die Stralenbrechung, um die scheinbare Höhe und demnach den scheinbaren Ort beyder Sterne zu erhalten. Nun ist der Abstand des scheinbaren Ortes der Cometen von diesen beyden Puncten gegeben, und so kann das Azimuth und die scheinbare Höhe des Cometen daraus gefunden werden. Von der scheinbaren Höhe des Cometen zieht man die Stralenbrechung ab, um die wahre Höhe desselben zu erhalten, woraus sodann die Länge und Breite des Cometen berechnet werden kann.

§. 35.

Dieses Verfahren geht noch ganz gut an, wenn die beyden Distanzen zwar nach einander, aber unmittelbar nach einander gemessen worden. Sind aber zwischen beyden Ausmessungen mehrere Minuten Zeit verflossen, so kann sich auch inzwischen der Ort des Cometen, wegen seiner eigenen Bewegung, und der Einfluß der Stralenbrechung verändert haben. Indessen sind beyde Veränderungen gewöhnlich sehr klein. Man kann demnach anfangs davon abstrahiren, den Ort des Cometen bestimmen, und sodann die Verbesserung desselben nachholen. Es muß aber hiebey bekannt seyn, wie geschwinde und nach welcher Richtung der Comet sich bewegt, wiedrigenfalls muß der Abstand des Cometen von wenigstens vier Sternen gemessen werden. Ist aber die Richtung und Geschwindigkeit aus vorhergehenden oder nachfolgenden Beobachtungen bekannt, so bestimmt man, wie viel der Comet sich währender Zeit, da sein Abstand von zween Sternen gemessen worden, bewegt hat. Diese Bewegung schiebt man in entgegengesetzter Richtung auf den einen Stern, und so ist es eben so viel, als wenn der Comet sich inzwischen nicht bewegt hätte. Die zween Sterne seyen A, B, und da der Comet noch in C war, habe man seinen Abstand AC gemessen. Inzwischen Fig. 2.

 aber

aber sey der Comet aus C in c fortgerückt, und es sey der Abstand Bc gemessen worden. Soll dieses nun eben so viel seyn, als wenn der Comet in C geblieben wäre, so muß man setzen, der Stern B habe sich in paralleler Richtung in b rückwerts bewegt, und da wird man bC = Bc haben, demnach, weil die Lage von A, b und die Distanzen AC, bC gegeben sind, den Ort des Cometen C für die Zeit, wo man die Distanz AC gemessen, bestimmen können. Es ist hiebey gut, wenn die Sterne nur wenige Grade von dem Comet entfernt sind, weil ein größerer Theil der Sphäre sich nicht ohne merklichen Fehler als flach ansehen läßt. Man kann hiebey auch den Ort der Sterne A, B um so viel erhöhen, als die Stralenbrechung austrägt, und dann wird von dem Ort des Cometen C die Stralenbrechung abgezogen, um seinen wahren Ort zu erhalten.

§. 36.

Wenn man den Comet mit einem oder mehreren Sternen durch die Creuzfäden des Micrometers gehen läßt, so hat die Bewegung des Cometen dabey nichts zu sagen. Der Ort desselben wird immer für diejenige Zeit gefunden, da der Comet durch die Fäden gegangen, die Sterne mögen früher oder später durchgegangen seyn, so viel man will. Bey horizontal und vertical stehenden Fäden fällt auch der Einfluß der Stralenbrechung weg, und in so fern ist diese Methode die bequemste. Nur schade, daß sie wegen Bestimmung der Zeit so leicht um eine viertel oder halbe Minute, und mehr fehlen kann. (§. 29.)

V. Noch einige Beobachtungen der Cometen.

§. 37.

Wie man nun immer mit der Bestimmung des scheinbaren Orts eines Cometen zurechte kömmt, so bleibt noch übrig, daß man auch die Veränderung in seiner Gestalt, Licht, Farbe rc. beobachte. Dieses trägt zwar zur Bestimmung seiner Laufbahn weiter nichts bey, indessen kann es dennoch von einigem Gebrauche seyn. Man hatte ehemals in Vorschlag gebracht, aus der scheinbaren Klarheit und Größe der Cometen auf ihren Abstand zu schließen, und sie zu diesem Ende mit den Planeten zu vergleichen. Es ist aber nicht abzusehen, daß solche Schlüße im geringsten sollten zuverläßig seyn können. Jeder Comet hat etwas besonderes, und der Dunstkreis, den sie gewöhnlich um sich haben, macht, daß sie mit Planeten nicht wohl verglichen werden können, deren Dunstkreis, so fern sie einen haben, von ganz anderer Art ist. Ich vermuthe, daß die großen Veränderungen, die man in den Flecken von der Venus, dem Jupiter und besonders dem Mars wahrgenommen, nicht auf deren Oberfläche, sondern in ihrer Atmosphäre vorgegangen. Die Wolken in in unserer Erdluft, die sehr veränderlich sind, zuweilen ganze Welttheile bedecken, müssen den Bewohnern der Planeten als eben so veränderliche Flecken vorkommen. Man hat zuweilen solche Flecken auch auf den Cometen bemerkt, und man hat sich darüber noch weniger zu verwundern, weil, wenn sie zur Sonne nahen, in ihrem Dunstkreise große Veränderungen vorgehen.

§. 38.

Zuweilen läßt sich der Kern oder eigentliche Körper des Cometen sehr schwer oder gar nicht genau von dem Dunstkreise unterscheiden, und dieses trug sich auch mit dem Comet 1769 anfangs im September zu. Nach seiner Rückkehr von der Sonne war seine Atmosphäre sehr aufgeschwollen und durchsichtiger geworden, und damit konnte auch der Kern deutlicher und besser gesehen werden. Indessen hat man in der Nacht vom 3ten auf den 4ten Herbstmonat zu Königsberg den Diameter des Kerns, dafern es nicht ein Druckfehler ist, von 4′. 54″ beobachtet. Daraus würde folgen, daß derselbe beynahe sechsmal größer als der Erddiameter, oder halb so groß als der Diameter vom Jupiter gewesen. Dieses scheint sehr viel, und vermuthlich zu viel zu seyn. Herr **Meßier** meldet, daß der Comet den 25ten August beynahe so groß als der Jupiter ausgesehen. Da er nun damals neunmal näher bey der Erde war, als Ju-

Jupiter in seiner mittleren Entfernung, so muß sein Diameter auch wenigstens neunmal kleiner als des Jupiters seyn. Auch nach einer andern Beobachtung, die mir mitgetheilt worden, wurde die scheinbare Größe des Kerns in der Nacht vom 9ten auf den 10ten September durch ein Dollondsches Fernrohr von 8 Fuß beobachtet, und der scheinbaren Größe Jupiters gleichgeschätzt, ungeachtet damals der Comet fast doppelt näher bey der Erde war, als den 25ten August, da ihn Herr Meßier beobachtete. Der Comet müßte also dieser Schätzung nach siebenzehnmal kleiner seyn als Jupiter. In dem Tractätgen **von den Cometen**, 1769, wird er nur dem Monde an Größe gleichgeschätzt, welches aber wohl zu wenig ist.

§. 39.

Dem sey nun übrigens wie ihm wolle, so kann die genaue Beobachtung der scheinbaren Größe des Kerns eines Cometen immer dazu gebraucht werden, daß man daraus schließe, ob, und allenfalls auch in welcher Verhältniß, der Comet sich von Tag zu Tag der Erde nähert, oder sich von derselben entfernt. Der Abstand eines Cometen ist immer in umgekehrter Verhältniß seines scheinbaren Diameters. Wenn also ein Comet doppelt größer gesehen wird, als er anfangs erschien, so kann man auch sicher daraus schließen, daß er der Erde doppelt näher gekommen. Es ist nur zu bedauren, daß wegen

gen des gewöhnlich so kleinen Diameters, die Verhältniß nicht genau bestimmt werden kann. Man würde sonst im Stande seyn, aus zwoen Beobachtungen die Laufbahn des Cometen zu bestimmen, dagegen man nun drey gebrauchen muß. Indessen kann die genaue Bestimmung der wahren Größe des Kerns eines Cometen mit unter die Merkmale gerechnet werden, woran man künftig einen Cometen als einen bereits ehemals beobachteten, wiederum zu erkennen hat.

§. 40.

Der Dunstkreis der Cometen ist währender Zeit ihrer Erscheinung gemeiniglich sehr veränderlich, und die scheinbare Größe desselben hängt zum Theil auch von dem Zustande unserer Erdluft ab. Der Dunstkreis wird desto dünner und unsichtbarer, je weiter er von dem Kern des Cometen weg ist, und die äußersten Grenzen verlieren sich unmerklich. Man wird daher beym Mondscheine, bey der Dämmerung, in dunstiger und neblichter Luft, in der Größe des Dunstkreises immer einige Unterschiede finden. Auch durch Fernröhren von verschiedener Größe und Einrichtung wird man Unterschiede gewahr werden. Und eben so wird einem Auge, das gut in die Ferne sieht, der Dunstkreis kleiner vorkommen, als einem kurzsichtigen Auge, und zwar nicht blos deswegen, weil dieses auch jede Sterne größer sieht, sondern weil auch zerstreute Theilchen, die ein weitsichtiges Auge einzeln sehen müßte, und nicht einzeln sehen kann,

kann, bey dem kurzsichtigen ein zusammenfallendes Licht und damit einen weißen Fleck vorstellen.

§. 41.

Ich habe eben dieses in Ansehung des Schweifes anzumerken. Die scheinbare Länge desselben ändert sich nach allen diesen Umständen. Die von dem Comet 1769 wurde für einerley Zeit von verschiedenen Beobachtern sehr verschieden angegeben. Einige sahen ihn 40 Grade lang, da andere bey 30 Graden zurücke blieben. Was mich aber überzeugte, daß dieser sehr beträchtliche Unterschied von der Verschiedenheit der Augen herrühren könne, war, daß ich es an Beobachtern bemerkte, die mit mir zu gleichem Fenster heraussahen, und wo folglich alle übrige Umstände gleich waren. Man kann auch überhaupt daraus schließen, daß der Schweif der Cometen, das will sagen, die Reihen von Dünsten, die sie nach sich schleppen, oder in der Himmelsluft zurücke lassen, in der That noch viel länger ist, als er gesehen wird, so daß z. E. anstatt der ersterwähnten 30 bis 40 Grade etwan 80 oder 90 hätten genommen werden können, wenn der äußerste Theil des Schweifes ebenfalls hätte gesehen werden können. Es giebt aber auch Fälle, wo der Schweif eines Cometen, auch wenn er unendlich lang, und der ganzen Länge nach sichtbar wäre, dessen unerachtet nicht unter einem so grossen Winkel

kel gesehen werden kann. So z. E. ist der Unterschied der Tangenten von 80 und von 90 Graden unendlich, ungeachtet die Bögen selbst nur um 10 Grade verschieden sind. Nun läßt sich der Schweif eines Cometen, so fern er gerade ist, immer als einen Unterschied zwoer Tangenten ansehen.

§. 42.

Apianus, der von Anno 1531 bis 1539 in Zeit von 8 Jahren das Vergnügen hatte, fünf Cometen zu beobachten, wovon einer 1759 zum drittenmale wiedergekommen, und ein anderer 1790 zum zweytenmal erwartet wird, **Apianus**, sage ich, hatte bey so häufigen Anläßen ebenfalls das Vergnügen wahrzunehmen, und sich zu versichern, daß der Schweif der Cometen immer von der Sonne weggekehrt ist. Diese Beobachtung ist auch bey jeden folgenden Cometen, bey welchen man die Richtung des Schweifes wahrnehmen konnte, überhaupt bestätigt worden. Nur fand man, daß der Schweif von der geraden Linie immer etwas abgekehrt stand, sich zuweilen merklich krümmete, und sich etwan auch in Aeste vertheilte und ausbreitete, wie es bey dem von 1744 gegen das Ende seiner Erscheinung geschahe.

§. 43.

Diese Krümmung, Vertheilung und Ablenkung von der geraden Linie konnte den Wahn, als wenn nur die Sonnenstrahlen den Schweif bildeten, genugsam wiederlegen. Man verließ demnach solche dioptrische Erklärungen, und wandte sich zu den mechanischen, wo es besser von statten gieng. Der Erfolg war, daß die Dünste des Cometen von der Sonne weg aufwärts steigen, daß sie aber durch des Cometen eigene Bewegung eine desto schiefere Richtung nehmen müßen, je schneller die Bewegung des Cometen ist. Auf eine ähnliche Art steigt der Rauch eines ausgelöschten Lichtes gerade in die Höhe, wenn der Leuchter stille steht. Bewegt man ihn aber seitwärts, so steigt der Rauch schief auf. Da hiebey die Lehre von Zusammensetzung der Kräfte vorkömmt, so hat sich bereits **Newton** dieses Umstandes bedient, die Geschwindigkeit zu berechnen, mit welcher die Dünste des Cometen von demselben weg aufwärts steigen. Die Sonne sey in S, der Comet in k, die Richtungslinie seines Laufes kK. Fig. 3. In k würden die Dünste nach der Linie Skc aufwerts steigen, und nach einiger Zeit in c kommen. Bewegt sich aber während dieser Zeit der Comet aus k bis in K, so steigen die Dünste nicht längs der Linie kc, sondern längs der Diagonale kC aufwärts. Es wird demnach, wenn der Comet in K ist, die Lage des Schweifes KC seyn, und daher von der geraden Linie SKs, um den Winkel sKC abweichen. Ist demnach dieser Winkel gegeben, so zieht man Skc mit KC parallel, und damit findet man, daß die Geschwindigkeit des Cometen sich zu der Ge-

Geschwindigkeit der Dünste wie Kk zu kc oder zu kC verhalte, je nachdem man die einfache oder die zusammengesetzte Geschwindigkeit der Dünste berechnen will.

§. 44.

Da die Linien KC, kc parallel sind, so ist auch der Winkel sKC dem Winkel KSk gleich, und daraus folgt, daß die Ablenkung jeder Theilchen des Schweifes mit dem Winkel KSk in gleicher Verhältniß zunehmen müsse. Dieses giebt auch dem Schweif eine Krümmung, deren hohe Seite gegen der Sonne zugekehrt ist, und welche desto beträchtlicher wird, je geschwinder der Winkel KSk auf mehrere Grade anwächst. Dieses geschieht nun in der Sonnennähe am geschwindesten, und auch dann erst wird die Ablenkung und Krümmung am merklichsten. Indessen da beydes allemal nur in der Fläche der Bahn des Cometen geschieht, so kann auch nicht viel davon gesehen werden, so oft die Neigung der Bahn gegen die Fläche der Ecclíptic geringe, oder die Erde nahe bey der Knotenlinie des Cometen ist, oder auch beydes zugleich zutrift. Gewöhnlich aber haben die Dünste Zeit zu verfliegen und unsichtbar zu werden, ehe der Winkel KSk groß genug wird, eine merkliche Ablenkung des Schweifes sichtbar zu machen. Der Comet 1769 senkte sich während der Zeit seiner ersten Sichtbarkeit im August und September ziemlich langsam und gerade gegen die Sonne, die

Die Erde selbst war gegen den 17ten September in seiner Knotenlinie, die Bahn des Cometen unterwerts weggeneigt, und so trafen alle Umstände zusammen, welche die Ablenkung des Schweifes sowohl an sich, als sofern sie hätte sichtbar seyn können, sehr geringe machten. Der Schweif schien in der Nacht vom 9ten auf den 10ten September bey einer Länge von 40 und mehr Graden eine Krümmung von etwan zween Graden zu haben. Diese Krümmung aber, anstatt ihre Hölung gegen die Eccliptic zu kehren, kehrte sie ganz im Gegentheil von der Eccliptic weg, und so mußte man den Schluß machen, daß diese Krümmung nur daher rührte, weil einige Theile des Schweifes dem Rande nach von ungleicher Sichtbarkeit waren. Auch sahe man einige Tage vorher, daß auf der einen Seite des Schweifes ein längerer Stral vom Cometen ausgieng, und der Schweif auf der andern Seite viel kürzer war. Aehnliche Erscheinungen zeigten sich auch bey dem Cometen von 1744.

§. 45.

Ich führe dieses an, weil daraus erhellet, daß vorerwähnte Aufgabe von Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher die Dünste von dem Comet aufsteigen, mit Behutsamkeit angewandt werden muß, besonders wo die scheinbare Ablenkung nicht sehr merklich ist. Es kömmt aber dabey noch ein Umstand in Betrachtung. Man

Man müßte nemlich genauer wissen, als man es noch dermalen weiß, aus welchem Grunde die Dünste des Cometen von der Sonne weg aufwerts steigen oder fahren. Nach dem Newtonschen System scheint jede sich in dem Wirkungskreise der Sonne befindliche Materie gegen die Sonne schwer zu seyn, und, wenn sie sich selbst überlassen ist, gegen die Sonne zu fallen. Hier geschieht das Gegentheil, die Dünste des Cometen steigen aufwerts. Man kann allerdings fragen, ob sie der Art nach leichter sind, als die Himmelsluft oder die Sonnenatmosphäre, und, wenn sie specifice leichter sind, so kann man wiederum fragen, ob nicht auch einiger Widerstand, den sie in ihrer Bewegung auszustehen haben, mit in Betrachtung kommen müsse? Vielleicht mögen künftige Erfahrungen hierüber ein mehreres Licht geben. Inzwischen hat ein ungenannter Verfasser bey Anlaß des Cometen von 1769 über die Entstehungsart der Dunstkreise und Schweife der Cometen einige, meines Wissens, neue Gedanken geäussert, aus denen er schließt, daß nur die Cometen Schweife haben können, die sich nicht um ihre Axe drehen. Das Werckchen ist nur von wenigen Bogen, und hat die Aufschrift: **Von den Cometen. 1769.** Es ist mit vielem Bedacht geschrieben. Indessen sollte ich fast zweifeln, ob seine Theorie von den Cometenschweifen so schlechthin Beyfall finden werde, ungeachtet ich übrigens ganz gern einräume, daß solche Cometen, die immer einerley

ley Seite gegen die Sonne kehren (wie z. E. der Mond gegen die Erde), oder auch solche, die sich gar nicht um ihre Axe drehen, auf der gegen die Sonne zugekehrten Seite ein starkes und anhaltendes Aufschwellen der Atmosphäre von der Hitze der Sonnenstralen ausstehen, und die aufgeschwollene Atmosphäre seitwerts ausweichen müsse. Es scheint aber, daß dieses nicht so mit einemmal, sondern nach und nach geschehe, und dieses vermindert die Geschwindigkeit, die der Verfasser zur Entstehung der Schweife sehr groß annehmen muß, so sehr, daß ich die Möglichkeit nicht einsehe, daß die seitwerts abfließende Dünste sich bis weit ausserhalb des Cometen bewegen, und einen Schweif bilden können.

§. 46.

In dem Risse von der Laufbahn des Cometen, die ich durch Construction herausbrachte, habe ich für den 14ten August, den 1ten und 10ten September die wahre Länge des Schweifes aus der beobachteten Länge von 6, 30 und 40 Graden bestimmt und eingezeichnet. Sie war von 14, 38 und 25 solcher Theile, deren der Abstand der Erde von der Sonne 100 hat. Demnach hatte sie anfangs zugenommen, und nachgehends nahm sie wieder ab, ungeachtet der Comet noch immer der Sonne näher rückte, und den 10ten November noch nicht viel innerhalb der Erdbahn war. Man hat eben dieses auch bey dem Cometen von 1744 bemerkt. Es

 mag

mag übrigens diese Verkürzung gar wohl von dem beschleunigten Laufe herrühren, wodurch die Theilchen mehr zerstreut werden, oder auch weniger Zeit haben, sich dichter aufzuhäufen. Es kann auch seyn, daß die größere Nähe der Erde mit beytrug, von den äußersten Theilen des Schweifes mehrere unsichtbar zu machen, weil die Dünste nicht einzeln, sondern nur durch ihr zusammenfallendes Licht sichtbar sind, und weil sie bey größerer Entfernung dichter zu seyn scheinen.

§. 47.

Ich schließe aus einem ähnlichen Grunde, daß man auch durch Fernröhren viel weniger von den äußersten Theilen des Dunstkreises und des Schweifes sehen kann, als mit bloßen Augen. Denn außer dem, daß die Fernröhren gewöhnlich, und zumal wenn sie stark vergrössern, das Licht sehr schwächen, so thun sie überhaupt die Wirkung, als wenn man das Obiect eben so viel mal näher, als das Fernrohr vergrössert, mit bloßen Augen und eben der Deutlichkeit ansehen würde. Wenn es demnach um die Bestimmung der eigentlichen Lage, Krümmung und Länge des Schweifes, und der Größe des Dunstkreises zu thun ist, so sind dieses Beobachtungen, die mit bloßem Auge gemacht werden müssen. Ein kurzsichtiges, dabey aber empfindliches Auge sieht hiebey am meisten, das will sagen, es kann nicht nur den Dunstkreis des

des Cometen größer, sondern auch den Schweif auf mehrere Grade hinaus länger sehen. (§. 41.)

VI. Die scheinbare Bahn der Cometen.

§. 48.

Man kann sich aus den 6 Doppelmayerschen Charten, worauf nebst den Fixsternen noch mehrere scheinbare Cometenbahnen vorgestellt sind, genugsam überzeugen, daß man für dieselben keinen Circulum Sphæræ maximum annehmen kann. Denn, wenn dieses wäre, so müßten alle auf bemeldten 6 Charten gezeichneten Cometenbahnen nothwendig gerade Linien seyn, weil die Projectionsart dieser Charten es mit sich bringt, daß alle größten Circul der Sphäre darauf durch gerade Linien vorgestellt werden müssen. Nun hängt zwar Doppelmayer auf diesen Charten die beobachteten Stellen eines jeden Cometen durch gerade Linien zusammen, und eben daher scheinen die Bahnen hin und wieder eckigt zu seyn, anstatt daß sie eine einförmige Krümmung haben sollten. Bey einigen sind diese Ecken so beschaffen, daß man klar sieht, es müsse entweder bey der Beobachtung oder beym Einzeichnen in die Charte nicht aller Fleiß angewandt worden seyn, und letzteres ist um desto möglicher, weil selbst die Fixsterne nicht immer genau eingezeichnet worden. Indessen sieht man leicht, daß Doppelmayer die beobachteachteten Stellen der Cometen eigentlich nur deswegen mit Linien zusammenhängte, damit man desto leichter sehen könne, daß sie zu einem und eben dem Cometen gehören. Und dieses ist hinreichend genug, wenn man sich von dem scheinbaren Laufe desselben nur überhaupt einen Begriff machen will.

§. 49.

Indessen sind die Cometenbahnen in diesen Charten nur so weit gezeichnet, als sie waren beobachtet worden, demnach nicht immer so weit, als sie allenfalls hätten beobachtet werden können, wenn nicht Mondschein, trübes Wetter, Dämmerung, allzusüdliche Breite rc. Hindernisse gewesen wären. Aus gleichen Ursachen sind die Beobachtungen auch nicht immer von Tag zu Tag angezeichnet. Man muß sie demnach interpoliren, wenn man sich von der veränderlichen Geschwindigkeit einen Begriff machen will. Bey denen Bahnen, die am vollständigsten gezeichnet sind, bemerkt man überhaupt, daß, wenn sie auch eine ziemliche Strecke merklich gerade sind, sie sich dennoch gegen das eine Ende mehr oder minder krümmen, und daß eben daselbst auch die Bewegung sehr geringe ist. Dieses trift entweder auf den Anfang oder auf das Ende der Erscheinung, wo der Comet sich sowohl in seiner Bahn, als auch dem Anschein nach langsam bewegt, und die sogenannte jährliche Parallaxe geringe, oder der Abstand des

Cometen von der Erde sehr groß ist. Zuweilen wird auch die Krümmung merklicher, wenn der Comet bey seiner Sonnennähe ist.

§. 50.

Diese Charten sind, seitdem sie herausgekommen, schon mehrmalen dadurch unrichtig gebraucht worden, daß, wenn man einen neu erschienenen Comet z. E. den von 1744 und auch den von 1769 seiner scheinbaren Bewegung nach darin gezeichnet oder wenigstens die Stellen bemerkt hatte, man sogleich sahe, ob nicht bey eben den Stellen, eine von **Doppelmayer** gezeichnete Bahn ehemaliger Cometen durchgieng. Daraus nun wollte man den Schluß ziehen, daß es einerley Cometen seyen. Dieser Schluß kann aber selten oder niemals gemacht werden. Ein Comet nimmt zwar bey jeder Zurückkunft einerley Weg um die Sonne, die Erde ist aber nicht immer in einerley Ort ihrer Bahn. Dieses geschieht nur, wenn der Comet immer in gleichem Monat, und, wenn man es noch genauer nehmen will, an gleichem Tage desselben durch seine Sonnennähe geht. Und dieses ist ein sehr seltener Fall. In allen andern Fällen wird der Comet von der Erde aus bey andern Sternen gesehen, weil die Erde gegen den Cometen eine andere Lage hat. Es ist demnach nicht genug, daß zween Cometen durch einerley Sternbilder zu gehen scheinen. Sobald es zu verschiedener Jahreszeit geschieht, so kann man schon daraus den Schluß machen, daß es nicht einerley Cometen seyn können. Wenn es aber auch zu einerley Jahreszeit geschieht, so läßt sich dennoch der Schluß, daß es einerley Cometen sind, nicht unbedingt machen. Das eigentliche Mittel ist immer, daß man die wahre Bahn eines jeden besonders bestimme, und da sehe, ob es einerley Bahn ist. Ueberdies können Cometen, deren wahre Bahnen verschieden sind, niemals durchaus und genau einerley scheinbare Bahnen haben.

§. 51.

Da die Bestimmung der wahren Bahn der Cometen nicht jedermanns Thun ist, zumal wenn sie nach den gewöhnlichen Methoden durch eine lange und ermüdende Reihe von Versuchen gleichsam mehr errathen, als geradehin bestimmt werden soll, so halten sich viele an die scheinbare Bahn, welche sie als einen grösten Circul der Sphäre ansehen, und des ungleich geschwinden Laufes, so gut es sich will thun lassen, Rechnung tragen. Einige, die weiter gehen, sehen die wahre Bahn der Cometen, wenigstens einzelne Stücke derselben, als eine gerade mit gleicher Geschwindigkeit durchlaufene Linie an. **Kepler** machte bereits damit den Anfang, und es läßt sich zeigen, daß ihm nur die gehörigen Anläße fehlten, seine bey den Planeten so glücklich gefundene Gesetze auch bey den Cometen zu finden. Ein solcher Anlaß war **Dörfeln** vorbehalten. Dieser wandte die Hypothese der

geradlinichten Bewegung auf den Cometen von 1680 an, welchen er sowohl vor als nach seinem Durchgang durch seine Sonnennähe beobachtet hatte. Die Bahn dieses Cometen war bis nahe zur Sonne sehr gerade, und so fehlte nur noch der Umstand, daß die Geschwindigkeit ungleich war. **Dörfel** bestimmte die angenommene geradlinichte Bahn für die Zeit, da der Comet anfangs des Morgens schien, und sodann für die Zeit, da er des Abends gesehen wurde, jede besonders, und fand ihre Lage so beschaffen, daß er klar sehen konnte, der Comet müße sich um die Sonne herum bewegt haben. Dieses zeigte ihm, daß er die parabolische Bahn, die **Hevelius** kaum als eine Vermuthung in Vorschlag brachte, ganz sicher annehmen durfte. **Dörfel** war übrigens methodisch genug, um sich voraus zu versichern, daß es nicht zween, sondern ein und eben derselbe Comet war. Ich schließe, daß **Kepler** einen solchen Anlaß gerade eben so würde genutzt haben, wenn er ihm vorgekommen wäre. Daß **Dörfel** ihn genutzt, das giebt von seinem Genie einen eben nicht geringen Begrif.

§. 52.

Die Hypothese der geradlinichten Bewegung wird von **Newton**, **Gregorius** und andern vorgeschlagen, um zur Bestimmung der wahren Bahn als Vorbereitung zu dienen. Sie hat mit der Voraussetzung, daß die scheinbare Bahn ein gröster Circul der Sphäre sey, viel gemeinsames. Man setze, ein Comet

 bewege

bewege sich in der That in gerader Linie durch den Weltraum. Wäre nun inzwischen die Erde unbeweglich in gleichem Punct ihrer Bahn, so würde der Comet von der Erde aus gesehen, einen grösten Circul, ganz genau zu durchlaufen scheinen, die Geschwindigkeit des Cometen möchte nun gleich oder ungleich seyn.

§. 53.

Man setze nun aber, daß sowohl der Comet als die Erde sich in geraden Linien bewegen. Geschieht beydes mit unveränderter oder wenigstens proportioneller Geschwindigkeit, so wird der Comet, von der Erde aus gesehen, ebenfalls einen grösten Circul zu durchlaufen scheinen. Es folgt aus der Lehre von der Zusammensetzung der Bewegung, daß man in diesem Fall die Erde als ruhend ansehen, und ihre Bewegung auf den Comet schieben kann, so daß derselbe in der Diagonale des Parallelogramms laufe, welches durch die Richtung und Geschwindigkeit seiner und der Erde ihrer Bewegung gebildet wird.

§. 54.

Dieser Fall kömmt nun zwar nicht vor, so fern aber nur von einer Zeit von wenigen Tagen die Rede ist, kann man ohne sehr merklichen Fehler denselben annehmen, zumal wenn der Comet viel näher bey der Erde als bey der Sonne ist. Denn alsdenn ist das von ihm in einigen Tagen durchlaufene Stück seiner Bahn von

von sehr geringer Krümmung, und auch seine Geschwindigkeit nicht merklich veränderlich, und eben dieses hat auch in Absicht auf die Erde statt. Nun kann der geringe Abstand eines Cometen von der Erde schon daraus geschlossen werden, wenn er jeden Tag mehrere Grade zu durchlaufen scheint. Demnach weicht auch in allen solchen Fällen seine scheinbare Bahn unmerklich wenig von einem grösten Circul der Sphäre ab. Der Comet von 1472 hat in einem Tage 40 Grade durchlaufen, und so muß dieser Lauf so viel als gar nichts von einem Bogen eines grösten Circuls verschieden gewesen seyn. Der Comet von 1769 lief im September anfangs 2, und endlich, ehe er in der Morgendämmerung unsichtbar wurde, 5 Grade. Auch zeigt es sich, daß er vom Stier an bis zur Wasserschlange sehr gerade fortgelaufen. Ist hingegen die Bewegung viel langsamer, so weicht sie auch gewöhnlich von einem grösten Circul viel merklicher ab. Die Frage, ob man nicht aus dieser Abweichung selbst einige Kennzeichen von der wahren Bahn des Cometen herleiten könne, veranlaßte mich übrigens ganz neulich, dahin einschlagende Betrachtungen anzustellen. Den Erfolg dieser Betrachtungen las ich der Königl. Akademie der Wissenschaften vor, und werde demnach hier nur einige Sätze anführen. Man zeichne die beobachtete scheinbare Bahn des Cometen auf der Himmelskugel oder auf einer Himmelscharte. Letztere sind hiezu am be-

bequemsten, wenn sie so entworfen sind, daß alle grösten Circul der Sphäre darauf durch gerade Linien vorgestellt werden. Auf der gezeichneten scheinbaren Bahn wähle man zween beliebige Puncte, und durch diese ziehe man einen grösten Circul; so wird die Bahn zwischen diesen Puncten von dem gezogenen grösten Circul abweichen, und zwar entweder gegen den Ort der Sonne, oder gegen die von dem Ort der Sonne weggekehrte Seite. Geschieht das erste, so ist der Comet von der Sonne weiter entfernt, als die Erde. Geschieht aber das letztere, so ist der Comet näher bey der Sonne, als die Erde. Daraus folgt nun, daß, wo der Comet eben so weit als die Erde von der Sonne entfernt ist, seine scheinbare Bahn daselbst einen Wendungspunct haben müße. Es hat demnach die scheinbare Bahn eines jeden Cometen, der näher als die Erde zur Sonne kömmt, schon aus diesem Grunde nothwendig zween solcher Wendungspuncte. Sie kann aber mehrere haben. Und dieses geschieht, so oft ihre Krümmung sich gegen den Ort der Ecliptic richtet, wo die Sonne zu gleicher Zeit ist.

§. 55.

Wir können nun noch eine andere Voraussetzung vornehmen. Die wahre Bahn der Cometen sey, wie sie es auch wirklich ist, ein Kegelschnitt. Wäre nun die Erde ohne eigene Bewegung, so würde die scheinbare Bahn auf den Doppelmayerschen Charten immer auch ein Kegelschnitt seyn, und eben so auch auf solchen Charten, die orthographisch entworfen sind. Dieses folgt aus dem allgemeinen Satz, daß jede perspectivische Entwerfung eines Kegelschnittes ebenfalls ein Kegelschnitt ist.

§. 56.

Hinwiederum, wenn sich nur die Erde in ihrer Bahn bewegte, der Comet aber ohne eigene Bewegung wäre, so würde er sich dennoch zu bewegen scheinen, und seine scheinbare Bahn würde auf erstbemeldete Art entworfen, ebenfalls ein Kegelschnitt seyn.

§. 57.

Diese zween Sätze sind sehr einfach. Setzt man sie aber zusammen, so daß man annimmt, die Erde und der Comet bewegen sich zugleich in Kegelschnitten, so erhält die scheinbare Bahn des Cometen eine sehr verwickelte Gestalt. Sie zieht sich während einer ganzen Periode nur einmal ganz um den Himmel herum, und dieses geschieht, wenn der Comet durch seine Sonnennähe läuft. Rückt er aber gegen seine Sonnenferne hinaus, so windet sich die scheinbare Bahn in Form einer immer kleiner werdenden mehrentheils ovalen Spirallinie, welche wiederum anfängt größer zu werden, sobald der Comet seine Sonnenferne durchlaufen. Dieses würde auch der Augenschein lehren, wenn wir die Cometen bis zu ihrer Sonnenferne hinaus sehen könnten. Man kann es sich aber dadurch, daß

daß die Cometenbahnen sehr ablange Ellipsen sind, leicht vorstellen. Es erhellet aber zugleich daraus, daß man mit der Voraussetzung, als wäre die scheinbare Bahn ein gröster Circul der Sphäre, nicht weit reicht.

§. 58.

Noch ist anzumerken, daß die scheinbare Bahn, im Grunde betrachtet, eine Projection ist, und die Erde dabey als ruhend angesehen wird. Man kann aber, wenn es nur um Projectionen zu thun ist, den Augenpunct und die Lage der Tafel nach Belieben annehmen, und dadurch einige Vortheile erhalten. So z. E. von der Sonne aus gesehen, scheint sowohl die Erde als der Comet eine gerade Linie oder einen grösten Circul der Sphäre zu durchlaufen. Man kann ebenfalls das Auge in die Fläche des Triangels setzen, den die Sonne, die Erde und der Comet zu einer fürgegebenen Zeit bilden. Diese Fläche wird in der Projection eine gerade Linie seyn, und zugleich wird diese Linie die Lage des Radius vector vorstellen, ein Vortheil, den man bey andern Projectionsarten nicht hat, und dessen wir uns im folgenden sehr gut werden bedienen können.

VII.

VII. Lehrsätze von der parabolischen Laufbahn der Cometen.

§. 59.

Ueber diese Materie werde ich hier nur das anführen, was im folgenden vorausgesetzt werden wird. Und um es noch kürzer zu machen, werde ich die Beweise meistens weglassen, und die Leser auf ein Tractätgen verweisen, welches ich bereits 1761 unter dem Titel: Insigniores Orbitae Cometarum proprietates herausgegeben. Was ich daraus hier anzuführen habe, wird immer auch zeigen, daß ich es nicht für die lange Weile geschrieben.

§. 60.

Da es hier um die Bestimmung wirklicher Laufbahnen zu thun ist, so ist das erste, daß wir uns um bekannte Maaße umsehen. Ich werde daher im folgenden immer den Halbmesser der Erdbahn (Radius orbis magni) oder die mittlere Distanz der Erde von der Sonne durch 1 ausdrücken, und damit auch jede andere Distanzen in Ganzen und Decimaltheilen dieser Einheit bestimmen. Auf diese Art ist demnach für das Maaß der Distanzen gesorgt.

§. 61.

Das Maaß der Zeit soll so genommen werden, daß jeder Zeitraum in Tagen und deren Decimaltheilen ausgedrückt werde, die man immer

immer leicht in Stunden, Minuten, Secunden ꝛc. wird verwandlen können. Auch werden gleiche Tage, oder Tage nach mittlerer Zeit gerechnet, verstanden.

§. 62.

Da nun in dem ganzen Sonnensystem die Umlaufszeiten zu denen Distanzen ein bestimmtes Verhältniß haben, welches in absoluten Zahlen auszudrücken ist, so habe ich in den Orbit. Comet. hiezu die zween Buchstaben m, n gebraucht, und daselbst in der zweyten Auflösung des 12ten Problems diese Werthe so bestimmt, daß

$$n = 116,2648 = \frac{1}{m}$$

demnach

$$\frac{1}{n} = m = 0,008601059$$

oder, wie wir es im folgenden brauchen werden,

$$12\,m = 0,1032127$$

ist. Diese Zahlen dienen überhaupt für jede Planeten und Cometen ohne Unterschied. Sie gründen sich auf das bekannte Keplersche und von Newton vollständiger gemachte Gesetz der Verhältniß der Zeiten zu den Flächenräumen und mittleren Distanzen.

§. 63.

Fig. 4. Es sey nun F der Mittelpunct der Sonne, und daher zugleich der gemeinsame Brennpunct aller Laufbahnen, AMN eine parabolische Laufbahn; M, N seyn zwey Oerter des Cometen. Man ziehe FM, FN, MN, und setze

$$FM = a$$
$$FN = b$$
$$MN = k$$

Wird nun die Zeit, in welcher der Bogen MN durchlaufen wird, $= T$ gesetzt, so hat man die Gleichung

$$12\,m\,T = (a+b+k)^{3:2} - (a+b-k)^{3:2}$$

oder

$$T = \frac{\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{3:2}}{m\,3\sqrt{2}}$$

§. 64.

Diese Formel giebt in bemeldten Orbit. Comet. die dritte Auflösung des 15ten Problems. Sie ist von der Focaldistanz AF unabhängig, und allen möglichen parabolischen Laufbahnen ohne Unterschied angemessen. Sie setzt auch nicht einmal das voraus, daß man jede der Distanzen FM, FN besonders wisse. Es ist genug, wenn man ihre Summe und die Länge der Chorde MN weiß. Wer die Mühe kennt, die man auf Berechnung der Cometenbahnen bisher verwendet hat, wird gar leicht einsehen, daß es noch an einem Satze von solcher Geschmeidigkeit fehlte, und daß ich mir allenfalls etwas darauf zu gute halten könne, ihn gefunden, und selbst auch auf die elliptische und hyperbolische Laufbahnen ausgedehnt zu haben.

§. 65.

Man setze ferner den Winkel

$$MFN = 2c$$

so findet man die Gleichung (Orbit. Comet. §. 79.)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} . (a + b + \sqrt{ab . cos. c}) . \sqrt{(a + b - \sqrt{2ab . cos. c})}$$

oder

$$12 m T = 2 (a + b + \sqrt{ab . cos. c}) \sqrt{(2 (a + b - 2\sqrt{ab . cos. c}))}$$

Der Ausdruck $\sqrt{ab}$, oder die mittlere Proportionale zwischen FM und FN findet sich auch, wenn man mitten durch den Winkel MFN eine gerade Linie bis an die an M oder N gezogene Tangente zieht (Orbit. Comet. §. 8.) Uebrigens muß man bey dieser Formel die beyden Distanzen FM, FN jede besonders wissen, da hingegen in dem vorhergehenden Lehrsatz ihre Summe genug war.

§. 66.

Es ist ferner die Focaldistanz oder die Distanz der Sonnennähe

$$AF = f = ab . sin. c^2 : (a + b - 2\sqrt{ab . cos. c})$$

oder, wenn man anstatt des halben Winkels c die Chorde k gebraucht,

$$f = AF = (k^2 - (a - b)^2) . [a + b + \sqrt{((a + b)^2 - k^2)}] : 4k^2$$

Man sehe Orbit. Comet. §. 28. 31.

§. 67.

§. 67.

Ferner ist

$$cos. \tfrac{1}{2} MFA = \sqrt{\left(\frac{AF}{FM}\right)}$$

oder auch

$$cos. \tfrac{1}{2} NFA = \sqrt{\left(\frac{AF}{FN}\right)}$$

Dieses folgt aus §. 4. und §. 1. Orbit. Comet.

§. 68.

Nennt man ferner die Zeit, in welcher der Bogen MA durchlaufen wird, = T′, so findet man

$$T' = \left(\frac{FM + 2 . AF}{3 m}\right) . \sqrt{\left(\frac{FM - AF}{2}\right)}$$

Diese Formel ist eine blosse Anwendung erstangeführter Sätze. (§. 65. 67.)

§. 69.

Man kann schon aus der Ordnung, in welcher diese Sätze hier auf einander folgen, ohne Mühe sehen, daß ich im folgenden bey Bestimmung der Bahn eines Cometen den Anfang mit der Bestimmung eines Triangels machen werde, dergleichen FMN ist, und daß sodann erst daraus das übrige werde hergeleitet werden. Das wird auch wirklich so geschehen. Ich sehe auch nicht, daß man unmittelbarer verfahren könne. Der Comet wird von der Erde aus, sowohl in M als in N gesehen. Die Sonne sieht man beyde male in F, und damit sind die Distanzen FM, FN so gut als sichtbar, und ihre scheinbare Größe kann von der Erde aus in Graden bestimmt werden, weil sie der scheinbaren Entfernung des Cometen von der Sonne gleich ist. Sodann wird die Zeit, in welcher MN durchlaufen wird, unmittelbar durch den Triangel MFN bestimmt, und eben daraus kann auch AF, AFM, und die Zeit, in welcher AM durchlaufen wird, demnach die Zeit der Sonnennähe des Cometen bestimmt werden, wie dieses aus erstangeführten Formeln erhellet. Alle diese Stücke mußten nach den bisher gebräuchlichen Methoden, blos um FM, FN, MN bestimmen zu können, mit in die Rechnung gezogen werden, und da sie nicht bekannt waren, so mußte man so lange versuchen, bis alles zusammenstimmte. Eben dieses machte aber, daß ich auf kürzere Methoden dachte. Diese habe ich nun in den Orbitis Cometarum bereits vorgetragen, indessen aber ohne Beyspiel gelassen, weil ich immer dachte, es werde künftig an näheren Anläßen nicht fehlen, sie anzuwenden. Der Comet von 1769 wird nun hier zum Beyspiel dienen können, da ich dessen Bahn nicht blos in Form eines Beyspiels, sondern um sie in Zeiten kennen zu lernen, bestimmt habe. Die Umstände dabey waren überdis noch so beschaffen, daß die Bestimmung der Bahn sehr leicht unzuverläßig werden konnte. Verschiedene fehlgeschlagene und nachgehends verbesserte Berechnungen waren ein Beweis hievon. Es bleiben nun aber noch einige Sätze zurücke, die ich ebenfalls noch anführen werde.

§. 70.

Der erste betrift die Frage, ein jedes parabolisches Segment in einen Triangel von gleichem Inhalte zu verwandeln. Die Parabel sey AMN, das fürgegebene Segment MQNRM. Fig. 5. Mit der Chorde MN ziehe man die Tangente TQ parallel, man theile RQ in 3 gleiche Theile; und zween von diesen Theilen mache man die Höhe des Rectangels MmqnN gleich, so ist dieses Rectangel von gleicher Größe mit dem Segment MQNM. Der Beweis dieses Satzes findet sich im zweiten Theil meiner **Beyträge zur Mathematik**. Nun kann das Rectangel ohne Mühe auf unzählige Arten in gleichgrosse Triangel verwandelt werden. Ich werde daher nur denjenigen Triangel auswählen, den ich im folgenden gebrauche. Dieser soll mit MN gleiche Basis haben. Demnach muß seine Höhe doppelt größer, als die von dem erstgezeichneten Rectangel seyn. Man mache also $Rp = \frac{4}{3} RQ$, und ziehe durch p die Linie pS mit MN parallel, so wird die Spitze des verlangten Triangels auf der Linie pS liegen müßen. So aber, wie ich den Triangel gebrauchen werde, muß eben diese Spitze auch auf der aus den Brennpunct F durch N (oder auch durch M) gezogenen geraden Linie

Linie FNS liegen, demnach in S, als dem gemeinsamen Durchschnittspunct der beyden Linien pS, FS. Der Triangel ist demnach MSN.

§. 71.

Verlängert man nun die Tangente TQ bis in t, so ist auch

$$Nt = \tfrac{3}{4} NS$$

§. 72.

Hieraus folgt nun hinwiederum, daß, wenn man auf SF jeden beliebigen Punct S außerhalb N annimmt, und

$$Nt = \tfrac{3}{4} NS$$

macht, man aus t eine Tangente tQT, und mit derselben die Chorde NM parallel ziehen könne, und sodann einen dem Segment MQNM gleichen Triangel MSN haben werde. Hievon läßt sich nun folgende Anwendung machen.

§. 73.

Fig. 6. Aus dem Brennpunct F der Parabel AMQN ziehe man eine beliebige Linie FQq, und auf derselben nehme man außer der Parabel einen Punct q an. Aus diesem ziehe man beyderseits die Tangenten qS, qT, und mit denselben parallel die Chorden QM, QN. Endlich ziehe man FM, FN, MN, so sage ich, daß sich der Inhalt des Sectors FMSQF zum Inhalt des Sectors FGTNF wie MR zu RN verhalte.

§. 74.

§. 74.

Um dieses zu beweisen, so nehme man

$$Qr = \tfrac{3}{4} Qq$$

und ziehe Mr, Nr durch gerade Linien zusammen. Da nun vermöge des vorhin (§. 72.) erwiesenen die Segmente MSQM, NTQN den Triangeln MrQM, NrQN gleich sind; so sind auch die ganzen Sectoren FMSQF, FQTNF den ganzen Triangeln FMrF, FNrF gleich. Diese Triangel haben aber wegen der beyden gemeinsamen Puncte r, F gleiche Höhen über und unter der Linie MRN, demnach verhalten sie sich, wie die Grundlinien MR, RN. Demnach sind auch die Flächenräume der Sectoren in Verhältniß von MR zu RN.

§. 75.

Da nun die Zeiten, in welchen die Bögen NQ, QM durchlaufen werden, in Verhältniß der Sectoren sind, so sind sie ebenfalls in Verhältniß der Theile MR, RN der Chorde MN. Man sieht leicht, daß es mit diesem Satze dahin abgesehen ist, die Bewegung des Cometen durch den Bogen MQN auf die Bewegung durch die geradlinichte Chorde MRN zu reduciren. Denn die Verhältniß der Zeiten trift wenigstens bey den drey Puncten M, R, N genau mit der Verhältniß der Theile MR, RN zusammen.

§. 76.

Für andere Puncte, die man sich auf der Chorde MN gedenken kann, ist hingegen diese Verhältniß nicht ganz genau, sie weicht aber desto weniger ab, je kleiner der Winkel MFN ist. Um dieses aufzuklären, so sehe man R als einen jeden beliebigen Punct der Chorde MN an. Zieht man die Linien FRQ, MQ, NQ, so wird immer der Flächenraum der Triangel FMQF, FNQF in Verhältniß der Linien MR, NR seyn. Wenn demnach die ganzen Sectoren FMSQF, FNTQF nicht genau in eben der Verhältniß sind, so fehlt es eigentlich nur an den beyden Segmenten MSQM, NTQN, und zwar nur, so fern sie von der Verhältniß MR : NR abweichen. Ist nun aber der Winkel MFN höchstens nur von 20 Graden, so sind diese Segmente ein sehr kleiner Theil der ganzen Sectoren, und dieses macht, daß die Verhältniß dieser Sectoren von der Verhältniß der Linien MR, RN nur unmerklich wenig abweichen kann. Da es nun auf MN einen Punct R giebt, wo die Abweichung vollends $= 0$ wird, so trägt auch dieser Umstand mit bey, die Abweichung für jede andere Puncte R noch um desto geringer zu machen. Wir können aber genauer sehen, wie groß die Abweichung jedesmal seyn wird.

§. 77.

Fig. 4 Die Frage kömmt darauf an, daß man überhaupt die Verhältniß des Triangels FMNF zu dem Sector FMmNF bestimme. Die Buchstaben a, b, c bedeuten, was vorhin (§. 63, 65.), so haben wir (Orbit. Comet. §. 29) den Inhalt

des Triangels $FMNF = \Delta = ab.\sin.c.\cos.c$

des Sectors $FMmNF = A = \frac{1}{3}\sqrt{ab}.\sin.c\,(a + l. + \sqrt{ab}.\cos.c)$

Man setze nun die Winkel

$$AFN = 2\omega$$

$$AFM = 2\varphi$$

so ist

$$c = \varphi - \omega$$

und, wenn man $AF = f$ setzt,

$$FN = f.\sec.\omega^2 = b$$

$$FM = f.\sec.\varphi^2 = a$$

demnach

$$\frac{\Delta}{ff} = \sec.\omega^2.\sec.\varphi^2.\sin.(\varphi - \omega).\cos.(\varphi - \omega)$$

$$= (\text{tang}.\varphi - t\omega).(1 + t\varphi.t\omega)$$

$$\frac{A}{ff} = \frac{1}{3}.\sec.\omega.\sec.\varphi.\sin.(\varphi - \omega).$$

$$[\sec.\omega^2 + \sec.\varphi^2 + \sec.\omega.\sec.\varphi.\cos.(\varphi - \omega)]$$

$$= \frac{1}{3}.(t\varphi - t\omega).(3 + t\varphi^2 + t\omega^2 + t\varphi.t\omega)$$

Hieraus folgt nun

$$\Delta : A = 3(1 + t\varphi.t\omega) : (3 + t\varphi^2 + t\omega^2 + t\varphi.t\omega)$$

Man setze nun ferner

$$t.\omega = z$$

$$t.\varphi = z + \zeta$$

R 5 so

so ist

$$\triangle : A = (3+3z^2+3z\zeta):(3+3z^2+3z\zeta+\zeta\zeta)$$

demnach

$$\triangle : A = 1 : \left(1+\frac{\zeta\zeta}{3(1+z^2+z\zeta)}\right)$$

oder auch, wenn man $\varphi - \omega = c$ nimmt,

$$\triangle : A = 1 : \left[1+\frac{\sec.\omega^2 . tc^2}{3(1-t\omega . tc)}\right]$$

§. 78.

Fig. 6. Wenn wir nun in der 6ten Figur den mittleren Winkel AFQ $= 2\omega$ setzen, so ist QFN $= 2c$, und eben so können wir QFM $= -2\gamma$ annehmen, und wir werden der letzten Formel zufolge

$$FQNF : FQTNF = 1 : \left[1+\frac{\sec.\omega^2 . tc^2}{3(1-t\omega . tc)}\right]$$

$$FQMF : FQSMF = 1 : \left[1+\frac{\sec.\omega^2 \, t\gamma^2}{3(1+t\omega . t\gamma)}\right]$$

haben. Sollen nun diese Verhältnisse gleich seyn, so wird

$$\frac{tc^2}{1-t.\omega.tc.} = \frac{t\gamma^2}{1+t\omega.t\gamma}$$

demnach

$$tc = \frac{t\gamma}{1+t\omega.t\gamma} = t\gamma - t\omega.t\gamma^2 + t\omega^2.t\gamma^3 - \&c.$$

Hieraus erhellet, daß die Winkel c, γ der Gleich-
heit

heit desto näher kommen, je kleiner sie sind, und je kleiner noch überdies der Winkel ω ist.

§. 79.

Da man aber diese Winkel nicht so wählen kann, wie sie dieser Bedingung zufolge seyn sollten, so wird man dennoch nicht merklich fehlen, wenn sie überhaupt nicht von vielen Graden sind, weil die Verhältniß der Sectoren zu den Triangeln nur in der zweyten Dignität der Winkel oder ihrer Tangenten tc, $t\gamma$ anfängt von der Gleichheit abzuweichen. Ist z. E. der ganze Winkel MFN kleiner als 20°, und die Winkel c, γ sind nicht merklich verschieden, so ist jeder kleiner als 5 Gr. und das Quadrat ihrer Tangenten kleiner, als 0,0077. Wenn man demnach um diesen ganzen Unterschied fehlte, so würde der Fehler auf 130 kaum 1 betragen. Es kann sich aber der Fehler niemals so hoch belaufen, es sey denn, daß man einen der Winkel c, γ unendlich klein, und

$$\frac{\sec.\omega^2}{3(1-t\omega.tc)} > 1$$

oder

$$\frac{\sec.\omega^2}{3(1+t\omega.t\gamma)} > 1$$

annehmen wollte. Ersteres kann aber, zumal wo man mehrere Beobachtungen des Cometen vorräthig hat, immer leicht vermieden werden,
wenn

wenn man die Zeiten zwischen den Beobachtungen nicht allzu ungleich annimmt.

§. 80.

Wie aber auch immer die Sache ausfallen mag, so kann man die Voraussetzung, daß die Sectoren den Triangeln gleich genommen werden, dergestalt gebrauchen, daß beyde dadurch bis auf einen geringen Unterschied bestimmt werden, und diese Bestimmung kann sodann dienen, sie noch näher zu bestimmen, so oft man es nöthig findet. Jedoch hievon im folgenden ein mehreres.

§. 81.

Damit inzwischen von dem, was hieher gehört, nichts vergessen werde, so werde nochmals zu der Formel (§. 63.)

$$12\,m\,T = (a+b+k)^{3:2} - (a+b-k)^{3:2}$$

zurückkehren, und darüber nur noch anmerken, daß sie mir in den Orbit. Comet. gedient hat, für alle parabolische Laufbahnen der Cometen einen allgemeinen Maaßstab anzugeben, den ich auch im folgenden gebrauchen werde. Die Theorie desselben werde ich hier nicht wiederholen, inzwischen aber nur so viel anmerken, daß dieser Maaßstab nach den Distanzen dergestalt in Tage und Stunden getheilt ist, daß, wenn man die Distanzen $(a+b+k)$ und $(a+b-k)$ auf denselben aufträgt, der Unterschied

schied $(a+b+k) - (a+b-k)$ die Zeit T angiebt. Es ist nemlich in der Formel

$$T = \frac{(a+b+k)^{3:2} - (a+b-k)^{3:2}}{12\,m}$$

die Zeit T der Unterschied zwoer Zeiten, welche durch

$$t' = \frac{(a+b+k)^{3:2}}{12\,m}$$

und

$$t'' = \frac{(a+b-k)^{3:2}}{12\,m}$$

ausgedrückt werden, und einerley Function der Distanzen $(a+b+k)$ und $(a+b-k)$ sind. Wenn man demnach für diese Distanzen überhaupt eine Distanz $= x$ annimmt, so kann durch die Formel

$$t = x^{3:2} : 12\,m$$

eine Tabelle berechnet werden, welche für jede Distanz x die dazu gehörende Zeit t, oder umgekehrt

$$x = (12\,m\,t)^{2:3}$$

für jede Zeit t die dazu gehörende Distanz x giebt. Eine Tabelle dieser letztern Art findet sich den Orbit. Comet. beygefügt, und sie dient unmittelbar auch zu Verzeichnung des Maaßstabes, wo jede Tage und Stunde da hingeschrieben werden, wo die Distanz x vom Anfange an gerechnet, hintrift.

VIII.

VIII. Construction der Bahn des Cometen 1769.

§. 82.

Nach den bisherigen Betrachtungen werde ich nun das oben (§. 69.) versprochene Beyspiel vorbringen, und mit der Construction nach Anleitung der 31ten Aufgabe in den Orbit. Comet. den Anfang machen. Es gehören drey Beobachtungen dazu, und diese werde ich von denen nehmen, die Herr **Meßier** angestellt hat. Er gab sie nach wahrer Zeit, Pariser Uhr, neuem Calender, und nach der Rectascension und Declination an, und damit muste die mittlere Zeit, die Länge und Breite daraus hergeleitet werden. Nach dieser Verwandelung ergab sich

mittlere Zeit	Länge des Comet.	Breite südl.
T. St. ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″
1769. Aug. 14.12.34.12.	1. 9.58.34.	3. 9.42
Aug. 28.13.24.17.	1.28.48.42.	10.32.53
Sept. 25.16.41.40.	4.20.39.21.	22.43.44

Ferner war für diese Zeiten der Ort der Sonne und ihr Abstand:

erste Beobachtung	4.22.20.25	1,0122.
zweyte - - -	5. 5.52.47	1,0090.
dritte - - -	5.23.31.14	1,0041.

demnach die Elongation des Cometen von der Sonne:

erste Beobachtung	3.12.21.51	= 102°.21′.51″
zweyte - - -	3. 7. 4. 5	= 97. 4. 5
dritte - - -	1. 2.51.53	= 32. 51.53

Endlich verflossen zwischen der

ersten und zweyten Beobachtung	14T.0St.50′. 5″
zweyten und dritten - - -	18. 3. 17. 23
ersten und dritten - - -	32. 4. 7. 28

Und eben so war die Bewegung der Sonne oder der Erde zwischen der

ersten und zweyten Beobachtung	13°.32′.22″
zweyten und dritten - - -	17. 38. 27
ersten und dritten - - -	31. 10. 49

Dieses sind nun die Data, die bey der Construction zum Grunde gelegt werden. Ich werde in Beschreibung derselben Schritt für Schritt gehen, und an gehörigen Stellen Anmerkungen einstreuen, die auch in andern Fällen ihren guten Gebrauch haben werden.

§. 83.

In der 7ten Figur stellt die Fläche des Papiers verschiedene Ebenen vor, die ich jedesmal besonders anzeigen werde. Und zwar anfänglich stellet sie die **Fläche der Erdbahn** vor. S ist der Mittelpunct der Sonne. A, B, C sind die Puncte, wo die Erde sich zur Zeit der drey Beobachtungen befand. Daben ist Fig. 7.

AS = 1,0122	ASB = 13°.32′.22″
BS = 1,0090	BSC = 17. 38. 27
CS = 1,0041	ASC = 31. 10. 49

Aus

Aus diesen Datis ist nemlich die Lage von A, B, C bestimmt worden.

§. 84.

Nun macht man ebenfalls den Datis zufolge die Winkel

$$SAD = 102^{\circ}.\ 21'.\ 51''$$
$$SBE = 97.\ 4.\ 5$$
$$SCF = 32.\ 51.\ 53$$

und damit stellen die Linien AD, BE, CF die geocentrischen Längen des Cometen vor, oder der Comet stand in den drey Beobachtungen über diesen Linien senkrecht, und zwar erstlich über einem Punct der Linie AD, sodann über irgend einem Punct der Linie BE, und endlich über irgend einem Punct der Linie CF.

§. 85.

So unvollständig noch diese Bestimmung ist, so giebt sie doch schon einige Umstände wenigstens überhaupt an. So z. E. da die beyden Winkel SAD, SBE größer als 90° sind, so ist jeder Punct auf den Linien AD, BE weiter von der Sonne S als die Erde in A, B entfernt. Um so vielmehr gilt dies von den Puncten, die über diesen Linien liegen. Man kann demnach schon hieraus sicher schließen, daß der Comet zur Zeit der ersten und zweyten Beobachtung nothwendig weiter von der Sonne entfernt seyn mußte, als die Erde von der Sonne entfernt war.

§. 86.

§. 86.

Ferner kann man blos aus der Lage der Linien AD, BE, CF den Schluß ziehen, der Comet müsse in seiner Bahn sich nach der Ordnung der himmlischen Zeichen bewegen, und folglich nicht rückläufig seyn. Denn, nachdem er zur Zeit der ersten Beobachtung über der Linie AD gestanden, so mußte er nachgehends über der Linie BE stehen, ehe er über der Linie CF zu stehen kam. Die Ordnung der Beobachtungen bringt dieses nothwendig mit sich. Nun folgen diese Linien, wie man sieht, von Abend gegen Morgen nach der Ordnung der Zeichen auf einander. Demnach muß der Comet sich in seiner Bahn nach eben der Ordnung bewegt haben.

§. 87.

Wir können noch weiter gehen, und schliessen, der Comet müße sich der Sonne genähert haben, demnach noch nicht durch sein Perihelium oder Sonnennähe gegangen seyn. Denn welchen Punct auf der Linie BE man immer für den Ort des Cometen annimmt, so ist derselbe von S weiter entfernt als B. Nun ist SC an sich schon kleiner als SB. Sollte demnach der Comet zur Zeit der dritten Beobachtung noch weiter von S entfernt gewesen seyn, so müßte derselbe auf der Linie CF tief unter F gestanden haben, weil jede zwischen CF liegende Puncte näher bey S sind, als C. So geschwinde aber konnte er sich nicht bewegt haben, daß er in gleicher Zeit, da die Erde sich aus B in C bewegte, von der Linie BE bis unterhalb F hätte kommen können. Denn, da er außerhalb der Erdbahn laufen mußte, so konnte seine Geschwindigkeit höchstens um $\frac{14}{10}$ mal größer seyn, als die von der Erde. Es giebt es aber auch der bloße Augenschein, daß sich von einem Punct unterhalb F kein parabolischer Bogen ziehen läßt, der seine Höhlung gegen S kehre, den Punct S zum Brennpunct habe, und die Linien BE, AB in Puncten durchschneide, die der Ordnung nach näher bey S sind, als der unterhalb F angenommene Punct.

§. 88.

Wir könnten eben so noch weiter gehen, und auf den Linien AD, BE, CF die Gränzen bestimmen, über welche der Comet nicht entfernt seyn konnte. Denn so z. E. giebt es für jeden auf der Linie AD angenommenen Punct, einen Punct auf der Linie BE, welcher von demselben die geringste mögliche Entfernung hat. Diese geringste Entfernung wird nun um so viel größer, je mehr der auf AD angenommene Punct von A entfernt ist. Da aber mit der grössern Entfernung die Geschwindigkeit des Cometen kleiner wird, und der Comet in dem Zeitraum zwischen der ersten und zweyten Beobachtung aus dem auf AD angenommenen Punct wenigstens in den nächstliegenden Punct der Linie BE muß kommen können, so setzt dieses dem auf AD angenommenen Punct seine bestimmte Schranken, über welche hinaus der Comet von A nicht entfernt seyn kann. Uebrigens muß ich mit anmerken, daß Schlüße von dieser Art nicht in allen möglichen Fällen können gemacht werden, sondern nach Beschaffenheit der Sache anders gemacht werden müssen. Ich werde demnach die Construction fortsetzen, und sie besonders so vorbereiten, daß wir nach oben (§. 75. folgg.) erwähnter Art den Cometen ansehen können, als hätte er nicht einen parabolischen Bogen, sondern die Chorde desselben durchlaufen.

§. 89.

Zu diesem Ende wird durch SB die Linie aBc senkrecht gezogen, und, so viel nöthig seyn wird, verlängert. Sodann macht man AD, BE und CF = 1, und aus den Puncten D, E, F zieht man D d δ, E e ε, F φ f durch ac senkrecht. Ferner sucht man für den Halbmesser = 1 die Tangenten der beobachteten Breiten des Cometen, und trägt die erste aus d in δ, die zweyte aus e in ε, die dritte aus f in φ, weil sie sämtlich südlich sind, herunterwerts. Man zieht endlich auch Aa, Cc auf ac senkrecht, und endlich die Linien aδ, Bε, cφ gerade hinaus.

§. 90.

Diese Linien sind nun eine orthographische Projection derjenigen Linien, die zur Zeit der drey Beobachtungen aus der Erde in den Cometen gezogen werden konnten. Das Auge ist in in der Linie BS gegen S hinaus unendlich entfernt, und damit sieht es, wenn die Tafel längs der Linie aBc senkrecht durch die Fläche der Ecliptic geht, die Puncte S und B in B, den Punct A in a, den Punct C in c. Ferner stellt die Linie Bε die zur Zeit der zweyten Beobachtung sowohl aus der Erde als aus der Sonne nach dem Cometen gezogene Linie vor. Man kann sich erinnern, daß schon oben (§. 58.) hievon Erwähnung geschahe. Die Puncte Q, R der 6ten Figur sind hiedurch beyde auf der Linie Bε, und die Sache ist dadurch so weit gebracht, daß wir nicht an den Bogen MQN (Figur 6), sondern schlechthin nur an die Chorde MN, und deren beyden Theilen MR, RN uns halten können.

§. 91.

Fig. 7. Nun können wir auf Bε nach Belieben Puncte μ annehmen, und durch dieselben gerade Linien Mμm dergestalt ziehen, daß die Theile Mμ, μm den Zeiten proportional sind, die zwischen der ersten und zweyten, wie auch zwischen der zweyten und dritten Beobachtung verflossen, so daß

$$M\mu : \mu m = (14^{T}.\ 0^{St}.\ 50'.\ 5'') : (18^{T}.\ 3^{St}.\ 17'.\ 23'')$$

sey. Die Figur enthält bereits mehrere solcher Linien. Ich werde nun bey der Linie Mμm zeigen, was mit allen vorzunehmen ist.

§. 92.

Man sehe demnach Mm als die Chorde des von der ersten bis zur dritten Beobachtung von dem

dem Cometen durchlaufenen Bogens oder vielmehr als die Projection dieser Chorde an. Um nun dieselbe auf die Fläche der Ecliptic (§. 83.) zu bringen, so ziehe man durch M die Linie MQN, und durch m die Linie λmn durch aBc senkrecht, so werden N, n die beyden Puncte seyn, über welchen der Comet stehen würde, wenn Mm in der That die Projection seiner Chorde wäre. Und eben so werden MQ, mλ die Höhe des Cometen über den Puncten N, n seyn.

§. 93.

Man mache nun auf einem besondern Blatt die Winkel

$$HGh = 3^{\circ}.\ 9'.\ 42''$$
$$kGK = 22.\ 43.\ 44$$

oder den beobachteten Breiten gleich. Man trage ferner SN aus H in h′, und Sn aus K in k′, so werden hh′, kk′ die Distanzen des Cometen von der Sonne seyn.

§. 94.

Ferner trage man die Distanz der Puncte Nn aus L in P, und richte Pp = MQ und Ll = mλ senkrecht auf, so ist pl die Länge der Chorde des Cometen in seiner Bahn, und damit läßt sich die Formel (§. 63.)

$$T = \frac{(a+b+k)^{3:2} - (a+b-k)^{3:2}}{12\,m}$$

anwenden, weil

$$hh' = a$$
$$kk' = b$$
$$pl = k$$

ist. Findet man vermittelst dieser Maasse und Formel die Zeit T der beobachteten Zeit

$$32^{T}.4^{St}.7'.28''$$

gleich, so hat man seine Absicht erreicht, und Mm wird in der That die Projection der Chorde seyn. Es trift aber dieses bey der Chorde Mm nicht ein. Ich habe mit Zuziehung der oben (§. 81.) erwähnten Scala gefunden, daß

$$T = 64^{T}.23^{St}$$

und demnach um 32 T. 19. St. zu groß ist. Diesen Unterschied trug ich nach einer angenommenen Scale auf der Linie NM aus N in R, um dadurch den Punct R der krummen Linie Rq zu bestimmen.

§. 95.

Eben so verfuhr ich mit den übrigen auf Be angenommenen Puncten (§. 91.) und bestimmte dadurch die Linie Rq, bis so weit, daß sie anfing, die Linie AN, welche die Absciſſenlinie dazu ist, zu durchschneiden. Dieses geschahe in q, und so konnte ich schließen, der Comet habe zur Zeit der ersten Beobachtung über q gestanden.

§. 96.

Aus q zog ich nun ferner qxr auf ac senkrecht, und so war xr die Höhe des Cometen über

über dem Punct q. Ferner ließ sich die Linie rs nach eben dem Gesetze wie Mm ziehen, und aus s konnte st mit FΦ parallel herunter gezogen werden. Damit war auch der Punct t bestimmt, über welchem der Comet zur Zeit der dritten Beobachtung in einer Höhe $= \lambda\zeta$ stand.

§. 97.

Hierauf zog ich qt zusammen, und auf diese Linie richtete ich $tw = \lambda\zeta$, und $qv = xr$ senkrecht auf, und zog wv, welches die wirkliche Länge der Chorde ist, deren Bogen der Comet in seiner Bahn zwischen der ersten und dritten Beobachtung durchlaufen. Nun gaben tq, wv gegen ☋ verlängert, den Durchschnittspunct, wo die Knotenlinie S☋ mußte hingezogen werden, und damit war die Lage dieser Linie ebenfalls bestimmt.

§. 98.

Auf S☋ zog ich ferner ti senkrecht, und damit gab tw durch ti getheilt die Tangente der Neigung der Bahn des Cometen gegen die Ecliptic. Die Secante dieses Neigungswinkels mit ti multiplicirt gab die Länge ig, und so war g ein Punct der auf die Ecliptic umgelegten Bahn. Auf eben die Art wurde auch der Punct l bestimmt, welcher ebenfalls ein Punct dieser Bahn ist. Da nun der Brennpunct S, und die zween Puncte g, l gegeben waren, so konnte die Bahn lgπ☊G vollends construirt, und der Punct der Sonnennähe π bestimmt werden.

S 4 §. 99.

§. 99.

Solche Zeichnungen müßen nun auf einem ganzen Bogen, und nicht blos auf einem Quartblatte vorgenommen werden, wenn man auch kleinerer Unterschiede und Theile Rechnung tragen will. Die Voraussetzung, daß die Theile der Chorden Mμ, μm den Zeiten proportional waren, brachte keinen Irrthum, der in der Construction merklich seyn konnte. Denn, da ich vermittelst der Formeln (§. 78.) nachrechnete, so fand es sich, daß die wahre Verhältniß von Mμ, μm von der Verhältniß der Zeiten so wenig abwich, daß der Unterschied auf 200 nicht 1 betrug. Es hätte nemlich immer der Theil Mμ um $\frac{1}{220}$ Theil größer genommen werden sollen. Man sieht aber leicht, daß ein so unmerklicher Unterschied sich unter die übrigen kleinen Unrichtigkeiten, denen eine Construction unterworfen ist, vermengen und verlieren würde. Ich werde nun noch zeigen, wie alle solche kleine Fehler durch die Berechnung nachgeholt werden können.

IX. Nähere Bestimmung der Bahn des Cometen 1769, durch Rechnung.

§. 100.

Durch eine auf erst beschriebene Art auf einem ganzen Bogen vorgenommene Construction hatte ich nun so viel herausgebracht, daß

daß die Distanz des Cometen von der Erde zur Zeit der

erſten Beobachtung von 0, 8520
zwoten - - - - - - - - - 0,4850
dritten - - - - - - - - - 0,3350

nicht merklich verschieden seyn konnte. Um nun die Unterschiede aufzusuchen, so werde ich nach Anleitung der 32ten Aufgabe in den Orbit. Comet. diese Distanzen

0, 8520 + x
0, 4850 + y
0, 3350 + z

setzen, und in der Rechnung alle höhere Dignitäten von x, y, z weglassen.

§. 101.

Es sey demnach in der 8ten Figur, welche hier nur zum Vorbilde dient, um in der Anlage der Berechnung klärer zu sehen, S die Sonne, A, a α die drey Oerter der Erde zur Zeit der Beobachtungen, B, b, β die Puncte der Fläche der Erdbahn, über welchen der Comet in C, c, γ stand, so daß die Winkel CAB, cab, γαβ die beobachteten Breiten des Cometen vorstellen. Dieses vorausgesetzt, so findet sich die Berechnung, so weit sie nemlich die Bestimmung der Werthe von x, y, z betrift, der Ordnung nach auf beyliegendem Blatte. Fig. 8.

Zur Berechnung der Bahn des Cometen von 1769.

Fig. 8.

Obſerv. I.	Obſerv. II.	Obſerv. III.
1769. Aug. 14^d. 12^h. 34′. 12″	1769. Aug. 28^d. 13^h. 24′. 17″	1769 Sept. 15.^{d} 16.^{h} 41.′ 40″
Longit. ☉ 4^s. 22°. 20′. 25″ - - - - AS ♁ 10. 22. 20. 25 - - - - SA Cometae 1. 9. 58. 34 - - - - AB	Longit. ☉ 5^s. 5°. 52′. 47″ - - - - - - aS ♁ 11. 5. 52. 47 - - - - - - Sa Cometae 1. 28. 48. 42 - - - - - - ab	Long. ☉ 5. 23. 31. 14 - - - - - - αS ♁ 11. 23. 31. 14 - - - - - - Sα Cometae 4. 20. 39. 21 - - - - - - αβ
Latit. Com. 3. 9. 42 - - - - CAB Elong. a ☉ 103. 21. 51 - - - - BAS	Latit. Com. 10. 32. 53 - - - - - - cab Elong. a ☉ 97. 4. 5 - - - - - - baS	Latit. com. 22. 43. 44 - - - - - γαβ Elong. a ☉ 32. 51. 53 - - - - - βαS
ſin. BAS = + 0,97680 coſ. BAS = − 0,21412 tang. latit. = − 0,05523	ſin. baS = + 0,99240 coſ. baS = − 0,12305 tang. latit. = − 0,18621	ſin. βαS = + 0,54265 coſ. βαS = + 0,83995 tang. latit. = − 0,41891
Diſt. SA = 1,0122 AB = 0,8520 + x	Diſt. Sa = 1,0090 ab = 0,4850 + y	Diſt. Sα = 1,0041 αβ = 0,3350 + z
SA^2 = + 1,0245 AB^2 = + 0,7259 + 1,7040 x − 2 SA. AB. coſ. BAS = + 0,3694 + 0,4335 x	Sa^2 = + 1,0181 ab^2 = + 0,2352 + 0,9700 y − 2 Sa. ab. coſ. baS = + 0,1204 + 0,2483 y	Sα^2 = + 1,0082 αβ^2 — + 0,1122 — + 0,6700 z − 2 Sα. αβ. coſ. βαS = − 0,5650 − 1,6868 z
Summa = SB^2 = + 2,1198 + 2,1375 x CB^2 = + 0,0022 + 0,0052 x SC^2 = + 2,1220 + 2,1427 x	Summa = Sb^2 = + 1,3737 + 1,2183 y cb^2 = + 0,0082 + 0,0336 y Sc^2 = + 1,3819 + 1,2519 y	Summa = Sβ^2 = + 0,5554 − 1,0168 z γβ^2 = + 0,0197 + 0,1174 z Sγ^2 = + 0,5751 − 0,8994 z
SC = + 1,4567 + 0,7354 x CB = − 0,0471 − 0,0552 x SB = + 1,4560 + 0,7340 x	Sc = + 1,1755 + 0,5325 y cb = − 0,0903 − 0,1862 y Sb = + 1,1721 + 0,5198 y	Sγ = + 0,7584 − 0,5929 z γβ = − 0,1403 − 0,4189 z Sβ = + 0,7453 − 0,6821 z
$\frac{AB.\ \text{ſin}.\ BAS}{SB}$ = ſin. ASB = 0,57165 + 0,3827 x ASB = 34°. 52′ + 0,4665 x	$\frac{ab\ \text{ſin}.\ baS}{Sb}$ = ſin. aSb = 0,4107 + 0,6646 y aSb = 24°. 15′ + 0,7290 y	$\frac{\alpha\beta.\ \text{ſin}.\ \beta\alpha S}{S\beta}$ = ſin αSβ = 0,2439 + 0,9513 z αSβ = 14°. 7′ + 0,9809 z

Obſerv. I.ª II.ª	Obſerv. II.ª III.ª	Obſerv. III.ª I.ª
T = 14^d. 0^h. 50′. 5″ 12 m T = 1,4486 (§. 62. 63)	t = 18^d. 3^h. 17′. 23″ 12 mt = 1,8720 (§. 62. 63.)	τ = 32^d. 4^h. 7′. 28″ 12 mτ = 3,3206 (§. 62. 63.)
ASa = 13°. 32′ aSb = 24. 15 + 0,7290 y ASb = 37. 47 + 0,7290 y	aSα = 17°. 38′. αSβ = 14. 7 + 0,9809 z aSβ = 31. 45 + 0,9809 z	αSA = 31°. 11′ ASB = 34. 52 + 0,4665 x αSB = 3. 41 + 0,4665 x
BSb = 2. 55 − 0,4665 x + 0,7290 y coſ. BSb = 0,99870 + 0,0237 x − 0,0371 y	bSβ = 7. 30 − 0,7290 y + 0,9809 z coſ. bSβ = 0,99144 + 0,0951 y − 0,1208 z	βSB = 10°. 26′ + 0,9809 z − 0,4665 x coſ. βSB = 0,9835 − 0,1777 z + 0,0845 x
bc − BC = − 0,0432 + 0,0552 x − 0,1862 y	βγ − bc = − 0,0500 + 0,1862 y − 0,4189 z	βγ − BC = − 0,0932 − 0,4189 z + 0,0552 x
(bc − BC)^2 = 0,0019 − 0,0048 x + 0,0161 y	(βγ − bc)^2 = 0,0025 − 0,0186 y + 0,0419 z	(βγ − BC)^2 = 0,0087 + 0,0781 z − 0,0103 x
SB^2 = 2,1198 + 2,1375 x Sb^2 = 1,3737 + 1,2183 y	Sb^2 = 1,3737 + 1,2183 y Sβ^2 = 0,5554 − 1,0168 z	Sβ^2 = 0,5554 − 1,0168 z SB^2 = 2,1198 + 2,1375 x
SB^2 + Sb^2 = 3,4935 + 2,1375 x + 1,2183 y − 2SB. Sb coſ BSb = − 3,4087 − 1,7993 x − 1,3851 y	Sb^2 + Sβ^2 = 1,9291 + 1,2183 y − 1,0168 z − 2Sb. Sβ. coſ bSβ = − 1,7322 − 0,9343 y + 1,8089 z	Sβ^2 + SB^2 = 2,6752 − 1,0168 z + 2,1375 x − 2Sβ. SB. coſ. BSβ = − 2,1345 + 2,3401 z − 1,2594 x
Summa = Bb^2 = 0,0848 + 0,3382 x − 0,1668 y Cc^2 = 0,0867 + 0,3334 − 0,1507 y	Summa = bβ^2 = 0,1969 + 0,2840 y + 0,7921 z cγ^2 = 0,1994 + 0,2654 y + 0,8340 z	Summa = βB^2 = 0,5407 + 1,3233 z + 0,8781 x γC^2 = 0,5494 + 1,4014 z + 0,8678 x
SC + Sc = 2,6322 + 0,7354 x + 0,5325 y Cc = 0,2945 + 0,5659 x − 0,2558 y	Sc + Sγ = 1,9339 + 0,5325 y − 0,5929 z cγ = 0,4465 + 0,2972 y + 0,9339 z	Sγ + SC = 2,2151 − 0,5929 z + 0,7354 x γC = 0,7412 + 0,9454 z + 0,5854 x
SC + Sc + Cc = 2,9267 + 1,3013 x + 0,2767 y SC + Sc − Cc = 2,3377 + 0,1695 x + 0,7883 y	Sc + Sγ + cγ = 2,3804 + 0,8297 y + 0,3410 z Sc + Sγ − cγ = 1,4874 + 0,2353 y − 1,5268 z	Sγ + SC + γC = 2,9563 + 0,3525 z + 1,3208 x Sγ + SC − γC = 1,4739 − 1,5383 z + 0,1500 x
(SC + Sc + Cc)$^{3:2}$ = 5,0070 + 3,3393 x + 0,7099 y (SC + Sc − Cc)$^{3:2}$ = 3,5743 + 0,3886 x + 1,8079 y	(Sc + Sγ + cγ)$^{3:2}$ = 3,6727 + 1,9195 y + 0,7891 z (Sc + Sγ − cγ)$^{3:2}$ = 1,8140 + 0,4306 y − 2,7931 z	(Sγ + SC + γC)$^{3:2}$ = 5,0131 + 0,9090 z + 3,4065 x (Sγ + SC − γC)$^{3:2}$ = 1,7894 + 2,8014 z + 0,2732 x
12 m T { = 1,4327 + 2,9407 x − 1,0980 y = 1,4486 (§. 63.)	12 mt { = 1,8587 + 1,4889 y + 3,5822 z = 1,8720 (§. 63.)	12 mτ { = 3,2937 + 3,7104 z + 3,1333 x = 3,3206 (§. 63.)
0,0156 = 2,9407 x − 1,0980 y	0,0133 = 1,4889 y + 3,5822 z	0,0269 = 3,7104 z + 3,1333 x.
+ x = 0,0090 AB = 0,8610	+ y = 0,0096 ab = 0,4946	− z = 0,0004. αβ = 0,3346.

§. 102.

Man berechnet erstlich, was aus jeder Beobachtung für sich gefunden werden kann, in der Ordnung, wie es auf der ersten Hälfte des Blattes zu sehen. Sodann werden die Beobachtungen, je zwo und zwo, mit einander verglichen, in der Ordnung, wie es die untere Hälfte des Blattes ausweiset. Die ganze Rechnung wird wohl keiner fernern Erläuterung bedürfen. Denn, wo sie sich auf die obigen Formeln bezieht, da sind die §. §. angeführt. Im übrigen setzt sie die Kenntniß der trigonometrischen Formeln voraus, wiewohl auch diese, wo es mehrerer Deutlichkeit wegen nöthig war, angedeutet sind.

§. 103.

Der Erfolg der ganzen Rechnung giebt nun die drey Distanzen des Cometen von der Erde

$$AB = 0,8610$$
$$ab = 0,4946$$
$$\alpha\varepsilon = 0,3346$$

welche höchstens nur in der vierten Decimalstelle von dem Wahren abgehen, theils weil die höheren Dignitäten von x, y, z immer weggelassen, theils auch, weil die Rechnung selbst nur bis auf 4 Decimalstellen getrieben worden. Es würde aber ohnehin eine mehrere Schärfe unnöthig seyn. Denn einmal konnten die Beobachtungen leicht um 1 Minute fehlen, und dadurch wird schon die vierte Decimalstelle unzuverläßig. Sodann gründet sich die ganze Berechnung auf die

parabolische Laufbahn. Ist demnach die wahre Bahn des Cometen nicht eine sehr ablange Ellipse, so kann auch aus diesem Grunde die vierte, ja selbst die dritte Decimalstelle unrichtig, wenigstens unzuverläßig seyn.

§. 104.

Wir wollen nun aber die Rechnung weiter fortsetzen, und aus den gefundenen Distanzen die Bahn des Cometen bestimmen. Es ist hiezu genug, daß wir die erste und dritte Beobachtung mit einander vergleichen, da diese ohnehin am meisten von einander entfernt sind. Das erste ist

I Die Lage der Knotenlinie S☋.

§. 105.

Diese trift in den Durchschnitt der Linien εB☋, γC☋, und es ist

$$(\varepsilon\gamma - BC) : \varepsilon\gamma = \varepsilon B : \varepsilon ☋.$$

Da nun

$$\varepsilon\gamma - BC = -0,0932 - 0,4189z + 0,0552x = -0,0925$$
$$\varepsilon\gamma = -0,1403 - 0,4189z = -0,1401$$
$$\varepsilon B^2 = +0,5407 + 1,3233z + 0,8781x = +0,5481$$

demnach

$$\varepsilon B = 0,7403$$

gefunden worden, so findet sich hieraus

$$\varepsilon ☋ = 1,1208$$

§. 106.

§. 106.

Es ist ferner

$$\text{C}B : \sin. \text{C}SB = SB : \sin. S\text{C}B$$

und

$$\text{C}SB = 10^\circ.26' + 0{,}9809\,z - 0{,}465\,x$$
$$= 10.26 - 0{,}0046 = 10^\circ.\,2'$$
$$\sin. \text{C}SB = 0{,}1765$$
$$SB = 1{,}4560 + 0{,}7340\,x = 1{,}426$$
$$\text{C}B = 0{,}7401$$

demnach

$$\sin. S\text{C}B = 0{,}3488$$
$$S\text{C}B = 159^\circ.35'$$

§. 107.

Endlich aus

$$S\text{C} = 0{,}7453 - 0{,}6821\,z = 0{,}7456$$
$$\text{C}☋ = 1{,}1208$$
$$S\text{C}B = 159^\circ.35'$$

findet sich

$$S☋ = 1{,}8381$$
$$\text{C}S☋ = 12^\circ.\,17'$$

§. 108.

Nun ist

$$\alpha S\text{C} = 14^\circ.\,7' + 0{,}9809\,z = 14^\circ.6'$$

demnach

$$\alpha S☋ = 2^\circ.\,11'$$

Da nun die Lage der Linie $S\alpha$ bekannt, so findet sich hieraus auch die Lage der Knotenlinie $S☋$, und der Ort des ☋ ist in ♍. $25^\circ.42'$.

II.

II. Die Neigung der Bahn gegen die Erdbahn.

§. 109.

Hiezu haben wir den rechten Winkel in P, und

$$S\text{C} = 0{,}7456$$
$$\text{C}S☋ = 12^\circ.\,17'$$

demnach

$$SP = 0{,}7285$$
$$P\text{C} = 0{,}1585$$

Nun ist

$$\text{C}\gamma = 0{,}1401$$

demnach

$$\frac{\text{C}\gamma}{\text{C}P} = 0{,}8838 = \text{tang. inclin.}$$

demnach die Neigung der Bahn $= 41^\circ.\,28'$

III. Der Abstand der Sonnennähe.

§. 110.

Dazu dient die Formel (§. 66.)

$$f = (k^2 - (a-b)^2).\,[a + b + \sqrt{((a+b)^2 - k^2)}] : 4k^2.$$

Nun ist

$$a = SC = 1{,}4567 + 0{,}7354\,x = 1{,}4633$$
$$b = S\gamma = 0{,}7584 - 0{,}5929\,z = 0{,}7586$$
$$k = \gamma C = 0{,}7412 + 0{,}9454\,z + 0{,}5854\,x = 0{,}7461$$

Und daraus findet sich der Abstand der Sonnennähe

$$f = 0{,}1164$$

IV.

IV. Die Zeit der Sonnennähe.

§. 111.

Hiezu dient die Formel (§. 68.)

$$T' = \left(\frac{FM + 2AF}{3m}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{FM - AF}{2}\right)} = \left(\frac{b + 2f}{3m}\right) \cdot \sqrt{\frac{b - f}{2}}$$

Da nun

$b = 0{,}7586 \quad 3m = 0{,}025803177.$ (§. 62)

$f = 0{,}1164$

so findet sichs, daß

$T' = 21^{T}.\ 18^{St}.\ 35'$

Diese Zeit zu Sept. 15. 16. 42 addirt,

giebt - - - Oct. 7. 11. 17. die Zeit der Sonnennähe.

V. Der Ort der Sonnennähe.

§. 112.

Hiezu wird erstlich der Winkel γSP gesucht, und da haben wir den rechten Winkel $SP\gamma$

$S\gamma = 0{,}7586$

$SP = 0{,}7285$

demnach

$\gamma SP = 16°.\ 11$

§. 113.

Sodann wird die Entfernung der Linie $S\gamma$ von der Axe gesucht, und dazu dient die Formel (§. 67.)

cos.

$$\cos.\tfrac{1}{2}MFA = \sqrt{\left(\frac{AF}{FM}\right)} = \sqrt{\left(\frac{f}{b}\right)}$$

Diese giebt

$MFA = 133°.\ 53'$

§. 114.

Wird nun zu diesem Winkel

$133°.\ 53'$

der Winkel $16.\ 11 = \gamma SP$ addirt,

so giebt die Summe $150°.\ 4'$ oder auch deren Zusatz zu $180°$, welcher $29°.\ 56'$ ist, den Abstand der Axe von der Knotenlinie.

§. 115.

Da nun der Ort des ☊ in ♍. $25°.\ 42'$ gefunden worden, so findet sich der Ort der Sonnennähe

♍. $25°.\ 42' - 29°.\ 56' =$ ♌. $25°.\ 46'$

Und damit sind nun die Bestimmungsstücke der Bahn des Cometen von 1769

Longit. ☊ - - ♍ $25°.\ 42'$

Long. Perih. in orbita ♌ 25. 46

Inclin. orbit. $41°.\ 28'$

Dist. Perih. 0, 1164

Cometa in Perih. Oct. $7^{d}.\ 11^{h}.\ 17'$

§. 116.

Man kann ferner aus

$f = 0{,}1164$

$S☋ = 1{,}8281$

und

und der Formel des §. 68. finden, daß der Comet den 25ten Julii um Mittagszeit durch den niedersteigenden Knoten gegangen.

§. 117.

Herr **Meßier** meldete unterm 25ten Sept. 1769. daß dieser Comet den Berechnern viel zu thun gegeben, und besonders, daß Hr. **Lalande** aus den Beobachtungen

1769. Aug.	14ᵀ. 12ˢᵗ. 34'. 12''	Longit. 1ˢ. 9°. 58'. 16''	Latit. 3°. 17'. 13''
	21. 13. 4. 55	- - - 1. 17. 1. 30	- - 6. 53. 49
	28. 15. 59. 56	- - - 1. 29. 2. 50	- - 10. 37. 19

die Bahn des Cometen bestimmt habe. Es sind aber in diesen Beobachtungen die Längen und Breiten aus der Rectascension und der Declination, die **Meßier** eigentlich beobachtet, hergeleitet, und dabey in der Rechnung Fehler begangen worden. Dadurch, und vermuthlich noch aus andern Ursachen, brachte **Lalande** die Bahn ganz irrig heraus, so daß er nachgehends die Rechnung wieder vornahm, um dem Wahren näher zu kommen. Er fand nach der

	erſten Berechnung.	verbeſſerten Berechn.
Long. ☊ - - -	♍. 26°. 23' - -	♍. 25°. 10'
Long. Perih. -	♎ 11. 28 - -	♌ 25. 25
Inclin. orbitæ	73. 15 - -	41. 0
Dist. Perihelii	0,03104 - -	0,11586
Temp. Perih.	Oct. 1. 9. 22 -	Oct. 7. 8. 50

Die zweyte Berechnung trift nun mit der hier gegebenen ungleich näher zusammen. Es wäre indessen gut gewesen, wenn die erstere gar nicht bekannt gemacht worden wäre.

§. 118.

Wir können nun noch sehen, wiefern der Comet sich, wegen seiner elliptischen Bahn, bis zum 19ten Nov. 1769 Abends um 6 Uhr mittlerer Zeit verspätet, da seine Länge in ♐ 25°. 35'. die Breite 23°. 11' nördlich war.

1769. Nov.	19ᵀ.	6ˢᵗ.	0'
Oct.	7.	11.	17
	42.	18.	43

Dieses ist demnach die Zeit, seitdem der Comet in seiner Sonnennähe gewesen.

§. 119.

Es sey nun S die Sonne, T der Ort der Erde, P die Sonnennähe, ☊ der aufsteigende Knoten, μ der Ort des Cometen in seiner Bahn, $\mu\pi$ auf der Knotenlinie ☊$S\pi$ senkrecht, γ der Punct in der Fläche der Erdbahn, über welchem der Comet gestanden, γk sey die Höhe des Cometen über der Erdbahn, demnach $k\gamma T$ seine scheinbare Breite, $\gamma\mu$ seine scheinbare Länge von der Erden aus gesehen. Fig. 9.

§. 120.

Da nun PS = 0,1164 und die Zeit, in welcher der Comet aus P in μ gekommen = 42ᵀ. 18ˢᵗ. 43', so findet man vermittelst der Halleyschen Tafel, oder auch durch unmittelbare Berechnung den Winkel

$PS\mu = 144^\circ.\ 19'$

Nun ist $PS☊ = 29.\ 56$

demnach $☊S\mu = 114.\ 23$

oder

$\pi S\mu = 65^\circ.\ 37'$

§. 121.

Ferner ist der Ort der Sonne $Sq =$ ♏. $27^\circ.43'$
und der Ort des ☊ - - - $S☊ =$ ♍. $25.\ 42$
demnach der Winkel $☊Sq = TSp = 62.\ 1$

§. 122.

Nun ist

$2\ \log.\cos.\frac{1}{2}PS\mu = 0{,}9725423-2$	
$\log.\ SP = 0{,}0659530-1$	
(§.67.) $\log.S\mu = 0{,}0934107$ -	- - - $= 0{,}0934107$
$\log.\cos.\mu S\pi = 0{,}6157812-1$	$l.\sin.\mu S\pi = 0{,}9594248-1$
$\log.\ S\pi = 0{,}7091919-1$	$\log.\pi\mu = 0{,}0528355$

§. 123.

Ferner

$\log.\pi\mu = 0{,}0528355$ -	- - - $= 0{,}0528355$
$\log.\cos.\text{inclin.} = 0{,}8746795-1$	$l.\sin.\text{incl.} = 0{,}8209788-1$
$\log.\pi\gamma = 0{,}9275150-1$	$\log.\gamma k = 0{,}8738143-1$
$\log.\ S\pi = 0{,}7091919-1$	
$\log.\text{tang}.\gamma S\pi = 0{,}2183231$	

dem-

demnach $\gamma S\pi = 58^\circ.50'$

Da nun auch $TS\pi = 62.\ 1$

so ist $TS\gamma = 120.\ 51$

$\gamma Sq = 59.\ 9$

§. 124.

Ferner haben wir

$\log.\ S\pi = 0{,}7091919-1$	
$\log.\cos.\ \gamma S\pi = 0{,}7139349-1$	
$\log.\ S\gamma = 0{,}9952570-1$	- - - $= 0{,}9952570-1$
$\log.\cos.\ \gamma Sq = 0{,}7099415-1$	$l.\sin.\gamma Sq = 0{,}9337467-1$
$l.\ Sq = 0{,}7051985-1$	$\log.\gamma q = 0{,}9290037-1$

folglich $Sq = 0{,}5072$

Nun ist $ST = 0{,}9871$

demnach $Tq = 1{,}4943$

§. 125.

Ferner

$\log.\ Tq = 0{,}1744378$

$\log.\ \gamma q = 0{,}9290037 - 1$

$\log.\text{tang}.\ qT\gamma = 0{,}7545659 - 1$

$qT\gamma = 29^\circ.43'$

Nun war $Sq =$ ♏. $27.\ 43$
demnach $Tq =$ ♐ $27.\ 20$ die berechnete scheinbare Länge.
Es war aber ♐ $25.\ 35$ die beobachtete.
Unterschied $= 1.\ 45$

Der Comet blieb demnach um $1^\circ.\ 45'$ zurücke. Es kann aber ein Theil dieses Unterschiedes gar

T 2 wohl

wohl daher rühren, daß der Abstand der Sonnennähe, der ohnehin sehr geringe ist, um etwas größer hätte genommen werden sollen, wenn in der Rechnung jede Kleinigkeiten wären mitgenommen worden.

§. 126.

Endlich ist auch

$$\log. Tq = 0{,}1744378$$
$$\log.\text{cos}.\, qT\gamma = 0{,}9391953 - 1$$
$$\log. T\gamma = 0{,}2352425$$
$$\log. \gamma k = 0{,}8738143 - 1$$
$$\log.\text{ tang}.\, kT\gamma = 0{,}6385718 - 1$$
$$kT\gamma = 23°.\ 31' \text{ die berechnete Breite,}$$
$$23.\ 11 \text{ die beobachtete,}$$
$$\text{Unterschied} = 0.\ 20$$

Dieser Unterschied rührt ebenfalls daher, daß die Neigung der Bahn, so wie auch der Abstand des Cometen von der Sonne bey der elliptischen Bahn in etwas verschieden ausfällt.

§. 127.

Die elliptische Bewegung ist bey gleichem Abstande von der Sonne langsamer, als die parabolische. Der Comet hat demnach vom 14ten Aug. bis zum 15ten Sept. einen Bogen durchlaufen, der etwas kürzer als der Bogen gl ist. Dadurch aber liegt der Punct q näher bey A, und der Punct t näher bey C, als er in der Figur für die parabolische Bahn gezeichnet ist. Die Con-

Fig. 7.

Construction zeigt ferner, daß sich q stärker als t nähert. Dadurch wird die Knotenlinie S☊ näher gegen SB, die Sonnennähe π von S weiter hinaus, und die Axe SA von SB weiter hinweg gerückt, auch wird die Neigung der Bahn kleiner. Alles dieses läßt sich überhaupt schließen, wenn man z. E. setzt, der Punct q falle in α. Denn alsdenn fällt t in 6, und wenn man sodann für diese Puncte die Construction vornimmt, so ergiebt sich, wiefern die Bahn verschieden ausfällt. Indessen ist der Unterschied lange nicht so groß, als er bey dieser Voraussetzung gefunden wird. Denn, wenn die periodische Zeit des Cometen über 100 Jahre ist, so ist α6 um weniger als um $\frac{1}{50}$ Theil kleiner als qt anzunehmen, und bey einer längern Periode wird der Unterschied noch geringer.

X. Einige Betrachtungen über die parabolische Bahn.

§. 128.

So einfach der Lauf eines Cometen in einer parabolischen Bahn ist, so hat man dennoch bisher keine Methode, denselben ohne vorläufiges Versuchen zu bestimmen, und wenn es hoch kömmt, so fängt man mit einem quam proxime an, und holt sodann das übrige nach. Dieses ist auch der Weg, den ich in beyden vorhergehenden Abschnitten genommen. Er ist indessen ungleich kürzer als derjenige, den la

 Caille

Caille und Lalande vorschlagen. Bey diesem muß man unzählige Versuche vornehmen, um nur einer einigen Bedingung Genüge zu leisten, und dann kommen erst noch unzählige Versuche vor, bis auch der andern Bedingung Genüge geschieht. Zuletzt wird alles dennoch nur durch Einschaltungen und Näherungen erhalten.

§. 129.

Ungeachtet ich es nun bey der hier gebrauchten Construction und Berechnungsart kann bewenden lassen, so werde ich doch noch zeigen, daß sich in der That die ganze Sache auf drey Gleichungen bringen läßt. Diese Gleichungen sind zwar ziemlich verwickelt, indessen werde ich sie dennoch angeben, theils weil man bisher noch gar keine gefunden, theils auch, weil sich Näherungsarten daraus herleiten lassen, von denen man den Grad der Zuverläßigkeit bestimmen kann.

§. 130.

Fig. 10. Es sey die Sonne in S, und zur Zeit der drey Beobachtungen sey die Erde in A, a, α, der Comet in C, c, γ. Die Linien cB, cb, $\gamma\mathfrak{b}$ stellen die Höhe des Cometen über der Fläche der Erdbahn vor. Nun sind gegeben

1. Die Lage und Länge der Linien SA, Sa, Sα, und daraus findet man
   1) Die Chorden Aa, Aα, aα.
   2) Die Winkel SAa, SaA; SAα, SαA; Saα, Sαa.
2. Die Lage der Linien AB, ab, $\alpha\mathfrak{b}$, oder die beobachtete Länge des Cometen, und daraus ergeben sich
   1) Die Winkel BAS, baS, $\mathfrak{b}\alpha$S, oder der Unterschied der Länge der Sonne und des Cometen.
   2) Die Winkel BAa, BAα; baA, baα; $\mathfrak{b}\alpha$A, $\mathfrak{b}\alpha$a.
3. Die Winkel CAB, cab, $\gamma\alpha\mathfrak{b}$, oder die beobachtete Breite des Cometen.
4. Aus No. 2. 3 können auch die Winkel CAS, caS, $\gamma\alpha$S oder, der scheinbare Abstand des Cometen von der Sonne berechnet, und demnach als gegeben angenommen werden.

§. 131.

Nun kömmt die Rechnung auf die Distanzen SC, Sc, Sγ, und die Chorden Cc, Cγ, cγ, an (§. 63.). Man nenne zu beyden Absichten

$$AC = x \qquad SA = A$$
$$ac = y \qquad Sa = a$$
$$\alpha\gamma = z \qquad S\alpha = \alpha$$

und die Winkel

$$CAS = C$$
$$caS = c$$
$$\gamma a S = \gamma$$

so findet man erstlich die Distanzen

$$SC = \sqrt{}(xx + AA - 2Ax \cos C)$$
$$Sc = \sqrt{}(yy + aa - 2ay \cos c)$$
$$S\gamma = \sqrt{}(zz + \alpha\alpha - 2\alpha z \cos\gamma)$$

T 4 §. 132.

§. 132.

Ferner setze man die Seiten oder Chorden

$$Aa = K$$
$$A\alpha = k$$
$$a\alpha = \varkappa$$

und die Winkel (die wir sämtlich als spitze ansehen)

$$aAB = B \qquad Aab = b \qquad A\alpha\beta = \beta$$
$$\alpha AB = B' \qquad \alpha ab = b' \qquad a\alpha\beta = \beta'$$

und die Breiten (die wir sämtlich nördlich setzen)

$$CAB = L \qquad cab = l \qquad \gamma\alpha\beta = \lambda$$

so ist erstlich

$$CB = x .\sin. L \qquad cb = y .\sin. l \qquad \gamma\beta = z \sin. \lambda$$
$$AB = x .\cos. L \qquad ab = y .\cos. l \qquad \alpha\beta = z \cos. \lambda$$

§. 133.

Dieses ist, was sich für jede Beobachtung für sich finden läßt. Da nun aber die Chorden Cc, Cγ, cγ sollen gefunden werden, so müßen die Beobachtungen, je zwo und zwo, verglichen werden, und da haben wir erstlich die Unterschiede

$$(CB - cb) = x \sin. L - y \sin. l$$
$$(CB - \gamma\beta) = x \sin. L - z \sin. \lambda$$
$$(cb - \gamma\beta) = y \sin. l - z \sin. \lambda$$

Von diesen werden wir die Quadrate gebrauchen.

§. 134.

Sodann verstehe man, daß in D, d, E, e, F, f rechte Winkel seyn, so ist

BD

$BD = x \cos. L . \sin. B$	$BE = x \cos. L . \sin. B'$	$bF = y \cos. l . \sin. b'$
$bd = y \cos. l . \sin. b$	$\beta e = z \cos. \lambda . \sin. \beta$	$\beta f = z \cos. \lambda . \sin. \beta'$

und demnach die Unterschiede

$$BD - bd = x \cos. L . \sin. B - y \cos. l . \sin. b$$
$$BE - \beta e = x \cos. L . \sin. B' - z \cos. \lambda . \sin. \beta$$
$$bF - \beta f = y \cos. l . \sin. b' - z \cos. \lambda . \sin. \beta'$$

Auch von diesen Unterschieden werden wir die Quadrate gebrauchen.

§. 135.

Endlich ist

$AD = x . \cos. L . \cos. B$	$AE = x . \cos. L . \cos. B'$	$aF = y . \cos. l . \cos. b'$
$ad = y . \cos. l . \cos. b$	$\alpha e = z . \cos. \lambda . \cos. \beta$	$\alpha F = z . \cos. \lambda . \cos. \beta'$

und daraus folgt

$$Dd = K - x \cos. L . \cos. B - y . \cos. l . \cos. b$$
$$Ee = k - x \cos. L . \cos. B' - z . \cos. \lambda . \cos. \beta$$
$$Ff = \varkappa - y \cos. l . \cos. b' - z . \cos. \lambda . \cos. \beta'$$

Auch hievon werden nun die Quadrate gebraucht werden.

§. 136.

Es sind nemlich die Quadrate der Chorden

$$Cc^2 = (CB - cb)^2 + (BD - bd)^2 + Dd^2$$
$$C\gamma^2 = (CB - \gamma\beta)^2 + (BE - \beta e)^2 + Ee^2$$
$$c\gamma^2 = (cb - \gamma\beta)^2 + (bF - \beta f)^2 + Ff^2$$

§. 137.

Werden demnach die gefundenen Werthe hierinn gesetzt, so erhält man nach behörigen Reductionen die Chorden

 Cc

$$Cc = \sqrt{[x^2 + y^2 - 2xy(\sin.L.\sin.l. + \cos.L\cos.l.\cos.(B+b)) - 2Kx.\cos.L.\cos.B - 2Ky.\cos.l.\cos.b + K^2]}$$

$$C\gamma = \sqrt{[x^2 + z^2 - 2xz(\text{f}.L.\text{f}.\lambda + \cos.L.\cos.\lambda.\cos.(B'+\beta)) - 2kx\cos.L.\cos.B' - 2kz.\cos.\lambda.\cos.\beta + k^2]}$$

$$c\gamma = \sqrt{[y^2 + z^2 - 2yz(\text{f}.l.\text{f}.\lambda + \cos.l.\cos.\lambda.\cos.(b'+\beta')) - 2\varkappa y.\cos.l.\cos.b' - 2\varkappa z.\cos.\lambda.\cos.\beta' + \varkappa^2]}$$

In diesen Formeln sind die Coefficienten, womit xy, xz, yz multiplicirt sind, Cosinus der Seiten von sphärischen Triangeln, in welchen der gegenüberstehende Winkel nebst den zwo übrigen Seiten gegeben sind. Es könnte auch gezeigt werden, wie sich diese sphärische Triangel in der Figur bilden. Man gewinnt aber weiter keine Abkürzung dabey, da diese Coefficienten, so wie sie hier sind, eben so leicht in Zahlen berechnet werden.

§. 138.

Es seyn nun für die Bögen

Cc	die Zeiten	T
$C\gamma$	- - - - -	t
$c\gamma$	- - - - -	τ

so ist (§. 63.)

$$12\,mT = (SC + Sc + Cc)^{3:2} - (SC + Sc - Cc)^{3:2},$$

$$12\,mt = (SC + S\gamma + C\gamma)^{3:2} - (SC + S\gamma - C\gamma)^{3:2}$$

$$12\,m\tau = (Sc + S\gamma + c\gamma)^{3:2} - (Sc + S\gamma - c\gamma)^{3:2}$$

Man darf demnach nur in diesen Formeln die (§. 131. 137.) gefundene Werthe setzen, um für x, y, z drey Gleichungen zu erhalten, wodurch diese Distanzen bestimmt werden.

§. 139.

Ungeachtet nun, um x, y, z zu bestimmen, drey Gleichungen genug sind, so läßt sich bey der Parabel noch überdies eine vierte finden, und diese beruht darauf, daß die Linien SC, Sc, $S\gamma$ in ein und eben derselben Fläche liegen, demnach die Winkel

$$CSc + cS\gamma = CS\gamma$$

seyn müssen. Dadurch wird von den sechs Linien SC, Sc, $S\gamma$, Cc, $C\gamma$, $c\gamma$ eine durch die übrigen an sich schon bestimmt. Es wird aber auch diese Gleichung, so wie die drey vorhin gefundenen, so weitläuftig, daß sie schwerlich jemals werden aufgelöst werden, ungeachtet man dadurch, daß man eine Gleichung mehr hat als nöthig ist, voraussehen kann, daß sich die ganze Rechnung endlich auf drey Gleichungen vom ersten Grade herunterbringen läßt.

§. 140.

Will man sich aber begnügen, die Werthe von x, y, z durch Näherung zu finden, so kann man vermittelst der oben (VIII.) beschriebenen Construction anfangen, diese Werthe, so genau es angeht, zu suchen, und sodann

$$x = X + \xi$$

$$y = Y + \upsilon$$

$$z = Z + \zeta$$

zu

zu setzen. Man sieht aber auch leicht voraus, daß dieses Verfahren mit dem oben (IX.) umständlich angegebenen zuletzt auf eines hinausläuft, weil die drey Gleichungen (§. 138.) dabey ebenfalls sind gebraucht worden. Der Unterschied ist nur, daß man hier die 6 Formeln (131. 137.) genau berechnen kann, ehe man nöthig hat, für x, y, z die Werthe $X+\xi$, $Y+\upsilon$, $Z+\zeta$ zu setzen, und daß man sodann auch leichter sehen kann, ob man von ξ, υ, ζ nur die erste Dignität oder auch noch die zweyte beybehalten will, um dem wahren Werthe von x, y, z desto geschwinder näher zu kommen.

§. 141.

Um auch hievon ein Beyspiel zu geben, so habe ich drey Beobachtungen des Cometen nach seiner Rückkehr, nemlich die vom 25ten Oct. 2ten Nov. und 19ten Nov. 1769 zum Grunde gelegt, und den Abstand des Cometen durch eine vorläufige Zeichnung in sofern bestimmt, daß ich sicher war, sie werde zur Zeit dieser drey Beobachtungen von 1,35; 1,5 und 1,9 nicht merklich, allenfalls höchstens um $\frac{1}{100}$ des Halbmessers der Erdbahn verschieden seyn. Die Rechnung zu genauerer Bestimmung findet sich auf beyliegendem Blatt, und es erhellet daraus, daß

$$AC = 1,35586$$
$$ac = 1,50985$$
$$\alpha\gamma = 1,89127$$

genommen werden muß, wobey aber die 5te Decimalstelle nicht sehr zuverläßig ist, weil ich Kurze halber die Rechnung nicht schärfer gemacht, und es bey den ersten Dimensionen von x, y, z habe bewenden lassen.

§. 142.

Aus der Rechnung folgt nun ferner

$$SC = 0,64117 = b$$
$$S\gamma = 1,23125 = a$$
$$C\gamma = 0,63145 = k$$

und hieraus (§. 66.) der Abstand des Perihelii

$$f = 0,11519$$

welcher von dem oben (§. 110.) aus den ersten Beobachtungen gefundenen f = 0, 11640 nur um 0,00121 verschieden ist.

§. 143.

Aus

$$a = 1,23125$$
$$f = 0,11640$$

findet sich ferner nach (§. 68.) die Zeit von der Sonnennähe bis zur letzten Beobachtung

$$\tau = 42^{T}.\ 7^{St}.\ 34'$$

welche von

	Oct.	50.	6	. 1
abgezogen	Oct.	7.	22	. 27

übrig läßt. Und dieses wäre demnach die Zeit, da der Comet, den drey hier zum Grunde gelegten Beobachtungen zufolge, der Sonne am näch-

Zur Berechnung der Bahn des Cometen von 1769.

Fig. 10.

Obſerv. I.	Obſerv. II.	Obſerv. III.
1769. Oct. 25. 6. 14	1769. Oct. 33. 6. 4	1769. Oct. 50. 6. 1
Longit. ☉ 7^s. 2°. 36′ - - - - AS ♁ 4. 27. 24. - - - - SA Cometae 7. 22. 10 - - - - AB	Long. ☉ 7^s. 10°. 36′ - - - - - - aS ♁ 4. 19. 24. - - - - - - Sa Cometae 8. 5. 14 - - - - - - ab	Long. ☉ 7^s. 27°. 45′ - - - - - αS ♁ 4. 2. 15 - - - - - Sα Cometae 8. 25. 35 - - - - - αϐ
Latit. Com. + 17. 59 - - - - CAB Elong. a ☉ - - - 19. 34 - - - - BAS CAS = 26. 20	Latit. Com. + 20. 52 - - - - - - cab Elong. a ☉ - - - 24. 38 - - - - - - baS caS = 31. 52	Latit. com. + 23. 11 - - - - - γαϐ Elong. a ☉ - - 27. 50 - - - - - ϐαS γαS = 35. 37
AS = 0,9930 AC = 1,3500 + x	aS = 0, 9910 ac = 1, 5000 + y	αS = 0, 9872 αγ = 1, 9000 + z
AS^2 = - - - - 0,98605 AC^2 = - - - - 1,82250 + 2,7000 x — 2 AS. AC. coſ. CAS = 2, 40286 + 1, 7799 x	aS^2 = 0, 98208 ac^2 = 2, 25000 + 3, 0000 y — 2ac. aS. coſ. caS = 2, 52519 + 1, 6835 y	$αS^2$ = 0, 97456 $αγ^2$ = 3, 61000 + 3, 8000 z — 2aγ. αS. coſ. γαS = — 3, 04949 + 1, 6050 z
SC = 0, 63694 + 0, 7223 x	Sc = 0, 84077 + 0, 7830 y	Sγ = 1, 23898 + 0, 8858 z
CB = 0, 41680 + 0, 3087 x AB = 1, 28405 + 0, 9511 x	cb = 0, 53428 + 0, 3562 y ab = 1, 40161 + 0, 9344 y	γϐ = 0, 74797 + 0, 3937 z αϐ = 1, 74657 + 0, 9192 z

Obſerv. I. II.	Obſerv. II. III.	Obſerv. I. III.
ASa = 8°. 0′	aSα = 17°. 9′	ASα = 25°. 9′
aAS = 85. $10\frac{4}{9}$ AaS = 86. $49\frac{5}{9}$ Aa = 0, 13841	αaS = 80. $41\frac{7}{10}$ aαS = 82. $9\frac{3}{10}$ aα = 0, 29498	αAS = 76. $40\frac{1}{3}$ AαS = 78. $10\frac{2}{3}$ Aα = 0, 43119
aAB = 104. $41\frac{4}{9}$ AaB = 62. $11\frac{5}{9}$	αab = 105. $19\frac{7}{10}$ aαϐ = 54. $19\frac{3}{10}$	αAB = 96. $14\frac{1}{3}$ Aαϐ = 50. $20\frac{2}{3}$
BD = 1, 24179 + 0, 9198 x bd = 1, 23974 + 0, 8265 y AD = 0, 32671 + 0, 2420 x ad = 0, 65389 + 0, 4359 y	bF = 1, 35175 + 0, 9012 y ϐf = 1, 41874 + 0, 7467 z aF = 0, 37051 + 0, 2470 y αf = 1, 01865 + 0, 5361 z	BE = 1, 27645 + 0, 9455 x ϐe = 1, 34453 — 0, 7076 z AE = 0, 13955 + 0, 1034 x αe = 1, 11461 + 0, 5866 z
— bd + BD = 0, 00205 + 0, 9198 x — 0, 8265 y Dd = 0, 18877 — 0, 2420 x + 0, 4359 y cb — CB = 0, 11748 — 0, 3087 x + 0, 3562 y	ϐf — BF = 0, 06699 — 0, 9012 y + 0, 7467 z Ff = 0, 35316 — 0, 2470 y + 0, 5361 z γϐ — cb = 0, 21369 — 0, 3562 y + 0, 3937 z	ϐe — BE = 0, 06808 — 0, 9455 x + 0, 7076 z Ee = 0, 54387 — 0, 1034 x + 0, 5866 z γϐ — CB = 0, 33117 — 0, 3087 x + 0, 3937 z
$(BD - bd)^2$ = 0, 00000 + 0, 0038 x — 0, 0034 y Dd^2 = 0, 03564 — 0, 0914 x + 0, 1646 y $(cb - CB)^2$ = 0, 01380 — 0, 0725 x + 0, 0837 y	$(ϐf - BF)^2$ = 0, 00449 — 0, 1208 y + 0, 1011 z Ff^2 = 0, 12472 — 0, 1744 y + 0, 3787 z $(γϐ - cb)^2$ = 0, 04566 — 0, 1525 y + 0, 1682 z	$(ϐe - BE)^2$ = 0, 00449 — 0, 1287 x + 0, 0964 z Ee^2 = 0, 29579 — 0, 1125 x + 0, 6380 z $(γϐ - CB)^2$ = 0, 10967 — 0, 2045 x + 0, 2608 z
Summa = Cc^2 = 0, 04944 — 0, 1601 x + 0, 2449 y	$Cγ^2$ = 0, 17487 — 0, 4477 y + 0, 6470 z	$cγ^2$ = 0, 40995 — 0, 4457 x + 0, 9952 z
Cc = 0, 22235 — 0, 3825 x + 0, 5507 y Sc + SC = 1, 47771 + 0, 7223 x + 0, 7830 y	Cγ = 0, 41818 — 0, 5356 y + 0, 7736 z Sc + Sγ = 2, 07975 + 0, 7830 y + 0, 8858 z	cγ = 0, 64027 — 0, 3481 x + 0, 7772 z SC + Sγ = 1, 87592 + 0, 7223 x + 0, 8858 z
SC + Sc + Cc = 1, 70006 + 0, 3398 x + 1, 3337 y SC + Sc — Cc = 1, 25536 + 1, 1048 x + 0, 2323 y	Sc + Sγ + Cγ = 2, 49793 + 0, 2474 y + 1, 6594 z Sc + Sγ — Cγ = 1, 66157 + 1, 3186 y + 0, 1122 z	SC + Sγ + Cγ = 2, 51619 + 0, 3742 x + 1, 6630 z SC + Sγ — Cγ = 1, 23565 + 1, 0704 x + 0, 1086 z
$(SC + Sc + Cc)^{3:2}$ = 2, 21666 + 0, 6646 x + 2, 6082 y $(SC + Sc - Cc)^{3:2}$ = 1, 40654 + 1, 8568 x + 0, 3904 y	$(Sc + Sγ + Cγ)^{3:2}$ = 3, 94789 + 0, 5865 y + 3, 9225 z $(Sc + Sγ - Cγ)^{3:2}$ = 2, 14179 + 2, 5495 y + 0, 2170 z	$(SC + Sγ + Cγ)^{3:2}$ = 3, 99115 + 0, 8903 x + 3, 9569 z $(SC + Sγ - Cγ)^{3:2}$ = 1, 37355 + 1, 7848 x + 0, 1810 z
12mT { = 0, 81012 — 1, 1922 x + 2, 2178 y = 0, 82499 (§. 63.)	12mt { = 1, 80610 — 1, 9630 y + 3, 7055 z = 1, 75440 (§. 63.)	12mτ { = 2, 61760 — 0, 8945 x + 3, 7759 z = 2, 57939 (§. 63.)
o = — 0, 01487 — 1, 1922 x + 2, 2178 y	o = + 0, 05170 — 1, 9630 y + 3, 7055 z	o = + 0, 03821 — 0, 8945 x + 3, 7759 z
x = + 0, 00586	y = + 0, 00985	z = — 0, 00875

nächsten gewesen. Wir haben aber oben (§. 111.) diese Zeit

Oct. 7. 11. 17

gefunden, und so ist der Unterschied

0. 11. 10

etwas über 11 Stunden.

§. 144.

Dieser Unterschied muß wenigstens größtentheils auf Rechnung der zum Grunde gelegten parabolischen Bahn gesetzt werden. Denn in der parabolischen Bahn ist die Zeit zwischen der Sonnennähe und jeder Beobachtung kürzer als in der elliptischen, und eben daher mußte nothwendig bey der ersten Rechnung (§. 111.) die Zeit der Sonnennähe **früher**, bey der letztern Rechnung (§. 143.) **später** gefunden werden.

§. 145.

Wären nun die Beobachtungen, so bey der erstern Rechnung zum Grunde liegen, von der Zeit der Sonnennähe eben so entfernt, als die bey der letzten Rechnung zum Grunde gelegten; so könnte der gefundene Unterschied zwischen beyden Zeiten der Sonnennähe halbirt werden, und so würde die Zeit der wahren elliptischen Sonnennähe auf den

Oct. 7. 16. 52

fallen, und die von der in beyden Rechnungen zum Grunde liegenden **parabolischen** Bahn, herrührende Fehler würden sich nett aufheben. Es

Es sind aber die erstern Beobachtungen von der Sonnennähe etwas weiter als die letztern entfernt, und so kann man überhaupt schließen, daß die wahre Sonnennähe von

Oct. 7. 11. 17

etwas mehr als von

Oct. 7. 22. 27

entfernt seyn müsse. Nach einem beyläufigen Ueberschlag dürfte sie auf

Oct. 7. 18$^{\text{st}}$.

zu setzen, und wenigstens davon nicht viel verschieden seyn. Doch werde ich die Rechnung hier nicht weiter verfolgen, weil sich ohnehin aus so geringen Unterschieden auf die wahre elliptische Laufbahn nicht viel schließen läßt. Das aber folgt bereits aus beyden Rechnungen, daß die Bahn des Cometen in der That **elliptisch**, und nicht etwan **hyperbolisch** ist. Denn bey der hyperbolischen Bahn würde die Zeit der Sonnennähe nach der ersten Rechnung **später**, nach der zweyten aber **früher** gefunden worden seyn.

X. Ueber den Cometen von 1770.

§. 146.

Bisher hatte ich dieses geschrieben, als sich kaum etliche Wochen nachher im Brachmonat 1770 ein anderer Comet sehen ließ, welcher wegen seiner sehr beträchtlichen Geschwindigkeit mit unter die merkwürdigeren Cometen gehört.

gehört. Er hatte keinen Schweif, und dieses machte auch, daß Hr. **Meßier**, der ihn bereits den 14ten Brachmonat Abends um 11 Uhr mit einem Dunstkreise von 6 Minuten erblickte, wegen seiner damals noch sehr langsamen scheinbaren Bewegung, ihn noch schwerlich von einem neblichten Stern unterscheiden konnte. Indessen wurde seine Bewegung von Tage zu Tage merklicher, und nahm endlich dergestalt zu, daß, da der Comet vom 15ten bis zum 28ten Brachmonat, und daher in 13 Tagen nur das Sobieskische Schild von Mittag nach Norden durchlaufen, er den 2ten Heumonat Abends bereits unter dem Bauche des Camelopards zu sehen war. Seine gröste Geschwindigkeit hatte er den 1 Heumonat, und sie betrug an 44 Grade eines grösten Circuls der Sphäre; so daß sie die Geschwindigkeit des Cometen von 1472 übertraf, weil dieser nach **Walthers** und **Regiomontans** Bericht nur 40 Grade in einem Tage durchlaufen.

§. 147.

Diese so schnelle Bewegung zeigte nicht nur, daß der Comet sehr nahe bey der Erde müsse vorbeygegangen seyn, sondern es waren auch Beobachtungen von wenigen Tagen hinreichend, die Bahn des Cometen wenigstens so zu bestimmen, daß sich die fernere Erscheinung des Cometen voraussehen ließe. Ich sahe denselben das erstemal den 28ten Brachmonat, und die Witterung war günstig genug, daß ich ihn bis auf

auf den 2ten Heumonat jeden Abend beobachten konnte. Ich stellte mehrerer Bequemlichkeit halber die Beobachtungen zu Hause an, wo ich gegen Mittag fast den ganzen Himmel, gegen Mitternacht einen beträchtlichen Theil desselben zum Fenster hinaus sehen konnte. Den Abstand des Cometen von Sternen maß ich mit dem oben (§. 25.) beschriebenen **Ausmesser**, und die Zeit nach einer nach der Sonne gerichteten Taschenuhr. Dieses war für meine eigene Wißbegierde, eben so wie 1769, immer genug. Ich merke es hier an, damit man die Beobachtungen nicht für genauer ansehe, als sie wirklich sind. Es hat übrigens der Erfolg gezeigt, daß ich meine minder genau und minder mühsam angestellte Beobachtungen besser genutzt habe, als einige andere, die sich ungleich mehr Mühe gegeben haben.

§. 148.

Die Beobachtungen, oder vielmehr die aus denselben durch Construction gefundene Längen und Breiten des Cometen während erstbemeldten 5 Tagen sind nun folgende:

1770. Jun.	28.10.35	♑ 6°. 34′	26°. 52′	Latit. bor.
	29.10.20	♑ 9. 32	37. 56	—
	30.11.20	♑ 19. 18	59. 9	—
Jul.	1.12.15	♉ 26. 38	72. 0	—
	2.11.30	♊ 22. 4	41. 13	—

§. 149.

Hieraus findet sich nun, daß der Comet der Ordnung nach

in 23St. 45′ - - - 11°. 21′
25 . 0 - - - 22 . 8
24 . 55 - - - 43 . 53
23 . 15 - - - 33 . 13

demnach zusammen in 4^{T}. 0St. 55′ einen Bogen von 110°. 35′ durchlaufen.

§. 150.

Daß er während dieser Zeit der Erde sehr nahe müsse gewesen seyn, folgt aus dieser so schnellen Bewegung an sich schon. Es war daher um desto möglicher, seine Annäherung gegen die Erde nach Angabe des §. 53. 54. gleich nach der dritten Beobachtung zu bestimmen, so weit es nemlich nöthig war, überhaupt, voraus zu sehen, daß der Comet den ersten Heumonat Abends gegen 6 Uhr der Erde am nächsten seyn, die scheinbare Geschwindigkeit bis dahin zunehmen, von da an aber wieder abnehmen würde.
Fig. 11. Die 11te Figur stellt diese relative Bewegung des Cometen A, B, C, D, E gegen die als ruhend betrachtete Erde T vor. Die Winkel ATB, BTC, CTD, DTE sind den beobachteten (§. 149.) gleich, die Linien AB, BC, CD, DE den Zeiten (§. cit.) proportional gemacht, so viel es nemlich die gedoppelte Voraussetzung der gleichförmigen und geradlinichten Bewegung des Co-

Cometen und der Erde zuließ, wiewohl übrigens der Unterschied nicht sehr merklich ist. Es stellen daher die Linien TA, TB, TC, TD, TE die Distanzen des Cometen von der Erde noch ziemlich genau nach ihrer wahren Verhältniß vor. Ich gebrauchte auch diese Verhältnisse wirklich, um die wahre Bahn des Cometen beyläufig zu bestimmen, sofern sie aus diesen nur um 4 Tage von einander entfernten Beobachtungen geschlossen werden konnte. Dieses gieng nun um desto leichter an, weil der Abstand des Cometen von der Sonne leicht zu bestimmen war. Denn aus den Beobachtungen folgt unmittelbar, daß derselbe den 1ten Heumonat Nachmittag in einer Entfernung von etwan 10 Graden neben dem Pol der Ecclíptic nach Norden der Sonne entgegen gegangen, und eben dadurch, daß er den Pol paßirte, innerhalb der Erdbahn zu laufen angefangen. Und dieses folgt desto nothwendiger, je kleiner sein Abstand von der Erde an bemeldetem Tage war. Da es nun eine Eigenschaft jeder parabolischen Laufbahn ist, daß der Comet, wenn er von der Sonne so weit als die Erde oder ein anderer Planet absteht, eine Geschwindigkeit hat, die sich zur Geschwindigkeit der Erde oder des Planeten wie $\sqrt{2}$ zu 1 verhält, so konnte auch dieser Umstand zur Bestimmung der Bahn des Cometen gebraucht werden. Ich werde nun in einer kleineren Figur zeigen, was ich zu dieser Absicht in einer grösseren gethan.

§. 151.

Fig. 12. Ich zeichnete einen Maßstab D, worauf $\frac{1}{1000}$ Theil des mittleren Abstandes der Erde von der Sonne abzunehmen waren. Sodann setzte ich zur Zeit der mittleren vorhin (§. 148.) angeführten Beobachtungen, den Ort der Erde in a, und zog die Linie aR, welche verlängert gegen die Sonne geht. Der Abstand der Erde von der Sonne war damals = 1,0169 und übertraf folglich den mittleren Abstand um 0,0169 = aM. Ferner zog ich durch M mit dem Halbmesser = 1 einen Circulbogen, welcher auf beyden Seiten von M in Grade getheilt ist, und eben so auch das Stück der Erdbahn A a α. Nun war die tägliche Bewegung der Erde damals = 0,01654, und damit ließ sich die Scale E zeichnen, welche den von der Erde täglich und stündlich durchlaufenen Weg vorstellt. Von dieser Scale konnte ich nun die Distanzen a A, a α abtragen, um den Ort der Erde A zur Zeit der ersten, α zur Zeit der letzten ersterwähnter Beobachtungen zu bestimmen.

§. 152.

Hierauf konnten aus der gegebenen Länge des Cometen, und dem gegebenen Ort der Sonne zur Zeit der mittleren Beobachtung, welcher ♋. 9°. 0′ 20″ war, die Linien AB, ab, αβ, welche die geocentrische Länge des Cometen vorstellen, leicht gezogen werden. Endlich machte ich noch die Winkel BAL, βαλ, der Breite

Breite des Cometen zur Zeit der ersten und letzten Beobachtung gleich.

§. 153.

Wenn nun des Cometen Abstand von der Sonne = 1 ist, so ist seine Geschwindigkeit, oder tägliche Bewegung = 0,0243284. Man sieht aber aus der bisher gezeichneten Figur, daß der Comet nothwendig aus der Linie a b in die Linie αβ kommen, demnach, seiner auf die Ecliptic proiicirten Bewegung nach, den Bogen der Erdbahn a α, zwischen der mittleren und letzten Beobachtung durchschneiden mußte, demnach diese vier Tage über nicht viel weiter als die Erde von der Sonne konnte entfernt gewesen seyn. Ich habe mich demnach der Geschwindigkeit = 0,0243284 anfangs bedient, um die Bahn des Cometen wenigstens beynahe zu bestimmen, und konnte mir dabey immer vorbehalten, das etwan noch fehlende nachzuholen, wenn je die Sache selbst eine grössere Genauigkeit erfordern oder zulassen würde. Dieser Geschwindigkeit gemäß ist demnach die Scale F in Tage und Stunden getheilt. Der Gebrauch war nun folgender.

§. 154.

Ich nahm auf der Linie A L einen beliebigen Punct L an, und so stellte A L den angenommenen Abstand des Cometen von der Erde zur Zeit der ersten Beobachtung vor. Da nun dieser Abstand sich zum Abstand bey der letzten Beobach-

Beobachtung wie TA zu TE (Fig. 11.) verhielt; so konnte dadurch der Abstand $\alpha\lambda$ gefunden werden, welcher zu dem angenommenen AL ein sehr genaues Verhältniß hat (§. 150.), und demnach der wahre Abstand ist, wenn AL es ebenfalls ist.

§. 155.

Um aber dieses zu untersuchen, so zog ich LB auf AB, und $\lambda\beta$ auf $\alpha\beta$ senkrecht. Dadurch erhielt ich die auf die Ecliptic proiicirte Oerter des Cometen B, β, und die proiicirte Chorde Bβ. Da nun LB, $\lambda\beta$ die Erhöhung des Cometen über die Ecliptic vorstellt, so zog ich $\gamma\beta = \lambda\beta$ und CB = LB auf Bβ senkrecht, und erhielt dadurch Cγ. Diese Linie soll nun die Chorde des vom Cometen von der ersten bis zur letzten Beobachtung durchlaufenen Bogens seyn, und demnach die Länge haben, welche auf der Scale F 4 Tage, 0 St., 55 M. beträgt. Hat sie diese Länge, so bedarf es keines fernern Versuchens. Widrigenfalls wird der Unterschied notirt, und der Versuch wird mit einer kleineren Distanz AL wiederholt, wenn die Chorde Cγ zu groß gefunden worden, oder mit einer grösseren, wenn das Gegentheil sich ereignet hat.

§. 156.

Aus der auf diese Art vorgenommenen Construction erhellte nun, daß die auf die Ecliptic proiicirte Bahn des Cometen die Erdbahn in G unter einem Winkel bGa durchschnitten, und da dieser Winkel über 45 Gr. ist, die Sonnennähe des Cometen zwar innerhalb der Erdbahn, aber nicht sehr nahe bey der Sonne seyn müsse. Es erhellte ferner, daß der Comet noch nicht in seiner Sonnennähe gewesen, sondern erst gegen dieselbe anrückte. Endlich erhellte auch, daß da BC > $\beta\gamma$ ist, der Comet sich seinem niedersteigenden Knoten entgegen bewege, und weil Cc gegen Bβ wenig geneigt ist, die Neigung seiner Bahn nicht sehr groß sey.

§. 157.

Um nun den kleinsten Abstand des Cometen von der Erde zu bestimmen, so trug ich AL, $\alpha\lambda$ (Fig. 12.) auf Ta, Te (Fig. 11.) und zog ea. Damit konnte Tp (Fig. 11) als der kleinste Abstand auf die Scale D (Fig. 12.) getragen werden, wo es sich dann ergab, daß derselbe = 0,0192, demnach der Comet 52mal näher bey der Erde war, als die Erde in ihrem mittleren Abstande von der Sonne entfernt ist.

§. 158.

Vergleicht man diese hier angezeigte Construction mit der oben bey dem Cometen 1769 beschriebenen, so wird man einen sehr merklichen Unterschied finden. Die Erdbahn mußte hier sehr groß gezeichnet werden. Man gebraucht nur einen Theil von etwan 4 Graden davon, weil die Beobachtungen sich nicht über 4 Tage erstreckten. Es würde aber ein ungleich grösseres Papier dazu nöthig gewesen seyn, wenn der Comet weit von der Erde entfernt gewesen wäre.

So aber trafen mehrere Schicklichkeiten zusammen, die sich selten beysammen finden. Indessen kann ich nicht sagen, daß alles, was aus dieser Construction folgt, so genau wäre, daß sich daraus auf die ganze Bahn des Cometen ein Schluß sollte können machen lassen. Der Comet gieng so nahe bey der Erde vorbey, daß seine Bahn durch die Einwirkung der Erde nothwendig und merklich hat geändert werden müssen. Setzt man den Abstand der Erde von der Sonne=22000 Halbmessern der Erde, so ist der Comet nur etwas über 400 Halbmesser von der Erde und demnach nur 7 mal weiter als der Mond entfernt gewesen. Dieses macht die Einwirkung der Erde in den Lauf des Cometen nur 49 mal geringer als auf den Mond, und daher immer noch merklich. Setzt man ferner die Parallaxe der Sonne von 10 Secunden, so ist die von dem Cometen 52 mal größer, demnach über 8 Minuten gewesen. Man hat daher allerdings wünschen sollen, daß der Comet besonders den 1ten Heumonat auf sehr entfernten Sternwarten hätte mögen genau beobachtet worden seyn, weil sich daraus die Parallaxe des Cometen durch unmittelbare Beobachtungen hätte bestimmen lassen, und weil dieses auf die Bestimmung der Sonnenparallaxe einen merklichen Einfluß würde gehabt haben.

§. 159.

Inzwischen da ich aus meinen Beobachtungen Schlüsse von dieser Art herleitete, schickte Hr.

Hr. Meßier an die Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin seine ersten Beobachtungen, die er den 15ten und 20ten Brachmonat angestellt hatte. Ungeachtet er nun die Stunde der Nacht nicht angab, so ließen sie sich doch zur Bestimmung der Bahn des Cometen einigermaßen gebrauchen. Denn die Bewegung des Cometen betrug in diesen 5 Tagen nicht $1\frac{1}{2}$ Gr., und die Nächte waren kaum einige Stunden lang, und so konnte man die Zeit zwischen 11 und 12 Uhr ohne merklich zu besorgenden Fehler setzen.

§. 160.

Diese zwo Beobachtungen mit denen, so ich vom 28ten Brachmonat bis zum 2ten Heumonat angestellt hatte, konnten nun dienen, die Bahn des Cometen daraus herzuleiten, sofern sie nemlich als eine Parabel angesehen, und die Einwürkung der Erde bey Seite gesetzt wird. Und da die Distanz des Cometen zur Zeit seiner grösten Erdnähe bereits hinreichend bestimmt war, so war auch die erste Beobachtung des Hr. Meßier hinreichend. Ich hatte mich dabey ebenfalls nur der Construction bedient, und dadurch fand ich die Neigung der Cometenbahn nur etwan von 2 Gr., den Ort des Knoten, welcher eben daher nicht sehr zuverläßig bestimmt werden konnte, ungefähr im 12ten Gr. des Löwen, die Länge der Sonnennähe im $26\frac{3}{4}$ Gr. der Fische, und die Zeit der Sonnen-

 nähe

nähe den 9ten Aug. um 3 Uhr 36 Min. Nachmittags, die Entfernung derselben von der Sonne = 0,626. Daraus ergab sich ferner, daß der Comet aufs früheste gegen das Ende des Heumonats und dann den ganzen August durch und noch weiter hinaus des Morgens vor Aufgang der Sonne, wiewohl sehr klein werde zu sehen seyn. Hr. **Meßier** erblickte ihn auch wirklich den 3ten August Morgens frühe das erstemal, und setzte seine Beobachtungen bis im October fort. Hier habe ich ihn vom 8ten August bis auf den 2ten September verschiedenemal beobachtet. Aus diesen Beobachtungen folgte, daß die Sonnennähe des Cometen nur etwas weniges weiter hinausgerückt werden müsse, als es die Construction mit sich brachte. Dieses kann als eine Folge der elliptischen Laufbahn angesehen werden, dafern nicht auch die Einwürkung der Erde einigen Antheil daran hat.

§. 161.

Aus der Construction fand ich, daß den 2ten Jul. um 11 Uhr 30 M. Abends der Abstand des Cometen von der Erde = 0,02730, hingegen den 15ten Brachmonat um Mitternacht = 0,24200 war. Den ersteren konnte ich als sehr genau ansehen, weil er nach der Zeichnungsart der 12ten Figur (§. 151. folgg.) gefunden worden. Den andern hingegen fand ich vermittelst der Construction der ganzen Bahn (§. 160.) nach einem Maßstabe, wo $\frac{1}{1000}$ Theile

Theile des Halbmessers der Erdbahn schon sehr klein waren. Ich werde demnach diesen Abstand = 0, 24200 + x setzen, und denselben durch Rechnung noch näher zu bestimmen suchen.

§. 162.

Zu diesem Ende stelle S die Sonne, Aa die Erdbahn vor. Den 15ten Brachmonat um Mitternacht sey die Erde in A, der Comet in C, und sein auf die Ecliptic proiicirter Ort in B; so ist AS die Länge der Sonne, AB die Länge, CAB die Breite des Cometen, und BAS die Elongation des Cometen von der Sonne. Wiederum sey den 2ten Heumonat Abends um 11 Uhr 30 Min. die Erde in a, der Comet in c, sein auf die Ecliptic proiicirter Ort in b, so daß aS die Länge der Sonne, ab die Länge, cab die Breite des Cometen vorstellt. Nun war Fig. 13.

	den 15. Jun. 12 St. 0 M.	den 2. Jul. 11 St. 30 M.
der Ort der ☉	♊ 24°. 43′	♋ 10.55
die Entfernung	AS = 1,0164	aS = 1,0169
die Länge des Cometen	♑ 2. 53	♊ 22. 4
die Breite	BAC = 7. 42	bac = 41.13
der Abstand	CA = 0,24200 + x	ca = 0,02730

§. 163.

Hieraus folgt nun, wenn man die Perpendiculären bp, BP zieht,

SAB

$SAB = 171^\circ.\ 50'$	$Sab = 18^\circ.\ 51'$
$AB = 0{,}23982 + 0{,}99098\ x$	$ab = 0{,}02054$
$CB = 0{,}03243 + 0{,}13399\ x$	$cb = 0{,}01799$
$PB = 0{,}03407 + 0{,}14077\ x$	$pb = 0{,}00664$
$PA = 0{,}23739 + 0{,}98093\ x$	$pa = 0{,}01944$
$SP = 1{,}25379 + 0{,}98093\ x$	$Sp = 0{,}99746$
$SP^2 = 1{,}57419 + 2{,}46935\ x$	$Sp^2 = 0{,}99493$
$PB^2 = 0{,}00120 + 0{,}00959\ x$	$bp^2 = 0{,}00004$
$SB^2 = 1{,}57419 + 2{,}46935\ x$	$Sb^2 = 0{,}99497$
$SB = 1{,}25467 + 0{,}98406\ x$	$Sb = 0{,}99748$
$tBSA = 0{,}02716 + 0{,}09090\ x$	$\text{tang.}bSa = 0{,}00666$
$BSA = 1^\circ.\ 13' + 0{,}09083\ x$	$bSa = 0^\circ.\ 23'$
$SB^2 = 1{,}57419 + 2{,}46935\ x$	$Sb^2 = 0{,}99497$
$CB^2 = 0{,}00105 + 0{,}00866\ x$	$cb^2 = 0{,}00032$
$SC^2 = 1{,}57524 + 0{,}247801\ x$	$Sc^2 = 0{,}99529$
$SC = 1{,}25509 + 0{,}98722\ x$	$Sc = 0{,}99764$

§. 164.

Dieses folgt aus jeder Beobachtung an sich. Werden nun beyde verglichen, so ist

$$ASA = 16^\circ.\ 12'$$
$$bSa = 0.\ 23$$
$$\text{Summe} = 16.\ 35$$
$$BSA = 1.\ 33 + 0{,}09083\ x$$
$$BSB = 15.\ \ 2 - 0{,}09083\ x$$

Ferner

Ferner

$$SB^2 = 1{,}57419 + 2{,}46935\ x$$
$$Sb^2 = 0{,}99497$$
$$\text{Summe} = 2{,}56916 + 2{,}46935\ x$$
$$2\,BS.\,bS.\,\text{cos}.\,BSb = 2{,}41735 + 1{,}95494\ x$$
$$Bb^2 = 0{,}15179 + 0{,}51441\ x$$
$$(CB - cb)^2 = 0{,}00021 + 0{,}00404\ x$$
$$Cc^2 = 0{,}15200 + 0{,}51845\ x$$
$$Cc = 0{,}38988 + 0{,}66488\ x$$
$$SC + Sc = 2{,}25273 + 0{,}98722\ x$$
$$SC + Sc + Cc = 2{,}64261 + 1{,}65210\ x$$
$$SC + Sc - Cc = 1{,}86285 + 0{,}32234\ x$$
$$(SC + Sc + Cc)^{3:2} = 4{,}29585 + 4{,}02850\ x$$
$$(SC + Sc - Cc)^{3:2} = 2{,}54252 + 0{,}65992\ x$$
$$\text{Differenz} = 1{,}75333 + 3{,}36858\ x$$

§. 165.

Dieser Unterschied ist nun (nach §. 63) $= 12\,mT$. Es ist aber die Zeit zwischen beyden Beobachtungen $= 16$ T. 23 St. 30 M. demnach

$$12\,mT = 1{,}75247$$

folglich

$$1{,}75247 = 1{,}75333 + 3{,}36858\ x$$

Hieraus folgt

$$-x = 0{,}000255$$

für

für die Verbesserung der Distanz AC, welche demnach

$$AC = 0{,}241745$$

wird. Es ist demnach AC nur um etwas weniges kürzer, als ich es durch die Construction gefunden, und daher wird die Sonnennähe auch nur etwas weniges weiter hinausgerückt. Man findet aber nun nach der Verbesserung

$$SC = 1{,}25484 = a$$
$$Sc = 0{,}99764 = b$$
$$Cc = 0{,}38971 = k$$

demnach, vermöge §. 66, den Abstand der Sonnennähe

$$f = 0{,}63087$$

anstatt daß die Construction 0,626 gegeben hatte. Die wahre Anomalie des Puncts c wird hieraus (nach §. 67.) = 74°. 39′, und damit die Länge der Sonnennähe im 25°. 57′ der Fische gefunden, welches von der Construction um 39′ verschieden ist.

§. 166.

Dessen ohnerachtet muß dennoch, denen im August nach der Rückkehr des Cometen angestellten, Beobachtungen zufolge die Sonnennähe noch weiter hinausgerückt werden. Um dieses ganz augenscheinlich zu machen, so habe ich in
Fig. 14. der 13ten Figur die Bahn des Cometen nach erst angegebener Rechnung construirt. S ist die Sonne

Sonne, AaD die Erdbahn, A der Ort der Erde den 15ten Brachmonat um Mitternacht, a der Ort der Erde den 2ten Heumonat Abends um halb 12 Uhr, P die Sonnennähe des Cometen, BbP desselben Bahn, so wie sie, als parabolisch betrachtet, nach der Rechnung gefunden wird, B der Ort des Cometen zur Zeit, da die Erde in A war, AB die Länge des Cometen zu eben der Zeit, b der Ort des Cometen, da die Erde in a war, aβ die Länge desselben. Die Puncte a, b treffen in der Figur so nahe zusammen, daß sie nicht wohl deutlich von einander unterschieden gezeichnet werden konnten. Nun habe ich den 23ten August Abends um 3 Uhr nach Mitternacht, oder den 24ten Morgens früh um 3 Uhr die Länge des Cometen im 17°. 19′ ♋ und seine Breite 1°. 11′ südlich gefunden. Die Erde war damals in D, und der Comet sollte nach der Linie DE, welche seiner beobachteten Länge gemäß gezogen ist, in seiner Bahn bestimmt werden. Man sieht aber, daß die Linie DE die Bahn gar nicht durchschneidet, und sie auch nicht einmal berühret, sondern außerhalb derselben weggezogen ist. Da sie aber die Bahn, wo nicht durchschneiden, doch wenigstens berühren sollte, so sieht man offenbar, daß die Sonnennähe P von S weiter hinausgerückt werden müße, damit sie bey E wenigstens die Linie DE berühre, wo nicht durchschneide.

§. 167.

§. 167.

Daß dieses Hinausrücken der Sonnennähe von dem elliptischen Laufe des Cometen wenigstens zum Theil herrühre, läßt sich ebenfalls leicht zeigen. Ein Comet läuft in der Ellipse nothwendig langsamer als in der Parabel. Demnach hat der Comet vom 15ten Jun. bis zum 2ten Jul. nicht den Bogen Bb, sondern einen kleineren Bogen durchlaufen. Er ist demnach in B näher bey A, und so auch in b näher bey a gewesen (§. 150,) und dieses giebt seinem Laufe eine Richtung, die die Sonnennähe P von S weiter entfernt.

§. 168.

Was nun die Einwirkung der Erde in den Lauf des Cometen betrift, so kann man sich davon folgendermassen überhaupt einen Begrif machen. Man betrachte nur die relative Bewegung des Cometen gegen die Erde, und ohne Rücksicht auf die Einwürkung der Sonne. Auf diese Art wird der Comet als ein in einer Hyperbel um die Erde laufender Satellit derselben anzusehen seyn, eben so wie man den Mond als einen sich in einer Ellipse um die Erde bewegenden Satelliten ansieht. Dieses vorausgesetzt, so läßt sich aus dem über die 11te Figur gesagten herleiten, daß des Cometen scheinbare Geschwindigkeit zur Zeit seiner grösten Erdnähe beynahe 2 Grad in einer Stunde, oder 46 Grad in 24 Stunden betragen. Des Mondes Geschwin-

schwindigkeit hingegen beträgt in 24 Stunden nur 13 Grad. Demnach war die gröste scheinbare Geschwindigkeit des Cometen zu der von dem Monde wie 46 zu 13. Nun aber war der Comet siebenmal weiter entfernt, demnach muß 46 mit 7 multipliciret werden. Und da das Product 322 ist; so folgt, daß die wahre relative Geschwindigkeit des Cometen in seiner Hyperbel zu der von dem Monde wie 322 zu 13 gewesen. Hingegen war wegen der siebenmal größeren Entfernung die Wirkung der Erde oder die Schwere des Cometen gegen dieselbe neun und vierzigmal geringer als die von dem Monde, oder diese neun und vierzigmal größer als die vom Cometen. Der Erfolg hievon ist, daß der Comet indem er 322 Theilchen durchläuft, sich nur um 1 gegen die Erde senkt, da hingegen der Mond, wenn er 13 Theilchen durchläuft, sich um 49 senkt. Dieses macht, daß der Halbmesser des Krümmungskreises der Bahn des Cometen und des Mondes sich wie 322^2 zu $\frac{13.\ 13}{49}$ demnach wie 5080516 zu 169 oder wie 30062 zu 1 verhalten. Der Comet bewegte sich demnach um die Erde nach seinem relativen Laufe in einer solchen Hyperbel, da der Halbmesser des Krümmungskreises zur Zeit seiner größten Erdnähe bey dreyßig tausendmal größer als der Halbmesser der Mondbahn oder bey zwey und achtzigmal größer als der Halbmesser der Erdbahn war. Da nun diese von der Einwirkung der Erde herrührende Krümmung der Bahn des Cometen sehr geringe ist, so sieht man, daß sie in Absicht auf die Bahn des Cometen um die Sonne keine merkliche Wirkung kann gehabt haben. Der Erfolg ist inzwischen immer unter andern dieser, daß die Neigung der Bahn des Cometen gegen die Ecliptic um etwas größer, und seine Knotenlinie, welche nach der Rechnung in ♈S ist, näher gegen b gerückt worden. Die Rechnung giebt übrigens die bis zur Knotenlinie in E verlängerte Chorde Bb so an, daß bE = 0,48564 ist, und daraus folgt die Neigung der Bahn = 2°. 8′. Da übrigens der Comet, so wie der von 1769, in dem Halleyschen Verzeichniß nicht vorkommt, und man daher seine periodische Zeit nicht kennt, so läßt sich auch über seine elliptische Bahn nichts zuverläßiges sagen. Inzwischen ist die bisher angegebene Bestimmung seiner Bahn hinreichend, denselben in künftigen Zeiten wieder zu erkennen, wenn er wieder gegen seine Sonnennähe heranrückt.

VIII.
Anmerkungen über die Baukunst.

§. 1.

Wenn man, wie es bereits von mehreren geschehen, die Frage aufwirft, ob man die Baukunst unter die mathematischen Wissenschaften rechnen könne, so kann man gleich so viel antworten, daß diese Frage etwas verworrenes hat, welches vorerst aus einander gelesen werden muß. Man hat dabey zu bestimmen, was überhaupt zur Mathematik gerechnet werden könne und müsse; und sodann bleibt noch die Frage, was insbesondere in der Baukunst vorkömmt, das dahin gehöre? Diese beyden Fragen scheinen einiger Untersuchung werth zu seyn, weil sich von daher die Aufklärung verschiedener Begriffe erwarten läßt. Tab. XI. XII XIII. XIV. XV.

§. 2.

In Ansehung der ersten Frage ist es an sich schon klar, daß hier nur von der angewandten Mathematik die Rede ist, weil sich die reine Mathesis auf die Meßkunst und den Calcul einschränkt. Die angewandte Mathematick hingegen hat bereits schon mehrere Theile, und da ist zu sehen, mit welchem Rechte jeder Theil seine Stelle behauptet? Durchgeht man in dieser Absicht

sicht jede einzelne Theile, so finden sich verschiedene besondere Antworten, aus denen sich endlich etwas allgemeines kann abstrahiren lassen. Die Mechanick geht so ziemlich a priori, und hat bereits in ihren ersten Grundsätzen die Bestimmung der bey der Bewegung und dem Drucke vorkommenden Grössen zum Gegenstand. Sie betrachtet auch ihr Object nicht anders, als in sofern Grössen dabey zu bestimmen sind. Die Astronomie geht a posteriori, und fängt schon bey ihren ersten Grunderfahrungen und Beobachtungen mit Ausmessungen der Zeit und Winkel an. Sofern sie mathematisch ist, betrachtet sie auch den Himmel nicht anders, als sofern sich die Bewegung der Gestirne auf Zahl und Maaß bringen läßt. Auf eine ähnliche Art verfährt die Optik mit dem Lichte, indem sie alles auf Winkel, Linien und Grade bringt, und von den ersten Sätzen und Grunderfahrungen an alles dahin lenkt. Hingegen scheint die Aerometrie bis dermalen nur eine zusammengestoppelte Wissenschaft zu seyn. Sie hat, außer der Lehre von der Schnellkraft der Luft, nicht viel eigenthümliches, weil das meiste, so bisher darin vorgekommen, in andere viel allgemeinere Theile der angewandten Mathematick gehört. So z. E. gehören die Thermometer viel eigentlicher in die Pyrometrie, und eben so maßen sich die Akustic, Music, Meteorologie ꝛc. noch andere Theile an. Indessen sofern alles dieses mathematisch seyn soll, muß sich auch alles auf die Bestimmung

mung von Grössen beziehen, und was nicht Große ist, wird entweder in die Physic verwiesen, oder nur in sofern mitgenommen, als sich Bestimmungen der Grössen daraus herleiten oder aufklären lassen.

§. 3.

Diese Bemerkung wird uns in Absicht auf die Baukunst so ziemlich zum Leitfaden dienen können. In der Baukunst ist so zu sagen alles Figur, und alles kommt darinn auf Zahl Maaß und Gewicht an. In sofern fehlt es demnach an Anlässen nicht, die reine Mathematik und die Mechanik, demnach die sämtlichen a priori gehenden Theile der Mathematik anzuwenden. Man kann noch beyfügen, daß das **Lineal**, (das Richtscheid, welches meistens auch die Stelle eines Zirkels vertritt) der **Winkelhacken** und die **Bleywage** kaum irgend häufiger als in der practischen Baukunst gebraucht werden. Freylich kömmt es dabey meistens auf bloße Quadrate und Rectangel, und zuweilen auch auf deren Diagonalen an, und bey Treppen und Dächern kann allenfalls an eine Anwendung des pythagorischen Lehrsatzes gedacht werden. Alles dieses ist so elementar, daß, wenn weiter in der Baukunst nichts mathematisches vorkäme, sie unter den Theilen der angewandten Mathematik eine eben so schlechte Figur machen würde, als wenn man aus der Lehre von Ausmessung eines viereckigten Ackers einen

 beson-

besondern Theil der angewandten Mathematik machen wollte. Man kann aber gar wohl einräumen, daß die Anwendung der Geometrie auf das, was in der Baukunst auszumessen, zu zeichnen und zu verfertigen ist, viel weiter gehe. Indessen wird daraus nur so viel folgen, daß es gut ist, wenn Maurer, Steinhauer, Zimmerleute, Tischler, Schlösser, Gypser rc. sich mit der Geometrie bekannter machen, als es gewöhnlich geschieht.

§. 4.

Es macht aber alles dieses die Baukunst noch zu keinem besondern Theil der angewandten Mathematik, sondern höchstens nur zu einem Theil der practischen Geometrie. Soll aber ersteres seyn, so muß die Baukunst eigene Grundsätze haben, die einer mathematischen Theorie fähig sind, und wenigstens müssen ihre Gründe sich auf mehrere andere Theile der Mathematik beziehen, und in der Anwendung etwas der Baukunst eigenes haben. Wir haben sie demnach in dieser Absicht durchzugehen.

§. 6.

Das erste, was sich hier darbeut, ist die Lehre der **architectonischen Verhältnisse**. Diese Lehre gehört zwar viel allgemeiner in die Theorie der **Schönheit** überhaupt, allein ausser dem, daß diese Theorie noch weit zurücke bleibt, so ist es in der Baukunst auch nur um einzelne und besondere Bestimmungen zu thun, die sich allenfalls wohl auch für sich betrachten lassen. Ueberdies werden bemeldte Verhältnisse in der Baukunst nicht schlechthin, nur weil sie **schön** sind, vorgenommen, sondern sie müssen immer auch mit den beyden andern Hauptabsichten, der **Festigkeit** und **Bequemlichkeit** der Gebäude verglichen und verbunden werden. Diese beyden Absichten sind ungleich wesentlicher, und man würde sich sehr irren, wenn man blos deswegen den Namen eines Architecten behaupten wollte, weil man nette Risse von Säulenordnungen und symmetrischen Gebäuden zu verfertigen im Stande ist. Solche Risse, eben so wie Risse von Festungen, setzen noch weiter nichts als etwas Elementargeometrie und einige Uebung im Zeichnen und Illuminiren voraus.

§. 6.

Der Grundsatz der **Bequemlichkeit** der Gebäude fordert ebenfalls etwas mehr, als die bloße Ausmessung eines bereits vorhandenen Gebäudes fordern würde. Zu einem Gebäude ist mehrentheils die Lage und der Raum nicht blos gegeben, sondern angewiesen und bestimmt. Die Auswahl wird dadurch eingeschränkt, und statt dessen, was man wollte, muß man sich mit dem begnügen, was der Raum zuläßt. Da ist sodann die Frage, in Absicht auf die Bequemlichkeit den größten möglichen Vortheil zu ziehen. Aber auch, wenn man Raum genug hat, fordert die Bequemlichkeit, daß, was zunächst bey-

beysammen seyn solle, nicht alle auf Ecken hinaus zerstreuet werde. Das allzuweitläuftige kann eben so wie das allzuenge der Bequemlichkeit im Wege stehen. Für jede Absichten giebt es hiebey ein maximum von bestimmter Größe. Und dieses findet sich bey wirklichen Gebäuden noch sehr selten.

§. 7.

Der Grundsatz der **Festigkeit** fordert außer der Geometrie und dem Calcul noch mechanische Kenntnisse, und deren Anwendung sowohl auf die Materialien der Baukunst, als die Figur und Verbindung der Theile. Hiebey muß aus der Physic und aus besonderen Versuchen herausgebracht werden, was man auf Ausmessungen zu bringen hat. Und wenn alles dieses bereits gefunden und in systematischen Zusammenhang gebracht wäre, so würde die Baukunst die Frage, ob sie unter die mathematischen Wissenschaften gehöre, nicht veranlaßt haben. Man hat indessen bereits schon angemerkt, daß es fürnemlich hierin fehle. Man hat auch schon angefangen, nach und nach einzelne Theile aufzusuchen, und sie auf Zahl und Maaße zu bringen. Dieses ist auch überhaupt alles, was man, wegen der ungemeinen Weitläuftigkeit der Baukunst zur Zeit noch thun kann. An das Ganze läßt sich erst dann mit gutem Erfolge denken, wenn man die einzelnen Theile hervorgesucht, und so zu reden zubereitet hat. Aus diesem Gesichtspuncte werden sich nun auch folgende Artickel betrachten und beurtheilen lassen.

I. Die Säulenordnungen, sofern Säulen Stutzen sind.

§. 8.

Die Lehre der Stützen gehört unstreitig in den mathematischen Theil der Baukunst. Sie läßt sich aber mit der Lehre der fünf Säulenordnungen nicht so schlechthin vermengen, dafern man das nothwendige von dem willkührlichen, und das eigentlich wissenschaftliche von dem blos historischen genau unterscheiden will. Wenn man zusammen nimmt, wie sehr bey diesen Säulenordnungen alles willkührlich ist, wie gelegentlich es mit ihrer Erfindung zugegangen, und wie zufällig die Gründe zur Bestimmung der Maaße und Verzierungen waren; so fällt es ins lächerliche, wie man sich in Frankreich die Erfindung einer sechsten Ordnung als ein schweres oder unauflösliches Problem hat vorstellen können. Man nehme was man will zum Unterscheidungsstücke jeder der fünf Ordnungen an, so lassen sich immer noch eine Menge anderer ausfündig machen. Bärenklee, Schnörkel, Triglyphen, Kälberzähne ꝛc. sind bey den Säulen, als Stützen betrachtet, an sich schon fremdes Zeug, und solches läßt sich noch in Menge finden. Bey den Verhältnissen ist ebenfalls das meiste willkührlich, und richtet sich,

 wenn

wenn anders die Säulen Stützen seyn sollen, nach ungleich genauer zu bestimmenden Gründen.

§. 9.

Bey allem dem haben sich die Baumeister in ihre Säulenordnungen so vertieft, daß sie, wenn sie etwas recht ausserordentlich zierliches und großes den Augen der Sterblichen darstellen wollen, ihre Säulen auch da hinplacken, wo nicht nur keine Last zu tragen ist, sondern wo sie auf mehrere Arten wirklich hinderlich sind. Man findet nicht selten Fenster dergestalt mit Säulen umpflanzt, daß die Zimmer doppelt dunkeler sind, und der Tag darinn um eine oder zwo Stunden kürzer ist, als wenn ein so schattenreicher Zierath, der noch überdis die Hälfte der Aussicht wegnimmt, weggeblieben wäre. Auch findet man Krämerbuden mit dicken Säulen, die dennoch nur eine leichte Altane tragen, so umzingelt, daß in der Bude selbst, wo man die Stoffe so gut als am freyen Tageslichte sollte sehen können, den ganzen Tag über nur eine Dämmerung ist. Man hat sich aber kaum darüber zu verwundern. In den Anweisungen zur Baukunst nimmt die Lehre von den fünf Säulenordnungen nicht nur immer einen beträchtlichen Raum ein, sondern sie wird auch mit so gesetzlichen und aufbürdenden Worten vorgetragen, als wenn es lauter unverletzliche Orakelsprüche, unmittelbare Befehle vom Himmel oder Vorschriften eines nicht zu beleidigenden Gebieters

wären. Man sieht dabey die Säulenordnungen als das Meisterstück der Baukunst an, und wer sie zeichnen gelernt hat, glaubt eben dadurch den wichtigsten Schritt in der Baukunst gethan zu haben. Der einige wesentliche Umstand, daß Säulen Stützen seyn sollen, wird dabey vergessen.

§. 10.

Es ist indessen doch so gar schwer nicht, die Sache auf ihre erste Gründe zu bringen. **Vitruv** und unter den neuern **Blondell**, **Goldmann** und mehrere andere geben den ersten Ursprung der Säulen ziemlich ordentlich an. Eine Hütte von der Größe und Form eines Zimmers, das zugleich Stube, Schlafkammer, Küche und Keller ist, ruht mit ihrem von Baumrinden bedecktem Dache auf vier Stämmen, und ist statt der Wände mit Brettern beschlagen. Dieses ist das Ideal der ersten Bauart, und noch dermalen die Bauart der von **Haller** besungenen Alpenhütten. Sie ist einfach und dabey sehr vernünftig. Die vier Stämme sind wirklich Stützen, weil sie das Dach tragen, welches unstreitig die bretterne Wände nicht tragen können. Wenn aber, wie es bey der verfeinerten Baukunst geschieht, das Dach auf vier starken Mauern ruht, die allenfalls einen Thurm tragen könnten, und wenn man dessen unerachtet vor solche Mauern noch eine Reihe von Säulen hinplackt, die höchstens ein mit Steinen und

und Mauerwerk nachgeahmtes hölzernes Gebälke, oder einen nichts bedeutenden Fronton, oder vollends gar nichts tragen, und überdis den Zimmern Licht und Aussicht benehmen, so heißt dieses unstreitig von der ersten Absicht der Baukunst so abweichen, daß solche Colonnaden eher Hieroglyphen als wirkliche Stützen sind. Man sieht demnach auch hieraus, daß es keine vergebliche Sache ist, wenn wir auf die ächten Gründe zu sehen bemühet sind.

§. 11.

Aus erstbemeldter ursprünglichen Bauart, so wie aus der täglichen Erfahrung erhellet überhaupt so viel, daß eine Stütze mehr tragen kann, als ihr eigenes Gewicht. Es kömmt dabey einmal auf die Festigkeit des Bodens, und sodann auch auf die Verhältniß an, die die Höhe der Stütze zu ihrer Dicke haben kann, dafern sie weder zu dünne noch ohne Nothwendigkeit zu dicke seyn soll. Diese Verhältniß hängt nun theils von der Festigkeit der Materie, theils von der aufzulegenden Last ab.

§. 12.

Nun giebt die Erfahrung ferner an, daß, wenn der Boden nicht ein an sich schon feste liegender Fels ist, die Stütze, sie mag von Holz oder von Stein seyn, fester ist als der Boden, und daß man demnach, wenn auch die Stütze ihre aufliegende Last tragen kann, dennoch zu sehen hat, daß der Boden die Stütze tragen könne.

Dazu wird erfordert, daß die Stütze nicht unmittelbar auf den Boden drücke, sondern daß der Druck auf eine ungleich breitere Unterlage so vertheilt werde, daß der Boden in jedem Punct einen geringeren Druck auszuhalten habe. Da aber auch diese Unterlage gebogen oder gebrochen werden könnte, so muß sie ebenfalls eine gewisse Dicke haben. Hievon werde ich im folgenden umständlicher reden. Hier ist es genug anzumerken, daß das bey Säulen übliche Postament in der That auch Gründe habe, die nicht blos von der Dauerhaftigkeit, sondern selbst von der Möglichkeit eine Last zu tragen hergenommen sind.

§. 13.

In sofern demnach die Stützen mehr als ihre eigene Last tragen können, in so fern können sie auseinander gesetzt, und damit der Zwischenraum zu andern Absichten gebraucht werden. Zugleich werden auch alle die Baumaterialien dadurch erspart, die man aufwenden müßte, wenn man statt einzelner Stützen ganze Mauern, oder ganze dicht vollgemauerte Geschosse brauchen müßte. Dieses will nun eben nicht sagen, daß ein Gebäude aus lauter Stützen bestehen solle. Die Absicht, daß es geschlossen, und in Gemächer eingetheilt werde, fordert immer auch Mauern und Scheidewände, und da dieses den Gebrauch der Stützen an sich schon seltener macht, so sieht man leicht, daß die

Stutzen

Stützen ihre besondere Stellen und Gebrauch haben. Dahin gehören nun folgende Fälle:

1) Giebt es Fälle, wo man sich in der That mit Stützen ganz allein begnügen kann. Solche findet man bey Wasserleitungen, bey bedeckten Gängen und Lusthäusern in Gärten, die zugleich schattigt und luftig seyn sollen.

2) Giebt es Fälle, wo die Stützen nur einseitig sind, wie z. E. bey Gängen, Schopfen, Vordächern, Arcaden, Terrassen, Lauben ꝛc. die an ganzen Mauern angrenzen.

3. Giebt es Fälle, wo die Stützen in der Mitte sind, wie z. E. in weitläuftigen Vorsälen, Gewölben, Kirchen ꝛc.

4. Giebt es Fälle, wo nur einige Stützen wirklich tragen, und die übrigen der Symmetrie wegen angebracht sind, wie z. E. bey Colonnaden, die von einer Wand zur andern gehen, und wo eigentlich nur die mittleren zum tragen bestimmt sind.

§. 14.

Dieses sind nun überhaupt die Fälle, wo Stützen ihren eigentlichen Gebrauch haben. Man sieht zugleich auch, daß sie der Absicht der Sache sehr angemessen sind. So z. E. ersparen sie bey den Wasserleitungen eine hohe und dicke Mauer, und eben diesen Vortheil haben sie in den übrigen Fällen, wo sie überdis noch zu andern Bequemlichkeiten dienen. Alles dieses sieht ganz anders aus, als wo man nur Mauern, Eingänge, Fenster ꝛc. damit verkleistert, und die Eingänge und Zimmer verdunkelt. Wenn es doch je Zierathen seyn sollen, so würde man statt der Säulen immer besser Pyramiden und Obelisken hinsetzen, die an sich schon das Ansehen haben, daß sie nichts tragen sollen.

§. 15.

Was nun Säulen, besonders wo sie in Reihen fortgehen, zu tragen haben, das sind entweder Gebälke, oder Schwibbögen, oder beydes zugleich. Und auf diesen erst muß die eigentliche Last, die zu tragen ist, liegen. Das Gebälke sowohl als die Schwibbögen dienen, theils die Säulen oberhalb unter sich zu verbinden, und sie in ihrer Lage zu erhalten, theils erhält man dadurch zugleich, daß die Last auf einer durchgängigen Basis gleichförmig vertheilt wird, und durch diese Vertheilung gleichförmiger auf jede Säule drückt. Man sieht leicht, daß hiebey die Höhe und Dicke der Säulen, die Festigkeit ihres Stoffes, die Größe der Last, die Höhe des Gebälkes und der Schwibbögen, und der Abstand der Säulen von einander mit einander verglichen, berechnet und auf brauchbare Formeln gebracht werden muß, und daß solche Formeln das ihrige mit beytragen, der Baukunst ihren Rang unter den mathematischen Wissenschaften zu behaupten.

§. 16.

§. 16.

Das Gebälke sollte seinem ursprünglichen Gebrauche gemäß immer von Holz seyn. Denn wird es von Mauerwerk oder Steinen gemacht, so ist dieses nur eine Nachahmung. Ueberdies sind Steine von ganzen Stücken und von der Länge eines hölzernen Balkens selten, und es ist schon viel, wenn das Hauptgesimse eines Fensters oder Portals von einem Stücke Stein ist. Hingegen lassen die Schwibbögen einen ungleich grössern Zwischenraum bey den Säulen zu, wenn sie an beyden Enden eine Mauer zur Widerlage haben. Und da der Zwischenraum nicht durch das Gebälke, sondern durch die zu tragende Last bestimmt werden soll, so sieht man leicht, daß, wenn die Last wenigere und daher von einander entferntere Stützen zuläßt, man ihre Anzahl oder Nothwendigkeit blos dem Gebälke zu gefallen vermehren würde.

§. 17.

Die erst angeführte Vergleichung zwischen den Säulen, ihrem Abstande, der Last und der Höhe des Gebälkes oder Schwibbögen, läßt die Verhältniß der Säule zum Fußgestelle noch ziemlich unbestimmt. Wir haben aber vorhin schon gesehen, daß sich das Postament theils mit dem Schaft der Säule theils mit der Festigkeit des Bodens vergleichen läßt. Wenn wegen des schwachen Grundes die erste Unterlage gar zu breit und groß werden muß, so wird sie,

sie, und zwar auch noch aus andern Gründen in die Erde eingesenkt, damit der allzustarke Absatz zu der ungleich dünneren Säule nicht in die Augen falle. Man soll dabey eben nicht sehen, daß das Postament selbst noch auf einem Postament ruhe, und da es sich dennoch schickt, daß die Säule ein sichtbares Postament habe, so wird dieses auch nur um etwas stärker gemacht, als der Schaft der Säule. Die Frage kömmt daher vornehmlich auf die Verhältniß der Höhe an. Man sieht überhaupt, daß ein hohes Postament die Säule selbst erhöht, ohne derselben etwas von ihrer Stärke zu benehmen, und daß man einigermaßen dem Postamente zusetzen kann, was man dem Schaft der Säule, ohne denselben unnöthiger Weise dicker zu machen, nicht zusetzen dürfte. Dieses mag nun in besonderen Fällen seinen guten Vortheil haben. Und da es hiebey auf kleinere Unterschiede nicht ankömmt, so kann die ganze Höhe vom Boden bis oben an das Capitäl mehrentheils nach den architectonischen Verhältnissen vertheilt werden. Indessen wird wohl immer die Höhe der Säule wenigstens doppelt größer seyn müssen, als die Höhe des Postaments. Hiezu kommen aber zuweilen noch besondere Umstände, welche die Höhe des Fußgestelles bestimmen. So z. E. wenn eine Laube auf Säulen ruhet, welchen an der Mauer Fenster gegen überstehen, so ist es ganz schicklich, wenn das Postamentgesimse mit dem Fenstergesimse gleiche Höhe hat. Bey einer

 Säule,

Säule, die eine Treppe unterstützt, wird dem Po-
Fig. 1. stamente ebenfalls schicklich die Höhe des Geländers oder der Treppenlehne gegeben.

§. 18.

Es ist den architectonischen Verhältnissen ganz gemäß, daß, wenn man den untern halben Diameter des Schaftes zum Model annimmt, die Höhe der Säule durch eine ganze Zahl ausgedrückt werde, und daß ebenfalls die Höhe der Säule ein Multiplum sowohl von der Höhe des Postaments als des Gebälkes sey. Man kann ferner dabey annehmen, daß die Höhe des Postaments wenigstens nicht kleiner, als die Höhe des Gebälkes seyn müsse. Und wenn man auch hiebey ganze Zahlen verlangt, so werden diese beyden Höhen ebenfalls Multipla des Models. Nach diesen Bestimmungen bleibt sodann wenig Wahl mehr. Man setze nemlich, es sey

die Höhe des Postaments $= m$ Model
die Höhe des Gebälkes $= n$ Model

so wird die Höhe der Säule $= mn$ oder $= 2mn$, oder $= 3mn$ &c. seyn. Setzt man nun ferner, daß diese Höhe nicht leicht über 20 Model seyn solle, so bestimmt sichs hieraus, welche ganze Zahlen für m, n angenommen werden können. Man findet z. E.

Gebälke n	2	2	2	3	2	3	2	3	2	4	2	3	2	4	3	2
Säule mn	4	6	8	9	10	12	12	15	14	16	16	18	18	20	21	20
Postament m	2	3	4	3	5	4	6	5	7	4	8	6	9	5	7	10
ganze Höhe	8	11	14	15	17	19	20	23	23	24	26	27	29	29	31	32

§. 19.

§. 19.

Kraft hat in den Petersburgischen Commentarien eine ziemlich ähnliche Rechnung angegeben, wiewohl er sich nur auf Primzahlen eingeschränkt, und daher auch nur die fünf Ordnungen

$n =$	2	2	3	2	3
$mn =$	6	10	15	14	21
$m =$	3	5	5	7	7

herausgebracht hat. Ich sehe aber die Nothwendigkeit, sich hiebey so enge einzuschränken, nicht ein. Indessen hat Kraft auch darauf gedacht, daß er für die kleineren Glieder der drey Haupttheile Verhältnisse ausfündig machen könne. Und so giebt er an, daß sich

1. In dem Gebälke

$$\left.\begin{array}{l}\text{der Karnieß wie } n\\ \quad\text{Frieß ----- } n+1\\ \quad\text{Architrab - } n\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{zur Höhe des}\\ \text{ganzen Gebäl-}\\ \text{kes } (3n+1)\end{array}$$

2. Bey dem Schaft

$$\left.\begin{array}{l}\text{der Knauf wie } m\\ \quad\text{Stamm --- } 3mn\\ \quad\text{Gesimse - } n\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{zur Höhe des}\\ \text{ganzen Schaftes}\\ (m+3mn+n)\end{array}$$

3. Am Postamente.

$$\left.\begin{array}{l}\text{das Obergesimse, wie } 2\\ \text{der Würfel ----- } 2m\\ \text{das Fußgesimse -- } n\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{zur Höhe des}\\ \text{ganzen Posta-}\\ \text{ments} (2+2m+n)\end{array}$$

verhalten müsse. Es scheint aber auch hiebey noch viel willkührliches zu seyn, ungeachtet diese Verhältnisse ganz gut angehen.

§. 20.

Fig. 2. Ich habe mir indessen die vorhin (§. 18) angeführten 16 Ordnungen nach einerley Model gezeichnet, und zwar mit keinen andern Zierathen, als denen, die die ganz einfache toscanische Ordnung hat. Diese Zeichnung diente nicht nur, um alles mit einem Anblicke zu übersehen, sondern sie gab auch zu verschiedenen Vergleichungen und Bemerkungen Anlaß. Dahin gehört, was ich oben (§. 17) in Absicht auf die verschiedene Höhe der Fußgestelle angeführt habe. Sodann sieht man, daß hier Säulen, und, wenn man will, auch Pfeiler von sehr verschiedenen Stuffen von Stärke vorkommen. Die beyden ersten A, B, als Pfeiler betrachtet, haben mit der Attica der Griechen viele Aehnlichkeit. K, O, sind für solche Fälle, wo niedrige Postamente verlangt werden, und A, B, C, E, G I, L, N, Q für Fälle, wo die Postamente hoch seyn müssen. Hingegen halten D, F, H, M, P das Mittel. Da sich ferner die Höhe des Gebälkes nach dem Abstande der Säulen richtet (§. 15. 16), so bestimmt auch dieses die Wahl, die man unter gleich starken Säulen von verschiedenen Verhältnissen zu treffen hat. Der Abstand selbst wird zugleich mit der Stärke der Säule aus der zu tragenden Last bestimmt, und auch hiebey muß zuweilen die Stärke

Stärke durch den Abstand und die Last bestimmt werden, weil es Fälle giebt, wo man über die Anzahl der Säulen, dafern sie nicht an unschickliche Stellen kommen sollen, keine Wahl treffen kann. Uebrigens sieht man aus allem bisher gesagten, daß es ein Irrthum ist, wenn man das Gebälke als die Last ansieht. Denn dieses ist nur da, um die Last gehörig auf die Säulen zu vertheilen, und die Säulen selbst unter sich zu verbinden. In der That läßt es sich auch nicht absehen, wozu eine Reihe von Säulen dienen sollte, die weiter nichts als das Gebälke zu tragen hat.

§. 21.

Bey den bisher über die Säulen angestellten Betrachtungen kömmt nun die Frage, ob eine Säule toscanisch, dorisch, jonisch, corinthisch oder römisch, oder endlich auch deutsch sey, gar nicht vor. Die Frage, ob der Säulenschaft nach Aehnlichkeit eines Mannes oder eines Weibes oder einer Jungfer 7 oder 8 oder 9 Kopflängen haben solle, ist bey der Absicht der Säulen sehr zufällig. Man muß einen wenig feinen Witz haben, wenn man den Säulenschaft der corinthischen Ordnung als ein Bild einer Jungfer ansehen solle. Eine solche Vergleichung ist nicht besser als die, wo man in den Landcharten Europa als das Bild einer sitzenden Jungfer ansieht. Man hätte eben so gut das Schienbein eines Menschen zum Muster einer Säule, als Stütze be-

betrachtet, nehmen können, weil eigentlich auf den beyden Schienbeinen das ganze Gewicht des Menschen, und was noch überdies ein Mensch tragen kann, als auf zwo Stützen ruht.

§. 22.

Die in der zweyten Figur vorgestellte 16 Säulenordnungen sind noch lange nicht alle, die, ohne wieder die architectonische Verhältnisse zu verstossen, gefunden werden können. Wenn wir aber auch dabey bleiben, so sieht man ohne Mühe, daß dabey eine vielfache Auswahl möglich ist, weil die Höhe stuffenweise von 8 Model bis auf 32 geht. Die von den Griechen und Römern geborgte fünf Säulenordnungen sind hingegen in viel engeren Gränzen eingeschlossen. Und eben daher hat es auch Fälle gegeben, wo die Frage, ob man die toscanische, dorische, jonische, corinthische, oder römische Ordnung wählen solle, gerade deswegen Schwürigkeiten hatte, weil sich keine derselben gut schickte. **Goldmann** und **Sturm** schränken diese fünf Ordnungen zwischen 26 und 30 Model ein. **Goldmann** besonders hält sich schlechthin an diese zwo Zahlen, und **Sturm** glaubte schon viel gethan zu haben, daß er die toscanische und dorische auf 26, die corinthische und römische auf 30 Model ansetzte, der Jonischen 28 anwies, und, um sie nicht so ganz allein zu lassen, auch seiner deutschen Ordnung 28 Model gab. Es hätte ihm doch die Frage sehr natürlich beyfallen

fallen sollen, ob dann mit 26, 28, 30 Model alles, was man nur immer von Stützen erwarten kann, ausgerichtet sey? **Palladio**, **Scamozzi**, **Vignola** und **Serlio**, und so auch die alten Architecten, von denen sie ihre Zahlen nahmen, ließen weitere Schranken zu, weil sie doch dieselben von 19 bis auf 32 Model ausdehnten. Nur hätten wenigstens bey ihren Bestimmungen ganze Zahlen vorkommen, und damit mehrere unschickliche Brüche wegbleiben können. Wenn man endlich auch immer die Wahl hätte, anstatt einer sehr starken Säule zwo schwächere zu setzen; so müßten die Schranken dennoch zwischen 16 und 32 fallen. Allein eine solche Verwechselung läßt nicht immer gut, und eine starke Säule hat da, wo sie wegen der großen Last nöthig ist, nicht nur an sich schon mehr Ansehen von Festigkeit als zwo schwache, sondern ihre Dauerhaftigkeit ist auch an sich viel größer. Sie hat in Verhältniß der Maße weniger Fläche und hält dadurch die Würkungen der Witterung und jede andere äußere Gewalt besser aus. Endlich kann hier noch angemerkt werden, daß, da starke Stützen auch das Ansehen der Festigkeit haben sollen, sie weniger Zierathen haben müssen, und daher die viereckigte Figur dazu ungleich besser, als die abgerundete der Säulen ist. Aus eben dem Grunde schicken sich überhaupt betrachtet Schwibbögen zu Pfeilern, und Gebälke zu Säulen, weil die Schwibbögen ebenfalls zu grösseren

Säulenordnung nach	Toscanisch.				Dorisch.				Jonisch.				Corinthisch.				Römisch.			
	Gebälke.	Säule.	Postament.	Höhe.	Gebälke.	Säule.	Postament.	Höhe.	Gebälke.	Säule.	Postament.	Höhe.	Gebälke.	Säule.	Postament.	Höhe.	Gebälke.	Säule.	Postament.	Höhe.
Palladio	$3\frac{1}{2}$	14	2	$19\frac{1}{2}$	4	$17\frac{1}{2}$	$4\frac{2}{3}$	$26\frac{1}{6}$	$3\frac{3}{5}$	18	$5\frac{1}{5}$	$26\frac{4}{5}$	$3\frac{4}{5}$	19	5	$27\frac{4}{5}$	4	20	$6\frac{2}{3}$	$30\frac{2}{3}$
Scamozzi	$3\frac{3}{4}$	15	$3\frac{3}{4}$	$22\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	17	$4\frac{8}{15}$	$25\frac{47}{60}$	$3\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$	5	26	4	20	$6\frac{2}{3}$	$30\frac{2}{3}$	$3\frac{9}{10}$	$19\frac{1}{2}$	6	$29\frac{2}{5}$
Vignola	$3\frac{1}{2}$	14	$4\frac{2}{3}$	$22\frac{1}{6}$	4	16	$5\frac{1}{3}$	$25\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{2}$	18	6	$28\frac{1}{2}$	5	20	$6\frac{2}{3}$	$31\frac{2}{3}$	5	20	$6\frac{2}{3}$	$31\frac{2}{3}$
Serlio	3	12	4	19	$4\frac{1}{2}$	14	$5\frac{5}{6}$	$24\frac{1}{3}$	4	16	$5\frac{1}{6}$	$25\frac{1}{6}$	$4\frac{1}{2}$	18	6	$28\frac{1}{2}$	5	20	$6\frac{2}{3}$	$31\frac{2}{3}$
Goldmann	4	16	6	26	4	16	6	26	4	16	6	26	4	20	6	30	4	20	6	30

seren Lasten besser als Gebälke taugen. Ich habe übrigens die Angaben der Haupttheile der fünf alten Säulenordnungen, so gut ich sie aus verschiedenen Schriften und theils von einander abgehenden Nachrichten habe herausbringen können, in beyliegender Tabelle so vorgestellt, daß die dabey vorkommende Unterschiede und das Willkührliche dabey leicht übersehen werden kann. **Vignola** proportionirt die drey Haupttheile, ihrer Höhe nach, durchaus nach der Säule F (Fig. 2.) weil sie sich wie 3, 12, 4 verhalten. Dadurch erspart er freylich den Baumeistern viel Kopfbrechens und wird eben daher am meisten gebraucht. **Samozzi** wird als ein Meister in den Verhältnissen angesehen. Die von ihm angesetzte Brüche $\frac{8}{15}$, $\frac{47}{60}$ sind aber keine Probe davon. Denn warum sollten nicht dafür die viel einfachere Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$ gesetzt werden können? Ueberdies hat er auch nur das Gebälke zur Säule auf eine einfache Art, nemlich bey den zwo niederen Ordnungen, wie 1 zu 4, bey den 3 höheren wie 1 zu 5 proportionirt. Warum nicht auch das Postament? **Serlio** folgt ebenfalls weder ganz einfachen noch durchgängigen Verhältnissen, und springt in der ganzen Höhe sogleich von 19 auf $24\frac{1}{5}$. **Goldmann** hat ganze Zahlen, man sieht aber auch nicht, warum er die drey niedrigere Ordnungen nur, so wie die zwey höheren, durch ihre Zierathen unterscheidet, und nur zweyerley Grade von Stärke bey den Säulen annimmt. **Palladio** schleppt sich

sich auch mit Brüchen, und verdirbt dadurch das einfache in den Verhältnissen ohne alle Nothwendigkeit. Der Sprung von $19\frac{1}{2}$ auf $26\frac{1}{6}$ ist noch stärker, als der beym **Serlio**. Es ist auch **Palladio** der einige, der, wiewohl nur bey der toscanischen Ordnung, dem Postamente weniger Höhe giebt, als dem Gebälke. Bey allen aber fällt die Höhe des Gebälkes zwischen drey und fünf Model, die vom Fußgestelle aber, zween einige Fälle ausgenommen, zwischen 4 und $6\frac{2}{3}$.

II. Der Boden, in Absicht auf dessen Festigkeit.

§. 23.

Ein Gebäude auf Felsen steht allerdings fester und sicherer, als wenn es nur auf Sand ruht. Dieses wird überhaupt jeder zugeben. Indessen gränzen doch diese zween äußersten Fälle nahe aneinander. Ein Gebäude mag immer auf einem Fels ruhen, so läßt sich immer noch fragen, worauf der Fels ruhe? vielleicht auf einem andern, dieser auf einem dritten, und sofort. Geht es nun damit von Fels zu Fels bis zum Mittelpunct der Erde fort, so hört das fernere Fragen auf, und man kann sich zufrieden geben. Es läßt sich aber ein solches Fortgehen nicht beweisen, und nicht selten finden sich unter dem ersten Felsen, worauf das Gebäude unmittelbar ruht, Schichten von Sand, Kies, Erde, Letten ꝛc.

und etwan auch Wasser und Moräste, und so ruht das Gebäude vermittelst des Felsens endlich doch auf einem solchen Grunde, auf welchem es unmittelbar schwerlich oder gar nicht stehen könnte.

§. 24.

Diese Betrachtung leitet uns ziemlich auf den Satz, daß man in der Baukunst von dem Begrif eines absolute festen Grundes abstrahiren, und sich an denjenigen Grad der Festigkeit halten müße, der wenigstens das Gebäude zu tragen zureichend ist. Daß man auf den Fels bauen kann, rührt daher, weil derselbe sich seit undenklichen Jahren schon feste eingesenkt hat, und weil sein Gewicht durch die Last des Gebäudes nicht merklich vermehrt wird. Es hat indessen mit dem Einsenken eine besondere Bewandnis. Man findet zuweilen, daß Steine von gewisser Größe, die auf der Erde lagen, sich mit der Zeit einsenken, zuweilen aber geschieht es auch, daß Steine aus der Erde wieder aufwärts getrieben werden, und endlich ganz oben liegen. Die Abwechselung der Feuchtigkeit und der Wärme und andere in der Erde befindliche Umstände mögen zu diesen ganz entgegengesetzten Würkungen viel beytragen. Was mir hierüber vorgekommen, ist, daß ich im Frühjahr bey aufthauendem Wetter in Gärten Pfähle gesehen, die das Erdreich einen bis zween Zolle hoch aufwärts getrieben hatte.

§. 25.

§. 25.

Da man nicht aller Orten Felsen findet, worauf die Gebäude gegründet werden könnten, und man sich daher mit einem Boden begnügen muß, der entweder an sich schon zureichend feste ist, oder durch Kunst fester gemacht werden muß, so macht die Untersuchung von der Güte des Bodens einen der schwersten Theile der Baukunst aus, und dieser ist noch dermalen fast ganz empirisch. Es geschieht auch noch zuweilen, daß man Gebäude, ehe sie vollendet sind, wiederum abtragen muß, wenn man anfängt zu bemerken, daß der Grund zu schwach ist. Eine breitere und tiefere Grundmauer hätte vielleicht den Mangel der Festigkeit des Bodens ersetzt. Man hätte es aber freylich voraus wissen müßen.

§. 26.

Man sieht leicht, daß es hiebey auf verschiedene Stücke ankömmt. Einmal müßte man für die Festigkeit des Bodens und deren verschiedene Grade ein verständliches Maaß haben, und zugleich auch im Stande seyn, den Grad der Festigkeit durch vorläufige Proben zu bestimmen. Sodann kommt es auf die Last des ganzen Gebäudes an, weil eigentlich diese der Boden zu tragen hat. Endlich kömmt es auch auf die Art an, wie die zu tragende Last auf dem Grunde vertheilt wird. Ich werde nun bemüht seyn, zu den hieher gehörigen Untersuchungen den Leitfaden zu finden.

§. 27.

§. 27.

Den ersten hieher gehörenden Satz habe ich bereits oben (§. 12) berührt. Jeder Punct des Bodens, auf dem eine Last ruht, trägt desto weniger, auf je eine größere Fläche der Druck der Last vertheilt ist. Oder die Stärke des Druckes auf jeden Punct des Bodens ist gerade wie die ganze Last, und umgekehrt wie die Grundfläche. In eben dieser Verhältniß ist nun auch die Möglichkeit des Einsenkens. Da dieser Satz eine unmittelbare Anwendung von statischen Lehrsätzen ist, so kann derselbe hier ohne weitere Prüfung zum Grunde gelegt werden.

§. 28.

Der andere Satz, den ich anführen werde, betrift die Tiefe des Einsenkens. Und da giebt sowohl Theorie als Erfahrung, daß diese Tiefe bey gleicher Grundfläche und einerley Boden in Verhältniß der Last ist; hingegen ist sie bey gleicher Last und einerley Boden in umgekehrter Verhältniß der Grundfläche. Endlich bey einerley Last und gleicher Grundfläche ist sie in umgekehrter Verhältniß der Festigkeit des Bodens.

§. 29.

Demnach um überhaupt die Tiefe des Einsenkens zu finden, muß die Last durch das Product aus der Grundfläche und der Festigkeit des Bodens, getheilt werden.

§. 30.

§. 30.

Und hinwiederum um die Festigkeit des Bodens zu finden, muß man die Last durch die Grundfläche und die Tiefe des Einsenkens theilen.

§. 31.

In Ansehung dieser Sätze kann man sich leicht gedenken, daß das Einsenken fortdauert, bis der Druck der Last mit dem Gegendruck des Bodens ins Gleichgewicht kömmt. Bey dem Einsenken hat der Boden, sofern er nachgiebt, eine Art von Flüssigkeit, und man kann gewissermassen sagen, daß die Last, nachdem sie sich eingesenkt hat, sich eben so im Gleichgewicht halte, wie ein leichterer Körper im Wasser schwimmt, weil er sich ebenfalls nur bis auf eine gewisse Tiefe einsenkt. Der Unterschied ist nur, daß das, so man bey dem Wasser specifische Schwere nennt, bey dem ungleich weniger flüßigen Boden in einem andern Verstande muß genommen werden, weil man alles mit hinzurechnen muß, was dem Einsenken entgegenwirkt und Ziel setzt. Man kann aber immer sich einen flüßigen Körper von so schwerer Art gedenken, daß die Last sich darin nicht tiefer als in dem Boden einsenke, und das Maaß der specifischen Schwere eines solchen flüßigen Körpers wird zugleich auch das Maaß von dem Grade der Festigkeit des Bodens seyn.

§. 32.

§. 32.

Hierüber habe ich nun mit feinem trockenen Streusand im Herbstmonat 1769 einen Versuch angestellt, um mit dem allerlockersten Boden eine Probe in kleinem anzustellen. Ich durchblätterte damals **Belidors** Ingenieurwissenschaft und Herrn **Succows** mit guter Auswahl und eigenem Nachdenken geschriebene Civilbaukunst. Und da mir dabey der Versuch im Sinn kam, so stellte ich ihn sogleich ohne viele Vorbereitung an. Ich leerte die Sandbüchse in eine Schachtel über einen Zoll hoch, so daß ich den Sand immer eben abstreichen konnte. Sodann stellte ich sachte einen Maaßstab, den ich ebenfalls zunächst bey der Hand hatte, auf den Sand aufrecht, und sahe, daß er sich eine halbe Linie Pariser Maaß einsenkte. Die Basis des Maaßstabes war ganz eben, und hielte 15 Pariser Quadratlinien. Der Maaßstab wog gerade 2 Loth Berliner Gewicht. Ich wiederholte den Versuch, so daß ich den Maaßstab mit 1, 2, 3 - 16 Lothen beschwerte, um zu sehen, wie viel er sich jedesmal einsenken würde. **Die Tiefe des Einsenkens nahm mit dem Gewicht in gleicher Verhältniß zu**, und zwar so, daß auf jede 3 Loth Gewicht eine Linie kam, weil der Maaßstab mit 16 + 2 = 18 Loth Gewicht, sich 6 Linien einsenkte. Nun rechnete ich nach, und fand, daß der Maaßstab, um 18 Loth zu wägen, bey gleicher Basis auf 100 Zoll hätte lang seyn müßen. Da er nun nur 6 Linien oder einen halben Zoll einsank, so folgerte ich daraus, daß dieses einen zweyhundertmal specifice schwereren flüßgen Körper erfordern würde, wenn der Maaßstab bey der Höhe von 100 Zollen sich nur einen halben Zoll einsenken sollte. Da ich nun für die specifische Schwere des Maaßstabes auf einen Cubicfuß Pariser Maaß 94 Pfund Berliner Gewicht gefunden (weil er mit Meßing beschlagen war), so folgte hieraus, daß der Sand in Absicht auf das Einsenken sich als ein flüßiger Körper ansehen ließe, davon ein Pariser Cubicfuß 18800 Berliner Pfund wiegt. Ich legte nachher den Maaßstab zusammen, um die Basis zu verdoppeln, und da fand sichs, daß er mit gleichen Gewichten beschwert, sich nur halb so viel einsenkte, und demnach **die Tiefe des Einsenkens in umgekehrter Verhältniß der Grundfläche war.**

§. 33.

Das Einsenken wird hiebey von der Oberfläche an gerechnet, und dies muß auch seyn, wenn man die Tiefe des Einsenkens der Last proportional setzen will. Man gedenke sich nun als eine bloße Möglichkeit, daß ein ganzes Gebäude mit einemmal auf einem Boden gesetzt werde, der keine absolute Festigkeit hat; so wird es sich bis auf eine gewisse Tiefe einsenken. Es läßt sich aber eben diese Tiefe als diejenige ansehen, wo man bey allmähliger Aufführung des Gebäudes hätte anfangen müssen, den Grundstein

stein zu legen. Denn so würde sich das vollendete Gebäude nicht weiter gesenkt haben. Indessen aber ist hiebey dennoch anzumerken, daß so bald die Grundmauer aufgeführt ist, der übrige leere Raum des dazu gemachten Grabens mit Erde wiederum eben so dichte und feste ausgefüllt werden muß, als es vorhin war. Denn sonst würde sich das Gebäude noch leicht tiefer einsenken, weil es den Grund, worauf es ruht, seitwerts ohne Hinderniß zum Ausweichen bringen könnte. Dieses wird hingegen bey behöriger Ausfüllung des Grabens vermieden.

§. 34.

Da das grössere Gewicht der Last weiter nichts als ein tiefes Eindringen hervorbringt (§. 32), so sieht man, daß **die Festigkeit** eines **Gebäudes schon aus diesem Grunde** von **der Höhe der Grundmauer abhängt.** Das Einsenken ist nur sofern möglich, als der Boden nachgeben kann. Setzt man nun auch, daß der Boden in grösserer Tiefe nicht an sich schon fester sey, so wird dennoch das Einsenken in grösserer Tiefe schwerer, weil mehrere Theile ausweichen müssen. Sodann ist für sich klar, daß die Beschaffenheit des Bodens auch mit in Betrachtung kömmt. Der angefeuchtete Sand trägt viel besser als der trockene, wenn er aber zu viel naß ist, und gleichsam im Wasser schwimmt, so trägt er ebenfalls weniger. Ein Boden von abgerundeten glatten Kieselsteinen ist

ist zum Ausweichen, dahingegen ein Boden von rohen irregulären und eckigten Felsenstücken viel fester hält. **Selbst die Größe solcher Steine trägt zur Festigkeit mit bey**, weil sie nicht nur an sich schwerer sind, sondern sich, wenn sie weichen sollen, mehr Raum machen müssen, und dieses wegen der Rauhigkeit und stärkeren Anreibens weniger thun können. Daher kömmt es auch, daß man eine 10 Fuß tiefe Lage solcher Felsenstücke für eben so feste ansieht, als wenn es ein Fels von gleicher Größe wäre. Eine solche Lage, so schlecht auch unterhalb der Boden ist, läßt sich als ein von Natur formirtes Gewölbe ansehen, dessen Festigkeit von der Verschränkung der Felsenstücke herrühret. Bey kleinerem Kiese, wenn die Lage tief genug ist, muß eine 4 bis 5 Fuß hohe Grundmauer das ersetzen, was an der absoluten Festigkeit abgeht.

§. 35.

Bey erdichtem Boden versucht man mit einer Hacke, ob sie viel oder wenig eindringt, und nach diesem Eindringen schätzt man die Tiefe, so die Grundmauer haben soll. Dieses Verfahren hat mit vorhin angegebener Theorie des Einsenkens eine nahe Verbindung. Nur kömmt das Schätzen des Eindringens der Hacke auf bloße Handgriffe und Erfahrung an. Die Hacke kann z. E. das einemal stumpfer seyn als das andere, und so kann der Arbeiter auch bald stärker bald schwächer hacken. Dabey ist dennach

nach nicht viel mathematisches, das sich auf sichere Berechnungen bringen ließe. Man würde aber die Sache auf viel zuverläßigere Re- Regeln bringen können, wenn man ein aufrecht gestelltes Parallelipipedum oder Cylinder von bestimmter Höhe, Breite und Dicke gebrauchte, und für jede Arten des Erdreichs die Höhe bestimmte, aus welchen ein Gewicht von gegebener Größe fallen muß, um das Parallelipipedum bis auf eine bestimmte Tiefe in das Erdreich einzuschlagen. Die Brauchbarkeit dieses Verfahrens erhellet schon aus denen Versuchen, die ehemals wegen des Streits über die lebenden Kräfte angestellt worden. **Das Gewicht mit der Höhe multiplicirt und durch das Product der Basis und der Tiefe des Eindringens dividirt, wird das Maaß von der Festigkeit des Bodens geben, und eben diesem Maaß muß auch die Last des Gebäudes durch das Product aus der Basis und Tiefe der Grundmauer dividirt, gleich seyn.** Es bleibt, um eine wirkliche Gleichung zu erhalten, hiebey noch ein Coefficient von beständiger Größe zu bestimmen, und dieser muß durch wirkliche Versuche gefunden werden.

§. 36.

Setzt man demnach

die Basis des Parallelipipedum $= b$
das auffallende Gewicht - - - - $= p$
die Höhe des Falles - - - - - - - $= h$
die Tiefe des Eindringens - - - - $= t$

ferner

die Last des Gebäudes - - - - - $= l$
die Tiefe der Grundmauer - - - $= T$
die Basis der Grundmauer - - $= B$
endlich die Festigkeit des Bodens $= f$

so ist

$$f = \frac{h\,p}{b\,t} = \frac{n.\,l}{B\,T}$$

Hier muß der Coefficient n durch Versuche bestimmt werden, indem man nemlich für einen Boden von bestimmter Festigkeit, oder für welchen man $hp : bt$ gefunden, die Verhältniß $l : BT$ als durch die Erfahrung bewährt annimmt.

§. 37.

Wenn man aber auch n gefunden, so läßt die herausgebrachte Formel dennoch die Verhältniß zwischen B, T unbestimmt, weil in derselben nur das Product B T vorkömmt. Es giebt aber wohl auch Gründe, wodurch B mit T in jeden Fällen proportionirt werden kann. Die erst gegebene Formel beruht eigentlich nur auf dem Begriff des **perpendiculären Einsenkens**. Nun kömmt aber auch noch der Begriff des **Wankens** vor. Ein Gebäude hat durch Erdbeben, Stöße von Sturmwinden und andere Arten äußerer Gewalt Erschütterungen auszuhalten, die es zum Wanken bringen können.

nen. Diesem wird nun unstreitig durch eine tiefere Grundmauer besser gesteuert, als wenn sie weniger tief ist, und aus diesem Grunde muß selbst in gutem Erdreich die Grundmauer einige Tiefe haben. Was Gewohnheit, Erfahrung und theils auch Gründe hiebey gelehrt haben, ist, daß man die Tiefe der Grundmauer nach der Höhe der Hauptmauern des Gebäudes bestimmt, und zu jener $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ von dieser nimmt, je nachdem das Erdreich mehr oder minder feste ist.

§. 38.

Allein außer dem, daß auch hierin etwas willkührliches oder nicht genug bestimmtes zurücke bleibt, so sieht man theils überhaupt, theils auch aus der angegebenen Formel, daß die Verhältniß zwischen B, T vielmehr aus Gründen der Sparsamkeit, als aus mechanischen Gründen bestimmt wird. Auf lettichtem zähen Boden legt man statt der Grundmauer einen Rost von der Größe des ganzen Gebäudes. Dadurch kann die Last des Gebäudes auf seine ganze Grundfläche vertheilet werden, wenn man statt des Rostes einen ganzen Boden macht. Das Einsenken wird dadurch so vermindert, daß es vollends unmerklich wird. Ja man kann, wenn man noch dauerhafter bauen will, statt des hölzernen Rostes, ein unterwerts gehendes Gewölbe von starkem Mauerwerke machen. Man gräbt die Erde auf 8 bis 10 Fuß tief aus, und macht den Grund eben. Auf diesen wird eine 2 Fuß dicke Mauer, und auf dieser die aufwerts gehende Schwibbögen gebaut, auf welchen in Form eines Gegendruckes die Mauern und Scheidewände des Gebäudes ruhen. Und damit wird die Last des Gebäudes auf die ganze Basis desselben durchaus vertheilt, und das Gebäude ist, als wenn es auf einem gleichgrossen Felsen ruhete, und von einem Stück wäre. Die Fäulung des Fundaments ist viel weniger als bey hölzernen Rösten zu besorgen, und die Keller sind vom Eindringen des Wassers frey 2c. Das morastige Erdreich allein ausgenommen, würde diese Bauart in jedem andern Boden angehen. Da sie aber kostbarer ist, so sucht man freylich, ob man sich nicht mit bloßen Grundmauern begnügen könne, und daher kommt es eben, daß man wegen der Höhe und Dicke der Grundmauern so ängstlich Regeln von der Baukunst fordert.

§. 39.

Indessen scheint es doch nicht, daß sich viel dabey gewinnen lasse. Denn die Formel schreibt vor, wie groß das Product BT werden müsse. Es ist aber dieses Product der ganzen Masse der Grundmauer gleich, oder wenigstens proportional. Und damit ist in Absicht auf die Menge der zur Grundmauer erforderlichen Baumaterialien nichts abzugewinnen, wenn man einmal den Ort gewählt, und die Größe und Last des Gebäudes bestimmt hat. Darauf aber hat man allerdings zu denken, daß die Grundmauer bey allzugroßer Breite nicht zu niedrig, noch bey allzugroßer Tiefe nicht zu dünne werde, wenn man

man doch einmal bey der durch die Formel bestimmten Masse bleiben will. Um hier das rechte Mittel zu treffen, setzt man, daß die Grundmauer da, wo die Hauptmauer auf derselben steht, nicht viel dicker als diese sey. Man läßt aber, um eine grössere Basis zu erhalten, ihre Dicke unterwerts in Form einer Pyramide anwachsen, und da wird das übrige durch die Abdachung oder Böschung bestimmt, so daß die Grundmauer auf jede drey Fuß Tiefe um einen Fuß dicker wird. Setzt man demnach die obere
Fig. 3. Dicke der Grundmauer $AB = c$, die Höhe $AC = T$, die Basis $CE = B$, und $CD = AB$, so hat man

$$DE = \tfrac{1}{3} AC$$

demnach $B - c = \tfrac{1}{3} T$

Sodann ist $B.T = a$

eine bestimmte Größe. Aus diesen beyden Gleichungen erhält man nun

$$B = + \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{4}cc)}$$
$$\tfrac{1}{3}T = - \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{4}cc)}$$

oder, wenn man überhaupt

$$DE = m.AC$$

setzt,

$$B = + \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(ma + \tfrac{1}{4}cc)}$$
$$mT = - \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(ma + \tfrac{1}{4}cc)}$$

§. 40.

Mit dem sumpfigen Boden ist weiter nichts anzustellen, als daß er entweder ausgeräumt werde, dafern er nicht tief ist, oder daß man ihn durch eingeschlagene Pfähle und Schutt dicker und fester zu machen suche. Man kann auch, wenn er zu schlammicht ist, Steine, Sand und ungelöschten Kalch hineinwerfen, oder auch hineinkneten, und dadurch eine Grundlage für das Gebäude erhalten, welche, besonders wenn der Kalch recht anzieht, einer soliden Mauer gleich ist.

III. Die Gewölber und Schwibbögen.

§. 41.

Unter die Speculationen des **Galilaei**, die nachgehends zu nützlichen Entdeckungen Anlaß gegeben haben, gehört auch das Problem von der Kettenlinie, welches **Jacob Bernoulli** wiederum hervorzog, und den Geometern seiner Zeit aufzulösen vorgab. Die Frage war, die Natur der krummen Linie zu bestimmen, die eine an beyden Enden aufgehangene Kette durch ihre natürliche Schwere bildet. Man fand dabey bald, daß eben diese Linie, wenn man sie auswerts kehrt, zugleich die Figur eines Gewölbes angiebt, welches sich durch sein eigenes Gewicht unterstützt. Da man aber dennoch bey Auflösung des Problems die Kette als eine biegsame und gleichförmig schwere Linie ohne Dicke ansahe, so mußte hinwiederum auch das Gewölbe als eine bloße Linie oder Fläche angesehen werden, und so sahe man wohl, daß die Krümmung eines Gewölbes von gewisser Dicke von der Krümmung der Kettenlinie in etwas abweichen würde.

§. 42.

Um dieses zu untersuchen werde ich erstlich das Gewölbe als unendlich dünne ansehen, und dessen Krümmung, welche nun ebenfalls die Krümmung der Kettenlinie seyn wird, bestimmen. Es sey demnach ADB die Figur eines solchen Gewölbes. An einem beliebigen Punct M ziehe man die Tangente TME, und die Normallinie MR, nebst der horizontalen Ordinate MP und der verticalen ML, EC sey die Are oder die durch den Scheitelpunct D gehende Verticallinie. Nun ist das Gewicht des Bogens DM seiner Länge proportional, und der Bogen drückt in M nach der Richtung MQ, in D nach der Richtung GD. Setzt man demnach, daß in dem Triangel EPM die Seite EP das Gewicht des Bogens vorstelle, so wird EM den Druck nach der Richtung MQ, und PM den Druck nach der Richtung GD vorstellen.

Fig. 4.

§. 43.

Nun muß der Druck in D von beständiger Größe seyn, so groß oder klein man auch immer den Bogen DM annimmt. Setzt man demnach den Druck $=p$, und den Bogen DM oder dessen Gewicht $=v$, so ist

$$PM:PE=p:v$$

$$v=p\cdot\frac{PE}{PM}=p.\,\text{tang.}\,EMP.$$

Diese Gleichung bestimmt nun an sich schon die Natur der krummen Linie.

§. 44.

Man setze ferner

$$DP=x \quad DC=a \quad EMP=\omega$$
$$PM=y \quad CA=b$$

so wird

$$v=p.\,\text{tang.}\,\omega$$

seyn. Man ziehe AQ auf MT senkrecht, und sehe A als einen Ruhepunct an, so drückt der Bogen DM den Bogen MA eben so, als wenn derselbe senkrecht auf den Hebel AQ in Q drückte; Es ist demnach das Moment

$$M=v.\,\text{cosec.}\,\omega.\,AQ$$

Nun ist

$$AQ=AT\,\text{sin.}\,\omega$$
$$AT=y+(a-x)\,\text{cot.}\,\omega-b$$

demnach

$$M=v(y+(a-x)\,\text{cot.}\,\omega-b)$$
$$=p\,(a-x-(b-y)\,\text{tang.}\,\omega)$$

Man ziehe AN mit MT parallel, so ist

$$LM=a-x$$
$$LA=b-y$$
$$LN=(b-y)\,\text{tang.}\,\omega$$

demnach

$$MN=AK=a-x-(b-y)\,\text{tang.}\,\omega$$

und das Moment

$$M=p.\,AK$$

§. 45.

Man ziehe ferner an A die Tangente GA, und aus dem Durchschnittspunct g fälle man $g\gamma$ auf AC senkrecht, so ist der Mittelpunct der Schwere des Bogens AM irgend in der Linie $g\gamma$, demnach dessen Moment

$$M' = AM.A\gamma$$

Es ist aber

$$AM = p(\text{tang.}\, gAC - \text{tang.}\, EMP)$$

demnach

$$M' = p.Ag(\text{tang.}\, gAC - \text{tang.}\, EMP)$$
$$= p.(g\gamma - \gamma h) = p.gh = p.AK$$

Da nun beyde Momente M, M' einander gleich seyn sollen, und in der That

$$M = p.AK$$
$$M' = p.AK$$

ist, so sieht man, daß der Bogen AM in M gerade so stark gegen den Bogen DM als dieser gegen jenen drückt.

§. 46.

Da endlich

$$v = p.\,\text{tang.}\,\omega$$
$$dx = dv\,\text{sin.}\,\omega$$
$$dy = dv.\text{cos.}\,\omega$$

ist, so wird

$$dx = p\,\text{sin.}\,\omega.\,d\,\text{tang.}\,\omega = -\frac{p\,d\,\text{cos.}\,\omega}{\text{cos.}\,\omega^2}$$

$$dy = p.\,\text{cos.}\,\omega.\,d\,\text{tang.}\,\omega = \frac{d\,\text{sin.}\,\omega}{\text{cos.}\,\omega^2}$$

und

und demnach

$$x = p(\text{sec.}\,\omega - 1)$$
$$y = p\,\text{log.}\,\text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\omega)$$

und, wenn log. e = 1 gesetzt wird,

$$x + 1 = \frac{e^{y:p} + e^{-y:p}}{2}$$

§. 47.

Diese Berechnung ist für den Fall, wo man von der Dicke des Gewölbes abstrahirt, oder dieselbe als unendlich klein ansieht. Wir wollen nun aber dem Gewölbe eine wirkliche Dicke geben, um zu sehen, wiefern die Rechnung anders ausfällt. Es sey demnach das Gewölbe HBL, seine äußere Fläche NB, die innere MA. Fig. 5. Die Dicke werden wir so nehmen, daß eine gerade Linie NR die beyden Flächen aller Orten immer senkrecht durchschneidet, wenn sie durch die eine senkrecht geht, und daß der Theil NM aller Orten gleich ist. Die Frage ist nun, welche Figur ein solches Gewölbe haben soll, damit es ohne alle Widerlage sich durch sein eigenes Gewicht unterstütze.

§. 48.

Nachdem man die Normallinie NR, die Axe BC, die Ordinaten NO, MP, NS und die Tangente NT gezogen, so setze man

AB

$$AB = NM = a$$
$$AP = x \quad BQ = \xi$$
$$PM = y \quad QN = \eta$$
$$AM = \upsilon \quad NTS = \omega$$

so ist

$$a:(\eta - y) = d\upsilon : dx = 1 : \sin.\omega$$
$$a:(x + a - \xi) = d\upsilon : d\eta = 1 : \cos.\omega$$
$$\eta - y = a \sin.\omega \qquad \eta = a\, s.\omega + y$$
$$x + a - \xi = a \cos.\omega \qquad \xi = x + a - a \cos.\omega$$
$$d\eta = a\, d\, s.\omega + dy \qquad d\xi = dx - a\, d \cos.\omega$$

demnach der Raum

$$AMNB = \int \eta\, d\xi - \int y dx + (x + a - \xi).\left(\frac{y + \eta}{2}\right)$$

Ist nun auch hier p der Druck in AB, so haben wir, wie vorhin,

$$p \operatorname{tang}.\omega = AMNB$$

demnach

$$pt\omega = \int \eta d\xi - \int y dx + (x + a - \xi).\left(\frac{\eta + y}{2}\right)$$

§. 49.

Nun ist

$$\eta d\xi = a\, s.\omega dx + y dx - a^2 s.\omega d \cos.\omega - a y d \cos.\omega$$

folglich

$$pt\omega = a \int \sin.\omega dx - a^2 \int \sin.\omega. d\cos.\omega - a \int y d\cos.\omega$$
$$+ \tfrac{1}{2} a^2 s.\omega. \cos.\omega + a y \cos.\omega$$

dem=

demnach

$$pdt\omega = a \sin.\omega dx - a^2 \sin.\omega d \cos.\omega - a y d \cos.\omega$$
$$+ \tfrac{1}{2} a^2 s.\omega. d \cos.\omega + a y d \cos.\omega$$
$$+ \tfrac{1}{2} a^2 \cos.\omega d \sin.\omega + a \cos.\omega dy$$

oder

$$pdt\omega = ad\upsilon. \sin.\omega^2 - \tfrac{1}{2} a^2 s.\omega d\cos.\omega + a \cos.\omega^2 d\upsilon$$
$$+ \tfrac{1}{2} a^2 \cos.\omega. ds.\omega$$

oder endlich

$$p dt\omega = a d\upsilon + \tfrac{1}{2} a^2 d\omega$$

und demnach

$$pt\omega = a\upsilon + \tfrac{1}{2} a^2 \omega$$

§. 50.

Es ist demnach

$$\upsilon = \frac{pt\omega}{a} - \tfrac{1}{2} a\omega$$

$$dx = d\upsilon. s.\omega = \frac{p}{a} s.\omega. dt\omega - \tfrac{1}{2} a s\omega. d\omega$$

$$dy = d\upsilon. \cos.\omega = \frac{p}{a} \cos.\omega. dt\omega - \tfrac{1}{2} a \cos.\omega. d\omega$$

und hieraus

$$x = \frac{p}{a} \sec.\omega + \tfrac{1}{2} a \cos.\omega - \tfrac{1}{2} a \frac{p}{a}$$

$$y = \frac{p}{a} \log. t.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{2} a \sin.\omega$$

und

und hieraus

$$a\,\mathrm{cos}.\omega=\tfrac{1}{2}\left(2x+a-\frac{2p}{a}\right)\pm\sqrt{\left(2p+\left(x+\tfrac{1}{2}a-\frac{p}{a}\right)^2\right)}$$

so daß man demnach ω durch x, und sodann y durch ω findet.

§. 51.

Es ist aber auch

$$\eta=y+a\,\mathrm{sin}.\omega$$
$$\xi=x+a\,(1-\mathrm{cos}.\omega)$$

demnach findet sich

$$\xi=\frac{p}{a}(\mathrm{sec}.\omega-1)+\frac{a}{2}(1-\mathrm{cos}.\omega)$$

$$\eta=\frac{p}{a}\,\mathrm{log.t}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\omega)+\frac{a}{2}.\mathrm{sin}.\omega$$

§. 52.

Hieraus aber wird nun ferner

$$\frac{x+\xi}{2}=\frac{p}{a}(\mathrm{sec}.\omega-1)=X$$

$$\frac{y+\eta}{2}=\frac{p}{a}\,\mathrm{log.\,tang.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\omega)=Y$$

Da nun dieses die vorhin (§. 46.) gefundenen Werthe für die Kettenlinie sind, und X, Y als die Ordinaten und Abscissen für jeden mitten auf NM liegenden Punct m angesehen werden können, so folgt hieraus, daß die mitten durch das Gewölbe gezogene Linie HmaL die Kettenlinie ist.

§. 53.

§. 53.

Man hat demnach nicht nöthig, die Linien NB, MA besonders zu berechnen oder zu construiren, weil man sich an die viel einfachere Kettenlinie HmaL halten kann, weil, wenn man diese construirt hat, jene dadurch, daß man aller Orten mN = mM macht, ohne Mühe gezogen werden können,

§. 54.

Für die Kettenlinie ist, wenn Y gleichförmig anwächst

X = 0,00000	Y = 0
0,05026	- - - - - n
0,21586	- - - - 2n
0,49641	- - - - 3n
0,91000	- - - - 4n
1,47851	- - - - 5n
2,23226	- - - - 6n
3,21140	- - - - 7n
4,46806	- - - - 8n
6,06876	- - - - 9n
8,10000	- - - 10n

und der Halbmesser der Krümmung in dem Scheitelpunct a ist

$$R=9{,}430588.\,n^2$$

§. 55.

Nun ist der Halbmesser der Krümmung für den Scheitelpunct A der innern Wölbung um aA = ½a kleiner; demnach

$$R'=9{,}430588\,n^2-\tfrac{1}{2}a$$

Die-

Dieser Halbmesser kann demnach nicht nur = 0, sondern negativ werden. Im ersten Fall laufen die beyden inwendigen Seiten der Wölbung
Fig. 6. in A in eine Spitze zusammen, und dieses giebt der Wölbung eine wirklich gothische Gestalt.

§. 56.

Der andere Fall, wo nemlich R′ negativ wird, giebt der innern Wölbung nicht nur die
Fig. 7. zugespitzte Gestalt h α l, sondern es muß dabey der Raum α g k mit doppelt schwererer Materie ausgefüllt werden, wenn das Gewölbe sich durch seine eigene Schwere unterstützen soll. Da aber in diesem Fall das Gewölbe viel zu ungeheuer dicke wird, so kömmt derselbe in der Ausübung schwerlich vor. Ich wende mich daher zu denen Fällen, wo R′ positiv bleibt.

§. 57.

Fig. 8. Es sey demnach A D a f C F ein Gewölbe, welches mit der Kettenlinie E B e parallel laufe, so daß aller Orten DB = B C sey. Ungeachtet ein solches Gewölbe sich durch sein eigen Gewicht unterstützt, so will dieses doch nicht sagen, daß es ewig dauern müsse. Es wird mit der Zeit baufällig, und da ist die Frage, wo es brechen werde? Um diese Frage, zu beantworten, so sieht man überhaupt so viel, daß das obere Theil G H zum Einsinken abzielt, und ehe es einsinken kann, die untern Theile A D, a d aufwerts biegen muß. Man ziehe nun aus D eine gerade Linie, welche die Kettenlinie E B e berühre. Durch den Be-

rührungspunct B ziehe man C B D auf A B senkrecht, und eben so auch auf der andern Seite c d, so bestimmen diese Linien C D, c d die beyden Oerter, wo das Gewölbe am leichtesten brechen kann. Denn da der Theil A D aufwerts brechen muß, wenn der obere Theil einsinken soll, so ist A der Ruhepunct, um welchen sich der Theil A D in Form eines Hebels aufwerts drehen muß. Da nun der Bruch nach der kürzesten als der schwächsten Linie geschieht, so muß unter allen Linien, die sich durch das Gewölbe senkrecht ziehen lassen, diejenige das Brechen des Gewölbes am meisten möglich machen, welche auf A B senkrecht ist, demnach die Linie D C. Dieses will nun allerdings nicht sagen, daß der Bruch allemal in D C, d c geschehen müsse. Denn das Gewölbe kann aus zufälligen Ursachen in andern Puncten mehr und früher mürbe werden, und dann wird es auch in andern Puncten brechen, ungeachtet überhaupt betrachtet D C, d c die Stellen sind, wo der Bruch am leichtesten möglich ist.

§. 58.

Da endlich bey dieser Berechnung der gleiche Druck und Gegendruck nach der Richtung der Tangenten zum Gründe gelegt worden, so erfordert dieses hinwiederum, daß, wenn das Gewölbe aus gehauenen Steinen zusammengesetzt werden soll, diese Steine sämtlich so gehauen werden, daß die Fugen die Kettenlinie senkrecht durchschneischneiden. Denn alsdann werden sie sich auch ohne Mörtel, blos durch ihr eigen Gewicht in ihrer Lage erhalten können. Um so viel mehr noch, wenn sie in den Fugen mit Mörtel noch fester verbunden werden.

§. 59.

Es geschieht indessen nicht immer, daß ein Gewölbe außer seinem eigenen Gewichte weiter nichts als etwan einen leichten hölzernen Boden des darauf gelegten Stockwerkes zu tragen hat. Gewöhnlich sind Gewölber und Schwibbögen gewidmet, mehr zu tragen. In solchen Fällen aber läßt sich die Last nicht so schlechthin mit der Länge des Bogens v vergleichen, sondern sie muß überhaupt als eine Function von x, y angesehen werden, die für besondere Fälle besondere Bestimmungen erhält.

§. 60.

Hiebey sind nun überhaupt zween Fälle möglich. Denn entweder wird die auf dem Gewölbe ruhende Last nicht mit zum Gewölbe gerechnet, sondern nur als eine das Gewölbe druckende Last betrachtet, so daß das Gewölbe für sich gebaut, und erst nachher die Last aufgelegt wird. Oder man nimmt die Last gleich anfangs mit zum Gewölbe, wie es z. E. bey Brücken ꝛc. geschieht. In diesem letzteren Fall sieht man das Gewölbe nicht als durchaus gleich dick an. Es kann ungleich dick gemacht werden, und dieses giebt sodann den Gewölbsteinen eine dazu

dazu dienende Figur, Lage und Größe. Wir wollen beyde Fälle, jeden besonders, vornehmen.

§. 61.

Es sey im ersten Fall DAB die inwendige Wölbung des gleichdicken Gewölbes, AC die Axe desselben, QE eine horizontale Linie, worauf die Abscissen $EQ = y$ genommen, und die Ordinaten $QM = x$ gesetzt werden. Man ziehe in M die Tangente MT, und mache den Winkel $MTQ = \omega$. Endlich setze man, wie vorhin, den Druck des Gewölbes in $A = p$, und das Gewicht der auf dem ganzen Bogen AM liegenden Last sey $= Q$, so haben wir, wie oben,

$$p.\tan\omega = Q$$

Hier ist nun Q eine Function von x, oder y, oder von beyden zugleich, und da

$$\tan\omega = dx : dy$$

ist, so erhält man in jedem besonderen Fall entweder unmittelbar eine Gleichung für x, y, oder zwo Gleichungen für x, y, ω.

§. 62.

Man setze z. E. es sey $Q = y$, so ist

$$p \tan\omega = \frac{p\,dx}{dy} = y$$

demnach

$$px = \tfrac{1}{2}y^2$$

Die innere Wölbung ist demnach in diesem Fall, wo die Last über dem ganzen Gewölbe gleich vertheilt ist, parabolisch.

 §. 63.

§. 63.

Man setze als ein zweytes Beyspiel, es sey Q in Verhältniß des Raumes AMQE, wie dieses bey Brücken, Wasserleitungen ꝛc. statt hat, so ist

$$p \tan g. \omega = \int x\,dy$$

demnach

$$p\,d t\omega = x\,dy = x\,dx.\cot.\omega$$

$$p t\omega . d t\omega = x\,dx$$

$$p t\omega^2 = x^2 + \mathrm{const.}$$

Nun ist in A der Winkel ω, und damit auch $t\omega = 0$. Setzt man demnach $AE = a$, so ist

$$p\,t\,\omega^2 = x^2 - a^2$$

§. 64.

Hieraus folgt nun

$$p t\omega = \sqrt{p} \cdot \sqrt{(x^2 - a^2)} = \int x\,dy$$

und, wenn man differentiirt,

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} \cdot \sqrt{p} = x\,dy$$

oder $dy : \sqrt{p} = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$

folglich

$$y : \sqrt{p} = \log.(x + \sqrt{(x^2 - a^2)}) + \mathrm{Const.}$$

Nun muß $y = 0$ werden, wenn $x = a$ wird, demnach ist

$$y : \sqrt{p} = \log.\left(\frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a}\right)$$

§. 65.

§. 65.

Man setze hier $a = 1$, so wird alles durch die obere Dicke AE bestimmt, und man erhält

x	ny	x	ny
1,0	0,0000	1,9	5,4600
1,1	1,9262	2,0	5,7195
1,2	2,7028	2,1	5,9923
1,3	3,2852	2,2	6,1905
1,4	3,7654	2,3	6,4060
1,5	4,1797	2,4	6,6103
1,6	4,5469	2,5	6,8045
1,7	4,8780	2,6	6,9897
1,8	5,1808	2,7	7,1667
		3,0	7,6555

Hiebey kann nun n nach Belieben angenommen werden, je nachdem man für gleiche Höhen AE und AC die untere Oefnung BD weiter oder enger haben will. Die Figur ist übrigens nach diesen Zahlen in Form eines Brückengewölbes gezeichnet.

§. 66.

Man setze nun als ein drittes Beyspiel, welches zugleich auch den zweyten Fall (§. 60.) aufklären wird, die Last Q sey dem Raum AMRE gleich, welcher durch die Normallinie MR bestimmt wird. Hier ist demnach

$$p \tan g.\omega = \int x\,dy + \tfrac{1}{2} x^2 \tan g.\omega$$

Aa 3 folglich

folglich, wenn man differentiirt,

$$p\,d\,tang.\,\omega = x\,dy + x\,dx.\,t\omega + \tfrac{1}{2}x^2\,dt\omega$$

Da nun

$$dy = dx.\,\cot\omega$$

so ist

$$p\,dt\omega = \frac{x\,dx}{tang.\omega} + x\,dx.\,tang.\omega + \tfrac{1}{2}x^2\,dt\omega$$

demnach

$$(2p - xx)\,t\omega.\,dt\omega = 2x\,dx\,(1 + t\omega^2)$$

$$\frac{t\omega.\,dt\omega}{1 + t\omega^2} = \frac{2x\,dx}{2p - xx}$$

$$\tfrac{1}{2}\log.(1 + t\omega^2) = -\log.(2p - xx) + Const.$$

Wenn $\omega = o$ ist, so muß $x = a$ seyn, dis giebt

$$\log.\sec.\omega = \log.\left(\frac{2p - aa}{2p - xx}\right)$$

demnach

$$\sec.\omega = \frac{2p - aa}{2p - xx}$$

§. 67.

Hieraus folgt nun

$$x = \sqrt{(2p - aa)}.\sqrt{\left(\frac{2p}{2p - aa} - \cos.\omega\right)}$$

$$-dx = \frac{d\cos.\omega.\sqrt{(2p - aa)}}{2\sqrt{\left(\frac{2p}{2p - aa} - \cos.\omega\right)}}$$

dy

$$dy = \frac{dx}{tang.\omega} = \frac{\cos.\omega.\,d\omega.\sqrt{(2p - aa)}}{2\sqrt{\left(\frac{2p}{2p - aa} - \cos.\omega\right)}}$$

oder auch

$$dy = \frac{dx\,(2p - xx)}{\sqrt{(a^4 - 4a^2p + 4x^2p - x^4)}}$$

Mit diesen beyden Formeln für dy ist nicht viel anzufangen. Die erstere, wenn man Kürze halber

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(2p - aa)} = m$$

$$\sqrt{\left(\frac{2p - aa}{2p}\right)} = \mu$$

setzt, giebt die Reihe

$$\begin{aligned} y : m = {} & \mu.\sin.\omega \\ & + \tfrac{1}{2}\mu^3\left(\tfrac{1}{4}\sin.2\omega + \tfrac{1}{2}\omega\right) \\ & + \frac{3}{2.4}\mu^5\left(\tfrac{1}{12}\sin.3\omega + \tfrac{1}{4}s.\omega\right) \\ & + \frac{3.5}{2.4.6}\mu^7\left(\tfrac{1}{32}s.5\omega + \tfrac{1}{4}s.3\omega + \tfrac{3}{8}\omega\right) \\ & + \&c. \end{aligned}$$

Ich habe übrigens für den Fall, wo $a = 1$ und Fig. 10
$2p = \frac{625}{49}$ ist, die Wölbung theils berechnet theils construirt, und darinn zugleich die Linien von 10 zu 10 Graden gezeichnet, nach welchen die Steine müßen geschnitten werden. Das Gewölbe ist ziemlich flach. Es wird aber mehr abgerundet, wenn a größer angenommen wird, und

 in

in sofern richtet sich die Ründung nach der aufliegenden Last.

IV. Die Wiederlagen und das Mauerrecht.

§. 68.

Ein Gewölbe, so wie auch ein Schwibbogen, gebraucht auf beyden Seiten eine Wiederlage, sofern der Druck desselben auswerts geht, und besonders wird die Wiederlage da nothwendig, wo das Gewölbe auf einer Mauer, oder der Schwibbogen auf Pfosten ruht. Indessen muß man dennoch sagen, daß die Nothwendigkeit solcher Wiederlagen ganz oder gröstentheils wegfallen würde, wenn das Gewölbe oder der Schwibbogen aus einem Stücke ausgehauen
Fig. 8. wäre. Man setze z. E. der Bogen AGafHF bestehe aus einem ganzen Stücke Stein, so ist leicht zu gedenken, daß derselbe nicht nur auf dem ebenen Fundamente AFfa ruhen, sondern noch überdies, ohne zu brechen, einige Last werde tragen können, und daß es hiebey fürnemlich nur theils auf die Festigkeit des Steines, theils auf die Verhältniß der Dicke DC zur Länge AGa und zur Weite Aa ankömmt. Der Stein in Form eines Bogens ausgehauen, wird auf gleiche Stützen AF, af gelegt, immer fester seyn und mehr tragen, als wenn er von gleicher Dicke flach geschnitten, in Form eines Balkens auf eben den Stützen AF, af ruhete.

§. 69.

§. 69.

Nun ist gewöhnlich die Größe der Gewölber und Schwibbögen der Grund, daß sie selten aus ganzen Stücken ausgehauen werden. Setzt man sie aber aus Stücken zusammen, so kömmt alles darauf an, daß sie vermittelst des Mörtels oder des Steinküttes in den Fugen eben so feste seyn, als wenn sie aus einem ganzen Stücke ausgehauen wären. Dieses soll eben nicht ganz unmöglich seyn, und man findet alte römische Mauern, wo die Steine selbst leichter brechen, als der Mörtel. Läßt man sich demnach angelegen seyn, die Fugen so feste zu verbinden, daß sie der Festigkeit der Gewölbsteine nichts nachgeben, so erspart man sich dadurch die Nothwendigkeit einer Wiederlage eben so gut, als wenn das Gewölbe oder der Schwibbogen aus einem Stücke wären. So viel man aber die Fugen schwächer macht, so viel Wiederlage wird dabey nothwendig, und da hat die Art, die Größe und Stärke der Wiederlage zu berechnen, einige Schwürigkeiten.

§. 70.

Lahire, und mit ihm **Belidor** setzen hiebey, daß die Erfahrung lehre, ein circulares Gewölbe, wenn es einfalle, breche gewöhnlich beyderseits bey dem 45ten Grade, und daraus folge, daß daselbst der schwächste Ort sey, und daß demnach die Wiederlage nach dem Drucke, den das Gewölbe in dem 45ten Grade aussteht, müsse be-

bestimmt werden. Es geht mir hier wie Hrn. Succow, welchem ebenfalls diese Art zu schließen nicht ganz einleuchtet. In der That sind dabey verschiedene Fälle aus einander zu setzen. Die Frage war von den Wiederlagen, welche alsdann nöthig sind, wenn die Fugen weiter nicht als durch den bloßen Druck der Schwere, und allenfalls durch das Anreiben zusammengehalten werden. Dieser Fall kömmt nun eigentlich bey wirklichen Gewölbern und Schwibbögen nicht vor, weil bey diesen der Mörtel oder das Steinkütt eben nicht gesparet wird. Wenn demnach solche Gewölbe einfallen, so geschieht es, weil durch die Länge der Zeit, die Wirkung der Luft, der Feuchtigkeit, der Kälte 2c. die Steine endlich vermodern, und die Cohäsionskräfte aufhören. Soll nun hiebey etwas können berechnet werden, so muß man annehmen, daß das Gewölbe durchaus gleichförmig vermodere, oder wenigstens, daß das Vermodern nach einem gewissen Gesetze vertheilet sey.

§. 71.

Fig. 11. Wir wollen nun Kürze halber den ersten Fall setzen. Der halbe Circulbogen ADa stelle das Gewölbe vor, und dieses sey bereits bis auf einen gewissen Grad vermodert, so läßt sichs gedenken, daß es in der That zwey Stellen N, n giebt, wo das Gewölbe beym Einfallen am leichtesten bricht. Die brechende Kraft ist überhaupt betrachtet das Gewicht des ganzen Stückes NCnmDM, wovon für jede Seite die Hälfte genom-

nommen wird. Es werde demnach das Gewicht von NCDM durch MP vorgestellt, so läßt sich diese Kraft in die senkrechte Kraft QM, und in die Parallele NM auflösen. Diese letztere ist nun eigentlich die brechende Kraft. Man setze AC = 1, und den Bogen NC = ω, so ist das Gewicht dem Bogen ω proportional, und es ist

$$PM : NM = 1 : \text{cos}\,\omega$$

demnach die brechende Kraft

$$p = \omega \,.\, \text{cos}\,\omega$$

Diese ist nun irgend ein Maximum, demnach

$$o = dp = \omega \,.\, d\,\text{cos}\,\omega + \text{cos}\,\omega \,.\, d\omega$$

woraus

$$\omega = \text{cot}\,.\,\omega$$

folgt, und damit muß der Bogen

$$CN = 49^\circ.\ 17'.\ 36''$$

seyn. Man findet bis auf einen sehr geringen Unterschied eben diesen Werth, wenn man setzt, das Gewölbe sey bereits so mürbe, daß es nach der Linie PM gerade herunter breche, und demnach das drückende Gewicht ω nur noch den Rest der Cohäsionskräfte, so längs der Linie PM sind, zu überwinden habe. Denn da NM beständig ist, so ist PM in Verhältniß von sec. ω, und damit muß ω, durch sec. ω getheilt, ein Maximum seyn. Es ist aber

$$\frac{\omega}{\text{sec}.\,\omega} = \omega \,.\, \text{cos}\,.\,\omega\,.$$

und

und so erhält man auch hier

$$\omega = \cot.\omega$$

$$\omega = 49^\circ.\ 17'.\ 36''.$$

Demnach bricht das Gewölbe zwar nicht genau in dem 45ten Grad, doch aber nur um einige wenige Grade tiefer. Und in sofern könnte man den ersten Satz des Lahire gelten lassen, wenn er sich gleich nicht auf die Erfahrung berufte.

§. 72.

Ich sehe aber nicht, daß daraus zum Behuf der Wiederlagen etwas könne geschlossen werden, weil diese ein durch Vermoderung mürbe gewordenes Gewolbe oder Schwibbogen nicht aufrecht halten können, und auch eigentlich nicht dazu bestimmt sind. Alles, was aus den erst angeführten Betrachtungen folgt, ist, daß, wenn das Gewölbe in NM, nm, bey dem 49ten Grade am leichtesten bricht, man es, wenn es anfängt baufällig zu werden, inwendig von E gegen M und m bey dem 49ten Grad unterstützen müsse, und daß man durch eine daselbst angebrachte Unterstützung die beste und sicherste Wirkung erhalte. Davon aber ist die Rede nicht, wenn von Wiederlagen gefragt wird. Wir wollen indessen dennoch sehen, wie Lahire seine Rechnung anstellt.

§. 73.

Fig. 12. Es sey DMBANE die Hälfte des Gewölbes oder Schwibbogens, und HFEL die Mauer oder Stütze, auf welcher es aufliegt, MN der Ort, wo es am leichtesten bricht, so setzt Lahire, der Druck des Stückes MBAN sey in MN nach der Richtung RT, welche auf MNC senkrecht ist, am größten. Man sieht leicht, daß vorhin (§. 71.) von dem größten Drucke nach der Richtung MN die Rede war, und daher scheint Lahire diese beyden Richtungen verwechselt zu haben. Da indessen, wenn von Wiederlagen die Rede ist, der Druck nach der Richtung RT allerdings in Betrachtung kömmt, so hat auch Lahire noch weiter nicht gefehlt, als daß er den aus der Erfahrung genommenen Winkel MCB $= 45^\circ$ oder $= 49^\circ$ für den Winkel des größten Druckes nach der Richtung RT ansahe, da es doch eigentlich der Winkel für den größten Druck nach der Richtung MN ist, nach welchem ein vermoderndes Gewölbe einbricht. Wir haben demnach eigentlich nur zu sehen, ob sich für den größten Druck nach der Richtung RT ein Winkel MCB $= \omega$ dergestalt bestimmen lasse, daß in Absicht auf die Theorie der Wiederlagen etwas daraus folge.

§. 74.

Das Gewicht des Stückes MBAN ist dem Bogen MB proportional, und damit können wir es Kürze halber $= \omega$ setzen. Damit ist aber der Druck desselben nach der Richtung RT

$$p = \frac{\omega}{\sin.\omega}$$

dem-

demnach

$$p = 1 + \frac{1}{2.3}\,\text{f.}\,\omega^2 + \frac{1.3}{2.4.5}.\text{f.}\,\omega^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.}\text{f.}\,\omega^5 + \&c.$$

Es wächst demnach der Druck nach der Richtung R'T zugleich mit dem Winkel, ohne irgend ein Maximum zu werden.

§. 75.

Nun sieht Lahire ferner den Punct H als einen Ruhepunct an, um welchen der Theil HFDMNEL durch den Druck des Theils MB AN, als ein gebogener Hebel würde gedreht werden, wenn nicht ein Gleichgewicht da wäre. Um also das Moment zu finden, muß die Kraft p mit HP, der aus H senkrecht auf R'T gezogenen Linie, multipliciret werden. Es sey demnach

$$CA = \alpha \quad MCB = \omega$$
$$CB = \beta$$
$$CF = \gamma$$
$$CQ = \delta$$

so ist nunmehr das Gewicht des Theils

$$MBAN = \tfrac{1}{2}\omega(\beta^2 - \alpha^2)$$

der Druck nach der Richtung RT

$$p = \tfrac{1}{2}(\beta\beta - \alpha\alpha)\,\omega : \text{sin.}\,\omega$$

ferner

$$CR = \tfrac{1}{2}(\beta + \alpha)$$

$$TH = (\delta + CR.\,\text{cos.}\,\omega)\,\text{cot.}\,\omega + CR\,\text{f.}\,\omega - \gamma$$

$$HP = TH.\text{sin.}\,\omega = (\delta + CR\,\text{cos.}\,\omega)\,\text{cos.}\,\omega + CR\,\text{f.}\,\omega^2 - \gamma.\,\text{f.}\,\omega$$

demnach das Moment

$$M = \frac{\beta\beta - \alpha\alpha}{2}.\,\omega\,[(\delta + CR\,\text{cos.}\,\omega)\,\text{cot.}\,\omega + CR\text{f.}\,\omega - \gamma]$$

$$= \frac{\beta\beta - \alpha\alpha}{2}.\,\frac{\omega}{\text{sin.}\,\omega}\,[\delta\,\text{cos.}\,\omega + \frac{\beta + \alpha}{2} - \gamma\,\text{sin.}\,\omega]$$

Es giebt aber dieser Ausdruck nirgend ein maximum, sondern derselbe nimmt von oben herunter beständig ab, und wird da $= 0$, wo RT durch den Punct R geht. Es kann demnach die Bedingung, als ob M irgend ein maximum wäre, nicht gebraucht werden, um die Breite EF dadurch zu bestimmen.

§. 76.

Da indessen für $\omega = 0$ das Moment M, ohne ein eigentliches maximum zu seyn, größer ist, als bey jedem andern Werthe von ω; so können wir $\omega = 0$ setzen, und da wird

$$M = \frac{\beta\beta - \alpha\alpha}{2}\left(\delta + \frac{\beta + \alpha}{2}\right)$$

Man mache CG=GR, so ist

$$\delta + \frac{\beta + \alpha}{2} = QG = Hp$$

demnach

$$M = \frac{\beta\beta - \alpha\alpha}{2}.\,QG = \frac{\beta\beta - \alpha\alpha}{2}.\,Hp$$

Da

Da demnach für $\omega = 0$ der Arm des Hebels HP die Lage und Länge Hp erhält, und

$$\frac{\text{ϐϐ} - \alpha\alpha}{2}$$

das Gewicht des Stückes M B A N vorstellt, wenn der Bogen MB dem Halbmesser CB gleich ist, so setze man das Gewicht von HFDBAEL sey $= P$, und der Mittelpunct der Schwere desselben falle über g, so wird man die Gleichung

$$P.Hg = \frac{\text{ϐϐ} - \alpha\alpha}{2}.Hp$$

erhalten, und dadurch die Breite EF bestimmen können. Man sieht aber leicht, daß hiebey die Wiederlage noch ungleich breiter wird, als sie **Lahire** für $\omega = 45°$ herausbringt, und daß man demnach, weil schon die **Lahirische** Bestimmung ohne Noth zu groß ist, sich bey Tonnengewölben mehr um einen guten Mörtel oder Steinkütt, als um eine so starke Wiederlage umzusehen hat. Wenn man aber dennoch Wiederlagen haben, und nicht lieber eiserne Bindstangen gebrauchen will, so kann man durch die Puncte A, D eine Kettenlinie ziehen, und diese bis zum Fundament verlängern, um zu sehen, wie breit ein nach der Kettenlinie gebautes Gewölbe auf dem Fundamente werden würde, und die Wiederlage bey dem Tonnengewölbe darnach zu proportioniren. Hat aber das Gewölbe noch Lasten zu tragen, so muß statt der Kettenlinie die nach Beschaffenheit solcher Lasten zu bestimmende Linie (§. 60. folgg.) genommen werden. Es ist keine derselben circulär, und so sind die circulären Tonnengewölber höchstens nur wegen der Symmetrie und Bequemlichkeit zuläßig, in Absicht auf die Festigkeit aber sind die dabey gebräuchlichen und theils erforderlichen Widerlagen ein blosses Flickwerk.

§. 77.

In Ansehung des Mauerrechtes, sofern es nemlich dem Druck des Erdreiches Widerstand thun soll, kömmt es auf die Bestimmung dieses Druckes an. **Belidor** gedenkt sich hiebey in einem Kasten ACDE aufgehäuften trockenen Sand, er zieht das Schutzbrett CA weg, und findet, daß der Sand im Herunterfließen die Böschung Aa erhalte, und demnach der Druck des Sandes dem Gewicht des heruntergefloßenen AaC gleich sey. Er fügt bey, daß ungeachtet zwischen trockenem Sande und festerem Erdreiche allerdings ein Unterschied zu machen sey, man dennoch bey dem Erdreiche einen ähnlichen Satz annehmen könne. Fig. 13.

§. 78.

Man kann in der That auch einen solchen Satz annehmen, aber ohne daß man nöthig habe, denselben durch solche Versuche besonders zu beweisen. Man setze statt des Erdreichs einen flüßigen Körper von gleicher specifischer Schwere, so wird jeder Punct des Schutzbrettes CA in Verhältniß seiner Tiefe unter der Oberfläche gedrückt, und wenn man AE = AC macht, so ist das Gewicht der Masse CEA der Summe des Druckes gleich, welches das Schutzbret von bemeldter flüßigen Materie auszuhalten hat. Nun kann der Druck des Erdreichs an sich schon nicht größer seyn, er kömmt aber diesem Drucke desto näher, je mehr das Erdreich der Flüßigkeit näher kömmt. Wenn man demnach das Mauerrecht so bestimmt, daß es den erstbemeldten größten möglichen Druck aushalten kann, so hat man eher zu viel als zu wenig gethan, und man ist in Ansehung der Festigkeit außer Sorgen.

§. 79.

Man setze nun, die Mauer FGAC habe bereits ihre eigene Last zu tragen, so wird derselben in Form des Mauerrechts noch das trianguläre Stück HFG angesetzt, und es muß sich GH zu AE verhalten, wie die specifische Schwere des Erdreichs zur specifischen Schwere der Mauer. Denn bey jeder horizontalen Schichte wird in Ansehung des Druckes des Erdreichs PMNQ mit AP multiplicirt, und in Absicht auf den Widerstand des Mauerrechtes muß pmnq mit Gp multipliciret werden. Nun sollen die beyden Producte, als Momente betrachtet, einander gleich seyn, wenn noch jedes mit der specifischen Schwere multipliciret wird. Es ist demnach

$$P.\,AP.\,PQ.\,PM = p.\,Gp.\,pq.\,pm$$

Nun

Nun ist

$$PQ = pq$$
$$AP = Gp$$

demnach

$$P.\,PM = p.\,pm$$

welches

$$P : p = pm : PM = AE : HG$$

giebt, und demnach fordert, daß AE sich zu HG in umgekehrter Verhältniß der specifischen Schwere verhalte.

V. Einige minima bey den Dächern.

§. 80.

Wenn es üblich wäre, sechseckigte Häuser zu bauen, so würden uns die Bienen das Gesetz der Sparsamkeit angeben, weil sie zu ihren Zellen, um gleich viel Honig darin zu sammlen, das wenigste Wachs brauchen. Ein sechseckichtes Haus, mit einem dreyflächigtem Pyramidaldache, genau in Form einer Bienenzelle gebaut, hat bey gleichem Raume am wenigsten Dach und Mauern, und in sofern auch die geringste Last. Nun bauen wir zwar höchstens nur sechseckichte Gartenhüttgen, Ercker, Schilderhäusgen und Thürme, indessen läßt sich die Sparsamkeit der Bienen auch bey unsern viereckigten Wohnungen anbringen, und so wird eine kleine Speculation hierüber ganz wohl erlaubt seyn. Ich

 werde

werde demnach bey den Teutschen oder Satteldächern, als dem einfachsten Fall, anfangen.

§. 81.

Fig. 14 Es sey ABDba das Profil des Hauses und Daches, und AEea ein gleichräumiges Rectangel, so könnte das Haus anstatt des Daches BDd mit einer flachen Terrasse oder Altane EFe gedeckt seyn, und alsdann würden die Mauern nicht AB ab, sondern AE, ae und demnach höher seyn. Wenn es sich nun hiebey zuträgt, daß BD $<$ BE + EF ist, so gewinnt man dabey, und soll man am meisten gewinnen, so muß

$$BE + EF - BD = y$$

ein maximum seyn.

§. 82.

Man setze

$$EG = GF = a$$
$$BE = x$$

so ist

$$BD = 2\sqrt{(a^2 + x^2)}$$

demnach

$$y = 2a + x - 2\sqrt{(a^2 + x^2)}$$

$$o = dy = dx - \frac{2xdx}{\sqrt{(aa + xx)}}$$

welches

$$x = a\sqrt{\tfrac{1}{3}} = a \text{ tang. } 30^\circ$$

und

und demnach

$$EGB = 30^\circ$$
$$DF = EB = \tfrac{1}{2} GD = \tfrac{1}{2} GB$$

giebt.

§. 83.

Diese Rechnung geht nun an, wenn man bey gleichem Raume den geringsten Umfang haben will. Sie giebt ebenfalls auch die geringste Last, wenn man setzt, daß für jedes Quadratklafter Dach eben so viel Gewicht gerechnet werden müße, als für jedes Quadratklafter Mauer. Ist aber die Mauer m mal leichter oder schwerer, so muß

$$y = 2a + mx - 2\sqrt{(aa + xx)}$$

ein maximum, demnach

$$o = dy = mdx - \frac{2xdx}{\sqrt{(aa + xx)}}$$

$$x = \frac{ma}{\sqrt{(4 - mm)}}$$

seyn. Ist nun hiebey $m < 1$, so wird das Dach noch flacher, und hingegen wird es jäher, wenn $m > 1$ ist. Es kann aber bey dieser Rechnung nicht $m > 2$ werden, und bey $m = 2$ wird x unendlich. Man sieht demnach daß nur alsdann, wenn Mauer und Dach gleichschwer oder beynahe gleichschwer sind, die Rechnung vom kleinsten möglichen Gewichte angestellt werden kann. Hingegen bleibt

die

die Rechnung vom **kleinsten möglichen** Umfange, weil dabey $m = 1$ ist.

§. 84.

Bey den Zeltdächern, die nemlich vom Gipfel an gegen alle vier Seiten herunterhangen, stellt BDb eine Pyramide vor, und da ist $EG = \frac{1}{3} EF$, und folglich $EB = \frac{1}{2} DF$. Macht man hierüber die Rechnung, so wird das Dach noch viel flacher. Man erhält

$$4aa + 8ax - 4a\sqrt{(a^2 + 9x^2)} = \text{maximum}$$

$$o = 8adx - \frac{36axdx}{\sqrt{(a^2+9x^2)}}$$

$$2\sqrt{(a^2+9x^2)} = 9x$$

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}.a$$

§. 85.

Wenn aber das Dach vom Gipfel an gegen alle vier Ecken herunterhängt, so wird die Figur den Bienenzellen ähnlicher und zugleich auch der Sparsamkeit mehr Genüge gethan.
Fig. 15. Die 15te Figur stellt solches Haus vor, dessen Grundfläche HIK ein Quadrat ist. Wir werden daher nur das eine Viertel davon betrachten. Man gedenke sich die Ecke IC aufwerts bis in B verlängert, wo die beyden Horizontallinien AB, DB zusammentreffen, so ist zu sehen, um wie viel die Fläche des Daches AGDC kleiner ist, als die Summe der Stücke ABC, BCD, AFDB, welche das Dach entbehrlich macht. Es sind nemlich ABC, BCD zwey Stücke Mauern und AFDB der vierte Theil des Altans, welcher in Ermangelung des Daches das Haus decken müßte. Die Diagonale ist die gemeinsame Durchschnittslinie des Quadrats AFDB und des rautenförmigen Daches AGDC, und es ist $FG = BC$, weil der innere Raum in beyden Fällen gleich gesetzt wird.

§. 86.

Man setze nun

$$AB = BD = a$$
$$BC = GF = x$$

so ist der Raum von

$$ABC + BCD = ax$$
$$AFDB = aa$$

Hingegen ist bey der Raute AGDC

$$AD = a\sqrt{2}$$
$$GC = 2\sqrt{(EB^2 + BC^2)} = \sqrt{(2a^2 + 4x^2)}$$

demnach der Flächenraum

$$AGDC = \frac{1}{2} DA . GC = a\sqrt{(a^2 + 2x^2)}$$

und damit muß

$$aa + ax - a\sqrt{(aa + 2xx)} = \text{maximum}$$

seyn. Dieses giebt

$$o = adx - \frac{2axdx}{\sqrt{(aa+2xx)}}$$

$$o = aa + 2xx - 4xx$$

$$x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$$

 dem:

demnach

$$BC = AB.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$GC = 2\,AB = LC$$
$$AD = AB.\sqrt{2} = 2\,BC$$
$$AC = \sqrt{(a^2 + x^2)} = AB\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$
$$AD : GC = \sqrt{2} : 2 = 1 : \sqrt{2}$$

Da nun auch

$$AE = EF = EB = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

ist, so ist

$$GF = FE$$

und damit neigt sich das Dach gegen den Horizont unter einem Winkel von 45 Graden, und folglich macht jede Raute LG mit der gegenüberstehenden MG einen rechten Winkel.

§. 87.

Bey sechseckigten Häusern, die nemlich wie die Bienenzellen reguläre Sechsecke sind, ist F ebenfalls der Mittelpunct, hingegen sind AFB, BFD gleichseitige Triangel. Man setze wiederum

$$AB = a$$
$$BC = x$$

so ist der Raum von

$$ABC + BCD = ax$$
$$AFDB = a^2.\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

Hingegen ist

$$AD = a.\sqrt{3}$$
$$EB = \tfrac{1}{2}\,a$$
$$CG = \sqrt{(a^2 + 4x^2)}$$

und

und damit der Raum der Raute

$$AGDC = a\sqrt{(\tfrac{3}{4}aa + 3xx)}$$

Demnach muß

$$aa.\sqrt{\tfrac{3}{4}} + ax - a\sqrt{(\tfrac{3}{4}aa + 3xx)} = \text{maximum}$$

seyn. Dieses giebt

$$0 = adx - \frac{3axdx}{\sqrt{(\tfrac{3}{4}aa + 3xx)}}$$
$$x = a.\sqrt{\tfrac{1}{8}}$$

folglich

$$CG = a.\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$
$$AC = a.\sqrt{\tfrac{9}{8}}$$

Da nun $AD = a\sqrt{3}$

so ist

$$AD : CG = a\sqrt{3} : a\sqrt{\tfrac{3}{2}} = 1 : \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{2} : 1$$

Da nun bey dem viereckigten Hause umgekehrt (§. 86.)

$$AD : CG = 1 : \sqrt{2}$$

war, so haben die Diagonalen der Rauten in beyden Fällen einerley Verhältniß, und der Unterschied ist nur, daß bey dem sechseckigten Dache die längere Diagonale, bey dem viereckichten aber die kürzere horizontal liegt.

§. 88.

Hiebey verdient nun noch der Umstand angemerkt zu werden, daß man mit zwölf solcher Rauten, deren Diagonalen sich wie 1 zu $\sqrt{2}$ verhalten, einen regulären Körper von 12 Flächen

chen bilden kann, welcher zugleich die Figur des Daches des viereckichten und des sechseckichten Gebäudes, und damit auch der Bienenzellen vorstellt. Dieses letztere hat bereits Kepler in seinen *Harmonicis* angemerkt, und in sofern war das Problem von Bestimmung der inneren Figur der Bienenzellen, welches König auf Reaumürs Ansuchen auflöste, nicht mehr so ganz neu, als es Reaumür geglaubt zu haben scheint.

§. 89.

Uebrigens beziehen sich die Rechnungen wiederum mehr auf den kleinsten Umfang als auf die kleinste Last, weil ich dabey $m = 1$ gesetzt habe (§. 83.) Es folgt aber auch hier, wie vorhin, daß, wenn man für ein Quadratklafter Dach weniger Gewicht rechnet, als für ein Quadratklafter Mauer, das Dach viel jäher oder abhängiger gemacht werden kann. Man findet an alten Kirchthürmen solche Dächer, die aber, weil die Ecken L, C, M viel zu tief, oder auch die Spitzen A, D, N, P viel zu hoch sind, die Diagonalen GL, GC, GM einwerts gebogen, und demnach anstatt vier Flächen wirklich acht Flächen haben.

§. 90.

Wenn das Gebäude länger als breit ist, so werden auch die Rauten AGDC länglicht. Man setze

die

die halbe Breite $AB = a = FD$
die halbe Länge $BD = b = AF$
die halbe Höhe $BC = x = FG$

so hat man den Flächenraum

des Rectangels $AFDB = ab$
des Triangels $ABC = ax:2$
des Triangels $DBC = bx:2$

ferner die aus B auf AD fallende Perpendiculäre

$$= \frac{ab}{\sqrt{(aa+bb)}}$$

demnach die aus C auf A D fallende Perpendiculäre

$$= \sqrt{\left(xx + \frac{aabb}{aa+bb}\right)}$$

Wird diese mit $AD = \sqrt{(aa+bb)}$ multipliciret, so erhält man den Flächenraum der Raute

$$AGDC = \sqrt{(x^2a^2 + x^2b^2 + a^2b^2)}$$

Dieser Raum von der Summe obiger drey Räume abgezogen, muß

$$ab + \frac{ax+bx}{2} - \sqrt{(x^2a^2+x^2b^2+a^2b^2)} = \text{maximum}$$

seyn. Demnach ist

$$0 = \frac{(a+b)}{2}dx - \frac{(aa+bb)xdx}{\sqrt{(xxaa+xxbb+aabb)}}$$

$$x = \frac{a^2b^2(a+b)^2}{(a^2+b^2).(3a^2-2ab+3b^2)}$$

Hieraus wird das übrige leicht gefunden.

§. 91.

§. 91.

In Ansehung der Kraft, womit das Dach die Hauptmauern theils drückt, theils durch Ansperren aus einander zu treiben fähig ist, findet sich, so viel ich habe urtheilen können, weiter kein minimum, das einigermaßen brauchbar wäre. Das Dach soll eigentlich die Mauern nicht aus einander treiben, und daß es nicht geschehe, dafür hat der Zimmermann zu sorgen.
Fig. 14. Man setze indessen, in dem Triangel DGF stelle DF das Gewicht des Daches vor, so ist DG die Kraft, womit dasselbe nach der Richtung DG drücket, und FG die Kraft, womit es sowohl einwerts nach der Richtung GF, als auswerts nach der Richtung FG drückt, weil auch $DG = GB$ wiederum in die zwo Kräfte EB und $GE = GF$ aufgelöset wird. Man setze

$$GF = a$$
$$FD = x$$

so ist

$$DG = \sqrt{(aa + xx)}$$

Und wird das Gewicht diesem Werthe gleichgesetzt, so ist die nach der Richtung FG auswerts drückende Kraft

$$= \frac{a}{x} \cdot \sqrt{(aa + xx)}$$

Dieses giebt aber weder ein maximum noch ein minimum. Wenn man aber setzt, das Dach müsse zugleich am wenigsten schwer seyn, und am wenigsten auswert sperrens, so muß entweder die Summe dieser beyden Kräfte oder ihr Product ein minimum seyn. Der Rechnung nach geht beydes an. Denn da beyde Kräfte homogen sind, so lassen sie sich addiren, und in sofern läßt sich das minimum von der Summe suchen. Das Product würde angehen, auch wenn die Kräfte heterogen wären. Indessen sehe ich nicht, weder was das Product noch was die Summe in der Sache selbst vorstellt, wiewohl man immer sagen kann, daß das Dach desto vorzüglicher sey, je weniger es drucke und je weniger es sperre. Und diese Art sich auszudrücken scheint ein Product zu fordern. Wir wollen indessen beydes berechnen.

§. 92.

Das Gewicht, als die drückende Kraft, ist

$$= \sqrt{(a^2 + x^2)}$$

die sperrende Kraft aber

$$= \frac{a}{x} \cdot \sqrt{(a^2 + x^2)}$$

das Product von beyden sey

$$p = \frac{a}{x}(aa + xx) = \text{minimum};$$

so ist

$$o = dp = \left(-\frac{a^3}{xx} + a\right)dx$$

dem-

demnach

$$x = a$$

und so muß der Winkel BDC $= 45^{\circ}$ seyn.
Hingegen sey die Summe

$$S = \frac{a}{x} \sqrt{(aa + xx)} + \sqrt{(aa + xx)} = \text{minimum}$$

so ist

$$o = \frac{dS}{dx} = -\frac{a}{xx} \sqrt{(aa + xx)} + \frac{a}{\sqrt{(aa + xx)}} + \frac{x}{\sqrt{(aa + xx)}}$$

Hieraus folgt

$$o = a^3 - a x^2 + a x^2 + x^3$$

demnach

$$o = -a^3 + x^3$$
$$x = a$$

welches ebenfalls den Winkel BDC $= 45^{\circ}$ giebt, und beyde Kräfte einander gleich macht.

§. 93.

Die Auflösung ist demnach in beyden Absichten einerley, hingegen weicht sie von der oben (§. 81) für die Satteldächer angegebenen Auflösung in sofern ab, daß, wenn $x = a$ seyn soll, die Verhältniß m (§. 82) dadurch einen bestimmten Werth

$$m = \sqrt{2}$$

erhält, und demnach die Mauer 1, 414 - - - mal schwerer seyn muß, als eine gleichgroße Fläche des Daches. Hingegen, wenn in der 15ten Figur

Figur HI $=$ IK ist, so bleibt $m = 1$, weil, wie wir oben (§. 86) gesehen haben, jede Raute LG mit der gegenüberstehenden einen rechten Winkel macht. Es ist aber freylich kein Gesetz, daß nothwendig $m = 1$ seyn müsse.

§. 94.

Es hat übrigens Couplet in den Abhandlungen der Königl. Parisischen Akademie der Wissenschaften auf das Jahr 1731 eine Aufgabe in Absicht auf das Sperren bey den gebrochenen oder sogenannten Mansardischen Dächern vorgetragen, die zwar nicht ein minimum, indessen doch eine bey solchen Dächern nöthige Gleichheit des Druckes zur Absicht hat. Es wird daher nicht undienlich seyn, wenn wir diese Aufgabe hier vortragen, und die Auflösung auf einige einfachere Sätze bringen. Die eine Fig. 14. Hälfte des Daches sey ABC, dessen Höhe AD, die halbe Breite CD. Man vollende das Rechteck AHBF, und halbire es durch die Verticallinie MPN, so werden auch die Linien AN, MB einander gleich und parallel seyn. Stellt nun MP das Gewicht des Daches AB vor, welches wir $=$ P setzen wollen, so ist AM die horizontal gegen A drückende Kraft, MB hingegen die Kraft, so nach der Richtung MB gegen B drückt. Diese löset sich wiederum in die horizontal nach B drückende Kraft NB, und in die senkrecht auf B herunterdrückende Kraft HB auf, so daß also die Kräfte, womit das Dach AB drückt, MA, NB, HB, sind. Beyde erstere, sind einander, letztere

tere aber dem Gewicht des Daches gleich. Das untere Dach BC hat nun ebenfalls ein Gewicht, welches wir = Q setzen wollen. Mit diesem Gewichte drückt es zum Theil auch gegen das obere Dach in dem Punct B, und so ist die Frage, unter welchen Bedingungen beyde Dächer in B einander das Gleichgewicht halten. Man stelle sich BC als einen Hebel vor, dessen Ruhepunct in C ist. Ferner setze man

$$BC = b$$
$$BAH = \omega$$
$$BCD = \varphi$$

so findet sich die Kraft

$$MA = NB = \tfrac{1}{2} P. \cot. \omega$$

Diese mit GB = b sin. φ multiplicirt (weil sie eben so wie auf den Hebel BG wirkt), giebt das Moment $\frac{1}{2}$ b P cot. ω. sin. φ. Ferner wird die Kraft HB = P mit GC = b cos. φ multiplicirt, (weil sie wie auf den Hebel GC wirkt), und dieses giebt das Moment P b cos. φ, welches von dem ersteren abgezogen, diejenige Kraft des Daches AB giebt, welcher das Dach BC das Gleichgewicht halten muß. Nun drückt dieses mit dem Moment Q. CQ = $\frac{1}{2}$ Q. b. cos. φ entgegen, wenn man setzt, dessen Schwerpunct sey in der Mitte in O. Demnach haben wir

$$\tfrac{1}{2} b P \cot. \omega. \sin. \varphi - b P \cos. \varphi = \tfrac{1}{2} Q b \cos. \varphi$$

und hieraus

$$\text{tang}\, \omega = \frac{P}{2P+Q}. \text{tang}. \varphi.$$

Demnach wird die Neigung des einen Daches durch die Neigung des andern blos vermittelst der Verhältniß ihrer Gewichte bestimmt. Couplet macht die Rechnung ohne die Winkel zu gebrauchen, aber eben daher viel weitläuftiger. Er wendet sie sodann auf den Fall an, wo DA und CD gegeben sind. Da er auch sowohl AB, BC als die Gewichte P, Q einander gleich setzt, so ist seine Auflösung auch weniger allgemein. Dieser letztere Umstand giebt dann sogleich tang. $\omega = \frac{1}{3}$ tang. φ. Und wenn überdis auch AB = BC und AD = DC ist, so findet man $\omega = 90° - \varphi$, welches tang. $\omega = \sqrt{\frac{1}{3}}$ und tang. $\varphi = \sqrt{3}$, demnach $\omega = 30°$ und $\varphi = 60°$ giebt, und das Dach sieht alsdann so aus, wie es in der Figur gezeichnet ist.

VI. Die Anlage der Zimmer.

§. 95.

Indem ich hier zu dem 6ten §. zurückkehre, nehme ich einen Stoff vor, welcher in den Anweisungen zur Baukunst, zumal in solchen, die sich in Anfangsgründen der sämtlichen mathematischen Wissenschaften befinden, sehr nachläßig abgehandelt worden, so sehr er auch mit unter die wesentlichsten Absichten der Baukunst gehört. Herr Succov hat sich hierinn und mit gutem Erfolge einige Mühe gegeben, um die Vertheilung der Zimmer nach Gründen und Absichten zu bestimmen, und auch dieses trägt nicht wenig

wenig dazu bey, um sein Werk von der Civilbaukunst schätzbar zu machen, und es den Baukunstbeflissenen zu empfehlen. Man findet noch allzuhäufige Beyspiele von Häusern, die auswendig ein gutes und symmetrisches Ansehen haben, wo aber inwendig alles eher einem Flickwercke, als einer überdachten und zweckmäßigen Ordnung gleicht. Es giebt zwar Fälle, wo ein Baumeister sich dem Eigensinn und Eigendünkel des Bauherrn unterwerfen muß. Es giebt aber auch mehrere andere, wo er gar wohl eine bessere Einsicht hätte zeigen können und sollen.

§. 96.

Ich werde mich hier bey denen Fällen nicht aufhalten, wo man weder Raum noch Unkosten sparen, noch die Geschmeidigkeit der öfters nur unbequemen Weitläuftigkeit vorziehen will. Man baue, wenn man will, ganze Gallerien von 10, 20 und mehreren Zimmern; man lege sie noch überdis so an, daß man in die äußersten nicht kommen kann, ohne durch die übrigen durchzugehen, oder einen stadienlangen Gang oder Laube zu durchlaufen. Dieses mag, wenn man so viele Zimmer haben, und in der Weitläuftigkeit Pracht und Größe zeigen will, immerhin geschehen. Dieses alles hat mit dem Problem von der bequemsten Anlage der Zimmer und der vortheilhaftesten Nutzung des Raumes nichts zu thun, und würde vielmehr davon ablenken.

§. 97.

§. 97.

Der Hauptumstand, der dieses Problem merklich einschränkt, ist, daß jedes Zimmer das Tageslicht nicht von oben herunter, sondern durch die an den Seiten angebrachten Oefnungen, die man Fenster nennt, erhalten muß. Denn sonst würde es ein leichtes seyn, jeden viereckichten Raum nach Belieben in kleinere Quadrate oder Rectangel zu theilen. So aber müßen wir uns folgende Einschränkungen gefallen lassen, wenn anders jedes Zimmer unmittelbar das Tageslicht haben soll.

1) Wenn nur auf einer Seite oder vorne heraus Fenster angebracht werden können, so ist auch nur eine Reihe von Zimmern möglich.

2) Kann das Gebäude auch hinten heraus Fenster haben, so sind nur zwo Reihen von Zimmern möglich.

3) Können auf allen vier Seiten Fenster angebracht werden, so sind drey Reihen von Zimmern möglich, jedoch so, daß in der mittleren Reihe nur zwey Zimmer seyn können, und dadurch wird die Länge des Gebäudes merklich eingeschränkt.

4) Vier und mehr Reihen von Zimmern lassen sich, ohne daß mitten im Gebäude ein Hof oder mehrere seyn, nicht gedenken.

§. 98.

§. 98.

Zu diesen Einschränkungen, die wir hier nur überhaupt vortragen, kommen noch einige andere, welche machen, daß eben nicht alles Zimmer seyn kann, und daß selbst die Anlage der Zimmer nicht so schlechthin willkührlich ist. Einmal nimmt die Treppe immer den Raum eines größeren oder kleineren Zimmers und den Gebrauch von einem oder zweyen Fenstern weg, weil die Treppe so gut und noch mehr, als die Zimmer, Licht haben soll.

§. 99.

Sodann haben Zimmer, die von einander unabhängig sind, etwas vorzügliches. Man soll so viel möglich nicht nur aus einem Zimmer ohne viele Umwege in jedes andere, sondern auch von der Hausthür an gerechnet unmittelbar in jedes Zimmer kommen können, ohne vorerst durch andere zu gehen. Diese Bedingung hat auch nur da eine schlechthin zuläßige Ausnahme, wo zwey oder mehrere Zimmer zusammen gehören. Z. E.

1) Das Wohnzimmer, Schlafzimmer, Garderobe ꝛc.
2) Das Studirzimmer, der Büchersaal ꝛc.
3) Die Küche, die Speisekammer ꝛc. ꝛc.

In allen übrigen Fällen ist es besser, wenn jedes Zimmer für sich geöfnet und geschlossen werden kann. Dieses macht Vorhäuser, Vorsäle, Gänge ꝛc. nothwendig, die eben daher, daß sie auch nicht stockfinster seyn sollen, der Vertheilung und selbst der Anzahl der Zimmer Schranken setzen. Zu diesen Umständen kommt nun noch, daß der Symmetrie zu gefallen, die Hausthür in der Mitte seyn soll. Dieses zieht gewöhnlich auch einen mitten durch das Haus gehenden Gang nach sich, und wenn dieser Gang durchgängig seyn soll, so wird noch seitwerts ein Raum für die Treppe erfordert, und so geschieht es, daß das Vorhaus, der Gang und die Treppe nicht selten den dritten Theil oder gar die Hälfte des untern Hauses, und zuweilen auch des ersten Stockwerkes wegnehmen, und eine übrigens nothwendige oder wenigstens brauchbare Verbindung der Zimmer trennen. Endlich zieht die symmetrische Lage der Hausthür noch die Folge nach sich, daß die Anzahl der Fenster, die Hausthür mitgerechnet, 3, 5, 7, 9, 11 ꝛc. das will sagen, immer eine ungerade Zahl seyn muß. Es geschieht aber hiebey, daß, wo man an den Raum gebunden ist, oder denselben weder größer noch kleiner annehmen kann, z. E. 3 Fenster zu wenig, 5 zu viel seyn würden, und man folglich der Symmetrie zuwieder 4 anbringen muß. Eben so müßen zuweilen 6 seyn, wo nemlich 5 zu wenig, 7 zu viel seyn würden. Man kann demnach der Symmetrie nur da unbedingt Genüge leisten, wo die Anzahl der Fenster noch größer ist, weil sich alsdann jedem Fenster und jedem Schaft so viel zugeben oder benehmen läßt, als nöthig ist, die Anzahl ungerade zu machen. Z. E. die halbe Länge sey 50 Fuß. Man ziehe hievon $2\frac{1}{2}$ Fuß für die halbe Hausthürbreite, 4 Fuß für den Eckschaft ab, so bleibt $43\frac{1}{2}$ Fuß. Dieses soll eine ganze Zahl von Fenstern und Schäften geben. Man setze für Fenster und Schaft 7 Fuß, so ist $43\frac{1}{2}$ durch 7 getheilt = $6\frac{3}{14}$. Da nun dieser Quotient näher bey 6 als bey 7 ist; so rechne man auch nur 6 Fenster und Schäfte. Man theile demnach $43\frac{1}{2}$ durch 6, so erhält man $7\frac{1}{4}$ Fuß für ein Fenster und einen Schaft, welches nun für

	Fenster	Schaft
	3	$4\frac{1}{4}$
oder	$3\frac{1}{4}$	4
oder	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$
	2c.	

Fuß giebt.

§. 100.

Diese Rechnung geht aber bey wenigeren Fenstern nicht wohl an. Denn wollte man um 4 zu vermeiden, nur 3 nehmen, so werden sie nicht nur um $\frac{1}{3}$ zu breit, sondern man sieht sich auf 2 Zimmer eingeschränkt, ungeachtet man bey 4 Fenstern (die Hausthür mitgerechnet) entweder drey Zimmer, oder zwey aneinander liegende größere Zimmer hätte erhalten können. Wollte man aber 5 Fenster, (die Hausthür mitgerechnet) anbringen, so wird jedes um $\frac{1}{4}$ zu schmal oder die Schäfte zu schwach, und damit opfert man der Symmetrie wiederum wesentlichere Absichten und Vortheile auf. Uebrigens giebt die tägliche Erfahrung, daß man sich in solchen Fällen nicht zum Sclaven der Symmetrie macht. Denn bey engem Raume oder nothwendiger Sparsamkeit sucht man sich alles, so gut man kann, zu Nutze zu machen.

§. 101.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen läßt sichs nun stuffenweise gehen. Man setze z. E. es können zwey Zimmer in die Länge und zwey in die Breite seyn, so giebt dieses 2 mal 2 = 4 Zimmer, wovon aber wegen des Ganges und der Treppe eins wegfällt, und die Breite der Zimmer ungleich wird. Z. E. auf ebenem Boden ist A der Gang, die Treppe in B, und C, D sind die zwey Zimmer. In dem oberen Stockwerke kann auch A ein Zimmer seyn 2c. Fig. 16.

§. 102.

Man setze drey Zimmer in die Länge, und drey in die Breite. Dieses giebt 3 mal 3 = 9 Zimmer, wovon aber das mittlere C wegfällt, weil es kein Licht haben kann; sodann fällt auch wegen des Vorhauses und der Treppe das Zimmer B weg. Da nun hiebey der Raum C, B den dritten Theil des Ganzen ausmachen könnte, so spart man am besten, wenn von dem Raum C den Nebenzimmern E, H ein Theil zugesetzt wird. Fig. 17.

 §. 103.

§. 103.

Fig. 18. Auf diese Art ist in der 18ten Figur ein Raum, der 7 Fenster in der Länge und eben so viel in der Breite hat, dergestalt eingetheilt, daß a der Eingang, in b die Treppe, c ein gut beleuchteter Gang ist. Und so kann man aus a unmittelbar in die Zimmer d, e, f, k, l kommen, so daß nur die drey Eckzimmer g, h, i von den übrigen abhängig sind. Es kann aber ganz ordentlich k die Küche, i die Speisekammer, e die Wohnstube, g das Schlafzimmer, d der Saal ꝛc. seyn. Mehr Vortheil läßt sich aus einem solchen Raume nicht ziehen, und so können auch der Länge nach nicht mehr Fenster seyn, dafern nicht die Zimmer e, f ungeheuer lang oder der Gang c überflüßig breit werden soll. Will man aber den hintern Theil der Zimmer e, f mit Alkoven einschließen, so kann die Länge auf jeder Seite noch um ein Fenster größer seyn, und da kommen vorne und hinten heraus noch zwey Zimmer mehr. Man kann eben so der Breite nach noch ein Fenster zugeben, um die Zimmer l, k, i so lang zu machen, als g, h sind.

§. 104.

Fig. 19. Wenn nur vorne und hinten heraus Fenster seyn können, und überhaupt wenn der Breite nach nur zwey Zimmer seyn sollen, so kann der Länge nach eine jede beliebige Anzahl seyn. Indessen giebt die 19te Figur die einige mögliche Einrichtung für den Fall an, wo jedes Zimmer unabhängig den

seyn soll. Es ist dabey a der Eingang oder das Vorhaus, die Treppe kömmt in b, und c ist ein Gang, welcher so breit seyn muß, als es die Thüren zu den vier Eckzimmern d e fordern. Wird die Anzahl der Fenster und Zimmer der Länge nach vermehrt, so wird auch der Gang c länger, und damit zugleich auch dunkeler, da er das Licht nur von den Fenstern bey a hat. Das Gebäude, so wie es die Figur angiebt, hat schon 11 Fenster. Der Gang c läßt sich noch ohne allzugrosse Dunkelheit um die Breite eines Zimmers von einem Fenster auf jeder Seite verlängern, zumal wenn er zugleich auch breiter gemacht wird. Dis giebt 13 Fenster. Die Zimmer d, e können noch ein Fenster mehr haben, weil der Gang c dadurch nicht verlängert wird. Dis giebt 15 Fenster, und in allem 11 Zimmer. Endlich können an den vier Ecken noch 4 Zimmer, so von den Zimmern d, e abhängig sind, angesetzt werden, da bey 11 unabhängigen Zimmern 4 abhängige eben nicht zu viel sind. Damit hat man 15 Zimmer, und 17, 19 oder gar 21 Fenster ꝛc. Wenn es nun damit noch nicht genug ist, so kann man anstatt eines Vorsaales a, zween oder drey anbringen, und dadurch dem alsdann zu verlängernden Gange, c, c in der Mitte und gegen die beyden Enden Licht geben.

§. 105.

Da der Gang c, c nur von den Fenstern bey a, b Licht erhält, so sieht man schon hieraus, daß derselbe auch da angebracht werden kann, wo nur auf einer Seite Fenster seyn können, und daher auch nur eine Reihe von Zimmern, dafern sie unmittelbar Licht haben sollen, möglich ist.

§. 106.

Nimmt man nun noch zu den hier betrachteten Fällen diejenigen, wo einem Hause Flügel angesetzt werden, oder wo in der Mitte C (Fig. 17.) ein Hof gelassen wird, so wird man, wenigstens von den einfachsten Arten, einen fürgegebenen Raum in Zimmer einzutheilen, eine Abzählung vornehmen können. Flügel, die mit dem Hauptgebäude in einer Linie fortgehen, unterscheiden sich von demselben dadurch, daß sie entweder schmäler, oder von weniger Stockwerken, oder auch beydes zugleich sind. Bey gleicher Höhe und Breite müßten sie eigene Hausthüren, Gänge, Treppen haben, um sich von dem Hauptgebäude wenigstens in etwas zu unterscheiden, ohne jedoch besondere Gebäude vorzustellen. Sind sie aber nicht in einer Linie, sondern so angelegt, daß sie mit dem Hauptgebäude rechte Winkel machen, so können sie nicht unbedingt zwo Reihen von Zimmern haben, dafern nicht das innere Eckzimmer a ohne Licht seyn
Fig. 20. soll. Dieses muß wenigstens um so viel verlängert werden, daß es gegen den Hof ein Fenster haben kann, und außen herum müßen auf allen Seiten Fenster seyn können. Ueberhaupt ist es dabey gut, wenn die innere Reihe h, g, e, b, f,

b, f, und selbst der ganze Flügel e f schmäler ist, damit die Zimmer b, a nicht allzulang werden. Auch sieht man leicht, daß ein Gang, welcher zwischen beyden Reihen von Zimmern durchgeht, zu besserer Vertheilung der Eckzimmer nützlich angebracht werden kann.

§. 107.

Man sieht übrigens leicht, daß eine Abzählung aller möglichen Fälle, wo man von den einfachen zu den zusammengesetzteren fortgeht, und für jeden einen besonderen Riß zeichnen will, eine weitläuftigere Sache ist, als es die Absicht dieser Anmerkungen zuläßt. Ich lasse es demnach bey der allgemeinen Anzeige bewenden, da es genug ist, hier die Möglichkeit der Sache und die Art dabey zu verfahren angegeben zu haben. Die Hauptclassen sind folgende.

I. Fenster auf einer Seite, demnach nur eine Reihe von Zimmern.

1) Nur ein Fenster, welches demnach zugleich die Thür ist, wie z. E. bey kleinen Buden.

2) Zwey, drey, vier Fenster, welche ein oder zwey Zimmer geben, wo auch die Thür ein Fenster seyn kann etc. In solchen Fällen ist gewöhnlich nur ein Stockwerk.

3) Mehrere Fenster, mit oder ohne Gang hinter den Zimmern, nachdem es der Raum zuläßt, oder die Zimmer unabhängig seyn sollen.

4) Flü-

4) Flügel zu beyden oder auch nur auf einer Seite, es sey in einer Linie oder solche, die einen Hof bilden. Im letzteren Fall wird hier gesetzt, daß die Fenster nur gegen den Hof sind.

II. Fenster auf zwo Seiten, wie bey Eckhäusern. Hier ist ebenfalls nur eine Reihe von Zimmern, die aber im Eckzimmer einen rechten Winkel bilden, wenn nemlich das Eckzimmer nicht das einige mögliche ist, sondern zu beyden Seiten noch wenigstens ein Zimmer hat. Denn man sieht leicht, daß die bey der ersten Hauptclasse erwähnte besondere Fälle auch hier vorkommen.

III. Fenster auf zwo Seiten, nemlich vornen und hinten heraus. Auch hier kömmt die Abzählung der besonderen Fälle auf die Anzahl der Fenster an. Die allgemeineste Unterabtheilung, die hier gemacht werden kann, kömmt darauf an, ob der Raum der Breite nach zwo Reihen von Zimmern zuläßt, oder nur eine.

1. Den Fall von zwo Reihen von Zimmern siehe §. 104. umständlich angeführt. Hier ist noch anzumerken, daß (Fig. 19.) mit den Zimmern d, d, e, e gewöhnlich auch der Gang c, c wegbleiben kann, besonders wo die allzugeringe Breite des Hauses einen solchen Gang nicht zuläßt.

2. Der andere Fall, wo nur eine Reihe von Zimmern seyn kann, ungeachtet vorne und

und hinten heraus Fenster seyn können, kömmt wiederum auf die Anzahl der Fenster und Zimmer der Länge nach an. Sollen viele und unabhängige Zimmer seyn, so muß hinten heraus entweder ein Gang innerhalb der Hauptmauern, oder in den oberen Stockwerken Lauben, die mit einem Vordache auf Säulen ruhen, angebracht werden.

IV. Fenster auf drey Seiten, wie bey Eckhäusern, die auch gegen den Hof oder hinten heraus Fenster haben können. Dieser Fall läßt sich sowohl für zwo Reihen, als auch für eine Reihe von Zimmern aus den vorhergehenden Fällen zusammensetzen. Man sehe auch §. 106.

V. Freystehendes Haus, so nemlich auf allen vier Seiten Fenster haben kann.

1. Ein einiges Zimmer, z. E. bey Gartenlogen.

2. Eine Reihe von Zimmern. Dieser Fall ist von III. 2. nicht viel verschieden.

3. Zwo Reihen von Zimmern. Auch dieser Fall ist aus III. 1 leicht abzuleiten. Denn der ganze Unterschied ist, daß die Eckzimmer d, d, e, e (Fig. 19) auf zwoen Seiten Fenster haben können.

4. Drey Reihen von Zimmern. Siehe §. 103. wo der einige mögliche Fall vorkömmt (§. 97. N. 3.), dafern man nicht in C (Fig. 17.)

(Fig. 17) einen Hof, oder, wie Goldmann es angiebt, eine Wendeltreppe anbringen will, durch deren mittleren Raum das Licht von oben herunter fällt.

5. Vier Reihen von Zimmern. Diese müssen ins Gevierte liegen, und in der Mitte einen Hof haben. Es ist aber auf diese Art betrachtet, eigentlich nur eine Reihe, die nach allen vier Seiten eines Quadrates herumgeht, und welche mit gehöriger Einschränkung und Anlage der innern Eckzimmer (§. 106.) verdoppelt werden kann.

6. Will man nun noch weiter gehen, so legt man, wie Escurial gebaut ist, das Gebäude in Form eines Rostes an.

Jedoch ich will es nun den Liebhabern von architectonischen Zeichnungen überlassen, von allen hier angezeigten Arten von Gebäuden, Grundrisse zu entwerfen, welche überhaupt auch den oben angeführten Bedingungen (§. 69. folgg.) Genüge leisten. Auf diese Art wird den angehenden Baumeistern ein Werk in die Hände geliefert werden können, woran sie sich in Absicht auf die Vertheilung und Anlage der Zimmer klug studiren mögen.

VII.

VII. Die Stärke der Mauern, Stützen, Säulen, Balken ꝛc.

§. 108.

Die Stärke der Mauern, Stützen, Säulen ꝛc. kömmt überhaupt betrachtet auf zwey Stücke an. Einmal auf die Beschaffenheit der Materie, daraus sie verfertiget werden, und welche an Härtigkeit, Festigkeit, Elasticität und Dauerhaftigkeit verschieden seyn kann. Sodann hat die Verhältniß der Dicke und Breite zur Höhe, und so auch zur aufliegenden Last viel auf sich. Ich werde hievon den Anfang machen.

§. 109.

Bey Mauern ist es schon längst eingeführt, daß man sie bey jedem Stockwerke, von oben an herunter gerechnet, um 3 Zoll dicker macht, um die Dicke nach der aufliegenden Last zu proportioniren. Die Grundfläche muß im Verhältniß der Last seyn, wenn anders durchaus einerley Stärke erhalten werden soll. Hieraus folgt Fig. 21. nun, daß, **wenn eine Mauer nur ihre eigene Last zu tragen hat, ihre Dicke von oben herunter nach den Ordinaten einer logarithmischen Linie zunehmen müsse.** Bey gleichgrossen Abscissen A B, B C, C D ꝛc. nehmen die Ordinaten A a, B b, C c ꝛc. in geometrischer Verhältniß ab, und in sofern könnte sie von unendlicher Höhe seyn.

§. 110.

§. 110.

Nun haben aber die Mauern oben das Dach, und herunterwerts die Last eines jeden Stockwerkes zu tragen. Das erstere macht, daß sie bereits unter dem Dache eine bestimmte Dicke haben müssen. Das andere aber, verursacht, daß ihre Dicke bey jedem Stockwerke sprungweise zunehmen muß. Auf diese Art stellt D d die Dicke unter dem Dache vor, C γ die wegen des Gewichts der Mauer selbst vermehrte Dicke, C c die wegen des Stockwerkes vermehrte Dicke, und eben so B 6 die wegen des Gewichts der Mauer C 6 vermehrte Dicke, B b die wegen des Stockwerkes vermehrte Dicke, A α die wegen der Mauer B α vermehrte Dicke. Hiebey sind nun d γ, c 6, b α Stücke von logarithmischen Linien, die, wenn die Mauer von oben bis unten von einerley Art ist, einerley Subtangente haben. Die Subtangente ist aber bey verschiedenen Mauern im Verhältniß ihrer inneren absoluten Festigkeit.

Fig. 22.

§. 111.

Fig. 23.

Es sey a e die logarithmische Linie, A E ihre Asymptote. Den Raum A B b a, welcher dem Rectangel oder dem Product der Ordinate B b und der Subtangente gleich ist, setze man der Last des Daches gleich. Ist nun B C die Höhe des nächst unter dem Dache befindlichen Stockwerkes, so ist B b c C die Figur der Mauer, welche dieses Stockwerk einschließt. Man mache ferner den Raum C c d D dem Gewichte der Last gleich, welche auf dem Boden dieses Stockwerkes zu liegen kömmt (die Last des Bodens mit eingerechnet) so ist D d die Dicke, die die untere Mauer, da wo sie an die Mauer C c stößt, haben muß. Nun setze man die Höhe des folgenden Stockwerkes = D E, so wird D d e E die Figur der Mauer seyn, welche dieses Stockwerk einschließt. Auf diese Art fährt man für jedes folgende Stockwerk weiter fort, und so wird die Mauer aller Orten eine der aufliegenden Last proportionirte Dicke haben, wenn die innere Stärke oder Festigkeit der Mauer durchaus gleich ist. Wiedrigenfalls muß die Subtangente der logarithmischen Linie a e nach Verhältniß der Festigkeit verändert werden. Alles dieses ist nun theoretisch ganz richtig.

§. 112.

In der wirklichen Ausübung sieht man nun eben nicht auf alle Kleinigkeiten, welche die theoretische Schärfe erfordert. Daher läßt man die logarithmische Krümmung der Mauer weg, man macht d γ, γ 6, 6 α mit A D parallel, so gut man nemlich parallel mauern kann, und so begnügt man sich die Absätze γ c, 6 b ꝛc. beyzubehalten, damit doch wenigstens die Dicke der Mauer von Stockwerk zu Stockwerk zunehme. Für jedes Stockwerk nimmt man 3 Zoll mehr, und dadurch verfällt man von der geometrischen Progreßion auf die arithmetische.

Fig. 22.

Da nun dieses ein merklicher Absprung ist, so wird es nicht übel gethan seyn, wenn wir die Sache näher betrachten.

§. 113.

Die ganze Sache kömmt auf die Last an, die man sowohl für das Dach als für jedes Stockwerk rechnet. Man setze z. E. die Mauer unter dem Dach soll 24 Zoll dicke seyn. Damit wird, weil man gewöhnlich für jedes Stockwerk 3 Zoll mehr zugiebt,

$$Dd = 24''$$
$$Cc = 27''$$
$$Bb = 30''$$
&c.

Nach dieser Rechnung würde das Gewicht des Daches, so viel als das Gewicht von 8 Stockwerken, die Mauern mitgerechnet, betragen. Da dieses zu viel ist, so folgt auch, daß man oben in D aus andern Gründen der Mauer eine größere Dicke giebt. Die Mauer ist kein ganzes Stück Felsen, und so muß sie schon aus diesem Grunde eine größere Dicke haben. Ferner wird eine dickere Mauer auch viel langsamer durch und durch vermödert, und endlich kann auch das Anſperren des Daches (§. 91. folgg.) eine dickere Mauer fordern. Demnach hat man Gründe genug, der Mauer eine mehrere Dicke zu geben.

§. 114.

Nun ist die Frage, wie viel für die Last eines jeden Stockwerkes gerechnet wird, ohne die Last der Mauer, so ein jedes Stockwerk einschließt, mitzurechnen? Diese Last besteht aus dem Gewichte eines jeden Bodens, und alles dessen, was auf jeden Boden ordentlicher Weise gelegt wird. Ist diese Last vielmal größer als das Gewicht der Mauer, und wird sie für jedes Stockwerk gleich gerechnet, so kommen wir der arithmetischen Verhältniß näher, weil in solchem Fall $\gamma c = \beta b = \alpha a$ &c. wird, und, auch wenn man die logarithmische Linie beybehält, die Unterschiede

$$C\gamma - Dd$$
$$B\beta - Cc$$
$$A\alpha - Bb$$
&c.

sehr geringe sind. Man setze $\gamma c = \beta b = \alpha a = \&c = n$, und

$$Dd : C\gamma = 1 : m$$

so ist
$$Dd = Dd$$
$$C\gamma = m . Dd$$

I. $Cc = m . Dd + n$
$B\beta = m^2 . Dd + mn$

II. $Bb = m^2 . Dd + mn + n$
$A\alpha = m^3 . Dd + m^2 n + mn$

III. $Aa = m^3 . Dd + m^2 n + mn + n$
&c.

und damit wird für das λte Stockwerk die Dicke der Mauer

$$p = m^{\lambda}.Dd + n(m^{\lambda-1} + m^{\lambda-2} + \ldots 1)$$

$$p = m^{\lambda}.Dd + n.\left(\frac{m^{\lambda} - 1}{m - 1}\right)$$

Da nun gewöhnlich

$$Dd : Cc = 24'' : 27''$$

genommen wird, so wird m an sich schon nur um einen kleinen Bruch größer als 1. Man setze z. E. die Last eines Stockwerkes soll dreymal größer angesetzt werden, als die Last der oberen Mauer $D\gamma$, so wird.

$$C\gamma - Dd = \tfrac{1}{3}\gamma c = \tfrac{1}{3}n = 1''$$

demnach

$$m = \frac{C\gamma}{Dd} = \tfrac{25}{24} = 1 + \tfrac{1}{24}$$

Und hieraus folgt die Dicke der Mauer bey dem λten Stockwerke

$$p = (1 + \tfrac{1}{24})^{\lambda}.Dd + n.\frac{(1 + \tfrac{1}{24})^{\lambda} - 1}{(1 + \tfrac{1}{24}) - 1}$$

oder, wenn man überhaupt $m = 1 + x$ setzt,

$$p = (1 + x)^{\lambda}.Dd + n.\frac{(1 + x)^{\lambda} - 1}{x}$$

Läßt man nun hier die höhern Dignitäten von x weg, weil sie unerheblich klein sind, so wird

$$p = (1 + \lambda x)Dd + \lambda.n$$

welches eine arithmetische Progreßion giebt, welche die Mauer bey jedem Stockwerke um $x.Dd + n$, das will sagen, um 3 Zoll dicker macht.

§. 115.

Indessen wenn x nicht kleiner als $\tfrac{1}{24}$, λ aber, wie bey Thürmen, eine grosse Zahl ist, so mengt sich freylich von der geometrischen Progreßion etwas mit ein. Es sey z. E. die Höhe der Mauer eines Thurms von 20 Stockwerken, so ist $\lambda = 20$, und damit

$$1 + x = \tfrac{25}{24}$$

$$\begin{aligned} \log. 25 &= 1{,}3979400 \\ \log. 24 &= \underline{1{,}3802112} \\ &\ \underline{0{,}0177288} \\ 20 \log. \tfrac{25}{24} &= 0{,}3545760 \end{aligned}$$

demnach

$$(1 + x)^{20} = 2{,}263$$

$$\frac{(1 + x)^{20} - 1}{x} = 30{,}312$$

und damit ist

$$p = 2{,}263.\ Dd + 30{,}312\ .\ n$$

Nun ist $Dd = 24''$, $n = 2''$, folglich

$$p = 114'',936$$

welches eine Dicke von 9′ 7″ giebt. Diese kann aber deswegen geringer seyn, weil bey Thürmen außer dem Stockwerke, wo der Glockenstuhl

ckenstuhl ist, die übrigen eben nicht zum Lasttragen gewidmet sind. Daher kann auch n für alle diese Stockwerke kleiner angenommen werden, weil die Mauer wegen ihrer Höhe und eigenen Last schon merklich zunimmt. Ich führe übrigens diese Rechnung nur in Form eines Beyspiels an, woraus man so viel abzunehmen hat, daß es allerdings in der Baukunst würde zu rechnen geben, wenn die Baumeister sich wollten angelegen seyn lassen, die nöthigen Data durch genaue Versuche zu bestimmen. Da muß freylich die Theorie angeben, was sie eigentlich zu bestimmen haben. Ich werde nur noch anmerken, daß natürlicherweise die unteren Stockwerke mehr zum Lasttragen sollen gewidmet seyn, und da dieses dem Buchstaben n einen veränderlichen, und von oben herunter anwachsenden Werth giebt, die Dicke der Mauer ebenfalls von oben herunter noch stärker zunehmen müße.

§. 116.

Wenn man nun aber den Fall setzt, daß eine Mauer, Stütze, Säule rc. zu schwach sey, oder mit der Zeit zu schwach werde, so ist der Erfolg, daß sie entweder bricht, oder sich beugt, oder sich seitwerts einsenckt, und eine schiefe Lage
Fig. 24. annimmt. Es sey eine Stütze AEFB, die wir, um den einfachsten Fall vorzunehmen, als ein viereckigtes Prisma ansehen wollen. Diese werde nach dem Durchschnitte AB, durch ihre Last und wegen der schwächeren Theile in B gegen die

die hintere Seite FB geneigt, daß sie in die Lage Aefb komme. Da nun dadurch der Schwerpunct C in c kömmt, so kann dieses mit beytragen, die Stütze noch mehr zu neigen. Damit würde es immer weiter gehen, dafern nicht das Zusammendrücken der Theile von A gegen B immer schwerer würde. Es kann demnach irgend ein Gleichgewicht geben, und die Stütze kann sich in ihrer schiefen Lage erhalten, so lange wenigstens die Distanz Cc nicht größer als KB wird. Setzen wir nun z. E. der Punct A bleibe unbewegt, so haben wir

$$AB : Bb = KC : Cc$$

welches

$$Cc = \frac{Bb \cdot KC}{AB}$$

giebt. Man setze nun für den erstbemeldten äußersten Fall

$$Cc = KB = \tfrac{1}{2} AB$$

so wird

$$\tfrac{1}{2} AB = \frac{Bb \cdot KC}{AB}$$

demnach

$$AB^2 = 2 KC \cdot Bb$$

seyn. Diese Gleichung muß demnach statt haben, wenn bey dem Neigen der Stütze der Schwerpunct C außerhalb der Basis AB fallen soll.

§. 117.

Hiebey sind nun einige Voraussetzungen. Die erste, daß die Stütze sich eigentlich nur nach dem Durchschnitte AB, gegen B zusammendrückt. Dieses kann sich zutragen, wenn in der That die Stütze in B schwächere Theile hat. So kann auch AB das Fundament vorstellen, weil auch dieses zuweilen auf einer Seite schwächer ist oder wird, als auf der andern Seite. Sodann haben wir in der Rechnung nur das Gewicht der Stütze selbst betrachtet. Trägt demnach die Stütze noch eine Last, so kömmt der Schwerpunct C höher hinauf, und dadurch wird bey gleicher Grundfläche AB, der Winkel BAb um desto kleiner, je größer KC wird.

§. 118.

Man setze z. E. es sey AB = 1 Fuß, Bb = 1 Linie = $\frac{1}{144}$ Fuß. Da nun

$$KC = \frac{AB^2}{2\,Bb}$$

ist, so erhält man

$$KC = 72 \text{ Fuß}.$$

So hoch kann demnach der Schwerpunct C seyn, ehe sich eine solche Stütze in B um eine Linie zusammendrückt, und der Schwerpunct anfängt, außerhalb der Grundfläche zu fallen.

§. 119.

Die Untersuchung, was es mit dem Biegen und Brechen der Stützen und Balken für eine Be-

schaffenheit habe, ist seit bald 200 Jahren sehr oft vorgenommen worden. Galiläus machte damit den Anfang. Mariotte, Leibnitz, Jacob Bernoulli, Varignon, Parent, Bilfinger, Muschenbroeck, Buffon, und mehrere andere suchten, theils was Galiläus unvollständig gelaßen nachzuholen, und noch mehr ins reine zu bringen, theils auch durch angestellte Versuche nähere Bestimmungen anzugeben, und die Theorie auf Proben zu setzen. Wenn man alle Irregularitäten, die in den Theilchen der Materie selbst seyn können, beyseite setzt, so sind in der ganzen Sache nur zwo Hauptschwürigkeiten, welche die Theorie weniger vollständig seyn lassen, als man sie zu haben wünscht.

§. 120.

Einmal giebt die Erfahrung, daß eine Stange, ein Balken, eine stählerne Feder, eine Stütze ꝛc. die sich beugte oder mit Gewalt gebogen wird, sich an der inwendigen Seite zusammendrückt, an der auswendigen aber auseinander dehnt. Und dabey hat die Anwendung der Theorie des Hebels einige Schwürigkeiten, die eben deswegen, weil die Cohäsionskräfte nicht umständlich genug bekannt sind, nicht durchaus ins reine gebracht werden können. Man ist genöthiget, die Sache gleichsam nur im Ganzen und überhaupt zu betrachten, und sich damit zu begnügen, wenn die Rechnung von der Erfah-

 rung

rung nicht allzumerklich abweicht, sondern zwischen denen der Erfahrung eigenen kleineren Anomalien das Mittel hält. Auf diese Art kann man mit Bilfingern einräumen, daß sich die Theorie des Hebels anbringen lasse, wenn man den Ruhepunct nicht am Ende A, sondern etwas über die Mitte bey P setzt, so daß PB für die zusammengepreßten Theile kürzer ist, als AP für die ausgedehnten, jedoch mit der Voraussetzung, daß die absoluten Cohäsionskräfte jeder Theilchen durchaus gleich sind. Denn sind sie auf der einen Seite z. E. gegen B schwächer, so kann der Ruhepunct P ungleich näher gegen A, ja selbst in A fallen.

§. 121.

Ferner kann man mit Jacob Bernoulli behaupten, oder einräumen, daß das Zusammendrücken ein negatives Ausdehnen sey, und umgekehrt ungeachtet allerdings die zu jedem besonders erforderten Kräfte nicht eine und eben dieselbe Function des Raumes sind, durch welchen sich das Zusammendrücken erstreckt. Da aber diese Functionen noch unbekannt sind, und demnach in den allgemeinsten Ausdrücken angenommen, oder durch die Ordinaten einer noch unbestimmten krummen Linie vorgestellt werden müssen, so kann, statt zweer solcher Linien, eine dritte angenommen werden, welche die Summe der Wirkung auf beyden Seiten des Hebels AP, BP angiebt, wenn die Abscissen nach Ver-

hältniß dieser beyden Seiten proportionirt werden. Findet sich nun bey einerley und durchaus gleichartiger Materie, daß AB, AP, PB immer in einerley Verhältniß unter einander sind, wie denn hieran nicht wohl kann gezweifelt werden, so hat Jacob Bernoulli wiederum ganz recht, wenn er anstatt das Zusammendrücken in PB, und das Auseinanderzerren in PA, jedes besonders zu betrachten, das letztere allein vornimmt. Denn da man die Sache nur überhaupt betrachten kann, so wird die Arbeit dadurch um die Hälfte kürzer. Ueberdies zeigt sowohl Parent als Bilfinger, daß es am Ende nur auf die Bestimmung eines Coefficienten ankömmt, weil man bey allen Voraussetzungen findet, daß die brechende Kraft im Verhältniß des Products aus der Breite und dem Quadrat der Dicke zunimmt.

§. 122.

Wenn wir demnach ebenfalls Kürze halber den Ruhepunct in A setzen, so kömmt die Sache auf den Triangel B A b an, welcher beym Zusammendrücken, so wie bey dem Voneinanderzerren statt hat. Im letzten Fall, den man gewöhnlich betrachtet, sind Bb, Pp, Kϰ der Ausdehnung proportional, welche die Theilchen leiden, im ersten Fall aber der Zusammenpressung. Die dazu erforderliche Kraft muß eine Function davon seyn. Wir können sie überhaupt durch die Ordinaten PM einer krummen Linie AMG vor-

vorstellen. Man setze, BG sey gerade die Kraft, die erforderlich ist, das Theilchen in B zu zerreissen. Diese Kraft ist in ihrer Art ein maximum, und daher ist sie für jede geringere Ausdehnung Pp kleiner als für die Ausdehnung Bb, welche wir als die gröste ansehen, die ohne das völlige Zerreissen statt hat, oder als diejenige, bey welcher das Zerreissen anfängt. Wir können hier mehrerer Geschmeidigkeit halber BG = AB machen, und damit das Quadrat ABGH vollends ausziehen. Und so wird der Raum dieses Quadrats die Summe der Kräfte vorstellen, die erfordert würden, das Prisma nach der Länge oder gerade hinaus von einander zu reißen. Denn für jeden Punct P ist die Kraft = Pm = AG.

§. 123.

So einfach ist aber die Rechnung nicht, wenn das Prisma gebrochen werden soll, und A der Ruhepunct ist. Man setze, die Kraft werde in G angebracht, und wirke nach der Richtung GH. Da nun GB = AH = AB gesetzt worden, so wird, wenn nur von dem Zerreissen des Theilchens, oder der äußersten Fiber Bb die Rede ist, die in G anzubringende Kraft ebenfalls = BG seyn. Für jede andere Fiber Pp ist diese Kraft oder das Moment derselben geringer. Und zwar erstlich im Verhältniß von AB zu AP. Sodann ist sie noch deswegen geringer, weil die die Fibern Pp weniger aus einander gezogen werden, als die äußerste Fiber Bb, demnach im Verhältniß von BG zu PM.

§. 124.

§. 124.

Es sey nun

$$AB = a$$

und um alle Zweydeutigkeit zu vermeiden, setze man BG = b. Ferner sey

$$AP = x$$

$$PM = y$$

so ist für jede Fiber dx das Moment

$$dM = \frac{y}{b} \cdot \frac{x}{a} \cdot b\,dx.$$

Nun ist (y:b) eine Function von der Ausdehnung Pp, und da diese im Verhältniß von x ist, so ist (y:b) eine ganz ähnliche Function von x. Man setze nun überhaupt

$$\frac{y}{b} = \left(\frac{x}{a}\right)^m + A\left(\frac{x}{a}\right)^n + B\left(\frac{x}{a}\right)^p + \&c.$$

so erhält man

$$dM = b\,dx\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{m+1} + A\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} + B\left(\frac{x}{a}\right)^{p+1} + \&c.\right]$$

und damit

$$M = b\left(\frac{x^{m+2}}{(m+2)a^{m+1}} + \frac{Ax^{n+2}}{(n+2).a^{n+1}} + \frac{Bx^{p+2}}{(p+2)a^{p+1}} + \&c.\right)$$

Für das ganze Prisma wird x = a, demnach

$$M = ab\left(\frac{1}{m+2} + \frac{A}{n+2} + \frac{B}{p+2} + \&c.\right)$$

das

das will sagen

$$M = N.ab.$$

§. 125.

Sollte hingegen jede Fiber dx gerade hinaus zerrissen werden, so würde das Moment

$$dM' = b\,dx$$

demnach

$$M' = bx$$

und für das ganze Prisma

$$M' = ab$$

seyn. Da nun im ersten Fall

$$M = N.ab$$

ist, so haben wir

$$M' : M = ab : Nab = 1 : N.$$

Und das will sagen, die brechende Kraft ist zu der absoluten, welche nemlich das Prisma gerade hinaus zerreißt, in beständiger Verhältniß, wenn nemlich die brechende Kraft allemal in einer der Dicke AB gleichen Entfernung vom Ruhepunct AH angebracht wird, und die Breite in allen Fällen einerley bleibt.

§. 126.

Dieses ist nun, was unmittelbar aus der Berechnung folgt. Bilfinger, welcher sie auf eben diese Art gemacht hat, folgert aber nicht diesen Satz, sondern einen andern unmittelbar, der sich aber aus diesem herleiten läßt. Man setze nemlich zwey Prismen von gleicher Breite. Die Dicke AB des einen sey $= a$, des andern $= \alpha$. Bey jenem sey in der Distanz $AH = a$ die brechende Kraft p, bey diesem in der Distanz $AH = \alpha$ die brechende Kraft π angebracht, so ist (§. 125.)

$$p = Nab$$

$$\pi = N\alpha b$$

Setzt man aber, daß im zweyten Fall die brechende Kraft ebenfalls in der Distanz a angebracht werde, so wird sie in der Verhältniß von α zu a verändert, und demnach, wenn wir sie $= \upsilon$ setzen,

$$\upsilon = \frac{\alpha\pi}{a} = \frac{\alpha\alpha Nb}{a}.$$

Hieraus folgt

$$p : \upsilon = Nab : \frac{N\alpha\alpha b}{a}$$

oder

$$p : \upsilon = aa : \alpha\alpha$$

Und dieses ist der Satz, den Bilfinger unmittelbar aus seiner Rechnung herleitet. Es nimmt nemlich die brechende Kraft, bey gleichem Abstande vom Ruhepunct und bey gleicher Breite der Prismen, im Verhältniß des Quadrats von ihrer Dicke zu. Daß sie zugleich auch im Verhältniß der Breite, und in umgekehrter Verhältniß des Abstandes vom Ruhepuncte sey, das wird hiebey als für sich klar vorausgesetzt.

§. 127.

§. 127.

Ungeachtet nun die hier angegebene Berechnung mit der Bilfingerschen auf eines hinausläuft, so unterscheidet sie sich dennoch in der Ordnung des Vortrages. Denn alles genau betrachtet, so hätte der zu Ende des §. 125. aus der Rechnung gefolgerte Satz als ein für sich klarer Satz vorgetragen werden können, und der zweyte wäre sodann nur eine Folge davon gewesen. Indessen werde ich darauf nicht so sehr dringen, weil sich über die ganze Sache noch andere Betrachtungen machen lassen.

§. 128.

Einmal sieht man leicht, daß die beyden Sätze (§. 125. 126.) nur deswegen so geschmeidig sind, weil darinn von ganzen Prismen die Rede ist, oder $x = a$ gesetzt worden. Es mag demnach die Stärke der Prismen immer im Verhältniß des Quadrats ihrer Dicken aa seyn, so folgt daraus gar nicht, daß die Stärke eines Theils x in Verhältniß von dem Quadrate xx seyn müsse. So viel folgt wohl, daß, wenn letzteres wäre, auch ersteres statt haben würde, aber nicht umgekehrt. Demnach bleibt die Frage, was y für eine Function von x ist, noch ganz unerörtert. Galiläus setzte $y = b$, und demnach $(y:b) = 1$. Auf diese Art wurde

$$dM = \frac{x}{a} \cdot b\,dx.$$

$$M = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{bxx}{a}$$

und für $x = a$

$$M = \tfrac{1}{2}\,ab = \tfrac{1}{2}\,M'$$

Die Versuche wollten aber damit nicht übereinstimmen, und so glaubte Leibnitz richtiger

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$$

setzen zu können. Dieses gab

$$dM = \frac{xx}{aa} \cdot b\,dx$$

$$M = \frac{bx^3}{3a^2}$$

und für $x = a$

$$M = \tfrac{1}{3}\,ab = \tfrac{1}{3}\,M'$$

Dieses entfernte sich nun weniger von Mariottens Versuchen, wodurch

$$M < \tfrac{1}{3}\,M'$$

und

$$M > \tfrac{1}{4}\,M'$$

gefunden wurde. Bilfinger legte demnach

$$M = \tfrac{2}{7}\,M'$$

zum Grunde, und indem er

$$\frac{y}{b} = \left(\frac{x}{a}\right)^m$$

annahm, so bestimmte er den Exponenten m so, daß die Rechnung mit dem Versuche übereinkam. Endlich fügt er doch bey, daß die Ungewißheit, in welchem Punct der Linie A B der Ruhepunct müsse genommen werden, hiebey nichts

nichts absolutes bestimmen lasse. Da nun dieses nicht anders ist, so thut man freylich am besten, wenn man sich schlechthin nur an die beyden Sätze (§. 125. 126) für ganze Prismen hält, und Erfahrungen mit zum Grunde legt. Ich merke noch mit an, daß diese zween Sätze sich nicht auf rechtwinklichte Prismen allein einschränken, sondern bey cylindrischen ebenfalls statt haben, und sich überhaupt auch auf solche ausdehnen, die ähnliche Grundflächen und ähnliche Lage haben.

§. 129.

Wir haben ferner bey der angestellten Berechnung den Fall vorgenommen, wo Bb oder die Ausdehnung der Fibern die gröste mögliche ist, die sie ohne zu brechen haben kann. Dieses ist auch was man gewöhnlich thut, wenn man die Möglichkeit des Brechens und die dazu erforderliche Kraft untersucht. In dieser Absicht hat Bb bey einerley Materie allemal eine bestimmte Größe, die Dicke AB mag groß oder klein seyn, so viel man will. Aus gleichem Grunde hat auch jede andere Fiber Pp eine bestimmte Ausdehnung, die schlechthin von der Verhältniß AB : AP abhängt. Gedenkt man sich demnach noch ein Prisma, welches bey gleicher Breite n mal dicker sey als AP, so wird die Kraft PM = y, die wir hier für die Fibern dx rechneten, dort für die Fibern n dx gerechnet werden müssen, und so wird man die Summe der Momente

Momente n mal größer herausbringen (§. 124.) woraus denn, weil AH ebenfalls n mal größer genommen wird, ohne viele Rechnung folgt, daß die brechende Kraft bey gleichem Abstande vom Ruhepunct, wie das Quadrat der Dicke AB anwachse.

§. 130.

Man sieht aber leicht, daß diese Art zu schliessen ebenfalls angeht, wenn gleich die Ausdehnung Bb nicht die gröste mögliche ist. Genug daß man sie, wenn Prismen von verschiedener Dicke mit einander zu vergleichen sind, beständig setze. Die Frage ist sodann nicht vom Brechen und Zerreissen, sondern nur vom Biegen und Ausdehnen, und zwar bis auf einen bestimmten Grad.

§. 131.

Es seyen demnach drey Prismen von gleicher Breite. Die Dicke des ersten sey AB, des andern A′B′, des dritten A″B″ = AB. Hingegen sey die Ausdehnung der äußersten Fiber bey dem ersten Bb, bey dem andern B′b′ = Bb, bey dem dritten B″ b″ so daß der Winkel A″ = A′ werde. Endlich sey die biegende Kraft, und zwar in gleicher Entfernung vom Ruhepunct, bey dem ersten = V, bey dem andern = V′, bey dem dritten = V″. Da nun bey den ersten Prismen die Ausdehnung Bb = B′ b″ ist, so haben wir (§. 126.) Fig. 25.

$$V : V' = (AB)^2 : (A'B')^2$$

 Nun

Nun ist die Kraft V dergestalt eine Function des Winkels A, daß, wenn dieser Winkel sehr klein ist, man sich begnügen kann, V im Verhältniß von A zu setzen. Bey dieser Voraussetzung haben wir demnach

$$V : V'' = A : A''$$

Da nun $A'' = A'$

und

$$A : A' = (A'B') : (AB)$$

so ist

$$V : V'' = (A'B') : (AB)$$

Es ist aber auch

$$V : V' = (AB)^2 : (A'B')^2$$

demnach

$$V = \frac{V''(A'B')}{(AB)} = \frac{V'(AB)^2}{(A'B')^2}$$

welches

$$V' : V'' = A'B')^3 : (AB)^3 = (A'B')^3 : (A''B'')^3$$

giebt, und anzeigt, daß bey gleichen Winkeln A', A'' die biegende Kräfte wie die Cubi der Dicken anwachsen.

§. 132.

Macht man demnach

$$A''B''' = A'B'$$
$$A''b''' = A'b'$$

so ist

$$V' : V'' = (A''B''')^3 : (A''B'')^3$$

Man

Man setze nun

$$A''B''' = x$$
$$A''B'' = \xi$$

und die Kräfte für die Fibern B''', B'' seyn y, η, so ist

$$V' = \int y x dx$$
$$V'' = \int \eta \xi d\xi$$

demnach

$$\int y x dx : \int \eta \xi d\xi = x^3 : \xi^3$$

welches

$$\frac{\int y x dx}{x^3} = \frac{\int \eta \xi d\xi}{\xi^3} = \text{Const.} = A$$

giebt. Da demnach

$$\int y x dx = A x^3$$

so wird

$$y x dx = 3 A x^2 dx$$
$$y = 3 A x$$

Und hieraus folgt, daß, wenn das Prisma nur sehr wenig gebogen wird, die Kraft y im Verhältniß von x, und demnach im Verhältniß der Ausdehnung der Fibern anwachse. Da man nun dieses ebenfalls hätte zum Grunde legen können, so würde auch hinwiederum daraus gefolgt seyn, daß bey sehr kleinen Winkeln die biegende Kraft im Verhältniß des Winkels sey. Den ersten dieser Sätze nahm Leibnitz überhaupt an, er gilt aber in der That nur bey sehr geringen Beugungen,

 weil,

weil, wenn (Fig. 24.) Bb am größten ist, die krumme Linie AMG in G mit AH parallel wird, und demnach nicht gerade seyn kann. Den andern Satz räumten **Huygens** und **Leibnitz** dem **Jacob Bernoulli** ein, und dieses konnte um desto eher geschehen, weil bey der Theorie der Krümmung elastischer Federn die Winkel nicht nur sehr klein, sondern unendlich klein genommen werden müßen, weil die Krümmung in einem fortgeht.

§. 133.

Fig. 24. Wir haben übrigens bisher immer vorausgesetzt, daß die Kraft y schlechthin nur eine Function der Ausdehnung oder Zusammenpressung der Fibern Pp sey. Es scheint aber dieses höchstens nur bey sehr geringen Beugungen statt zu haben, wo nemlich weiter nichts als die Cohäsionskräfte in Betrachtung kommen. Ist aber z. E. die Zusammenpressung so groß, daß die Theilchen einander von ihrer Stelle treiben, so hängt die Kraft y zugleich auch von der Lage einer jeden Fiber ab, und sie wird überhaupt betrachtet um so viel größer, je mehr die Fiber von der Oberfläche entfernt ist. Dieses erhellet aus dem oben (§. 32.) angeführten Versuche vom Einsinken des Maaßstabes in trockenem Sande. Denn wird eine Fiber zum Weichen genöthigt, so treibt sie die ganze Columne von Theilchen von sich, und die dazu erforderliche Kraft wird der Länge dieser Columne proportional, so wie bey dem Maaßstabe die Tiefe des Ein-

sinkens im Verhältniß des Gewichts war. Hiebey muß nun allemal für jede Fiber ihr geringster Abstand von der Oberfläche genommen werden, weil nach diesem die Kraft des Widerstandes zu schätzen ist. Da nun diese Kraft am Rande selbst = o wird, wo dessen unerachtet die Cohäsionskraft bleibt, so sieht man leicht, daß y nicht dem **Product**, sondern der **Summe** dieser beyden Kräfte gleich gemacht werden muß. Etwas ähnliches hat auch bey dem Ausdehnen der Fibern statt, weil, wie die Erfahrung lehret, die Fibern dabey ihren Ort verändern, sich der Breite nach mehr zusammenfügen, und dadurch einander der Länge nach auszuweichen nöthigen. Dieses alles macht die Rechnung, die selbst für den einfachsten Fall nicht ganz ins reine zu bringen ist, noch ungleich zusammengesetzter und schwerer, und um desto mehr muß man noch zur Zeit davon abstrahiren. Da übrigens auch bey dieser Betrachtung y eine Function von x bleibt, so ist auch der Erfolg in Absicht auf obige zween Sätze (§. 125. 126.) eben nicht sehr verschieden, und zwar um desto weniger, je weniger die Körper zähe, und je mehr sie hingegen spröde sind. Endlich können wir noch anmerken, daß die ganze Rechnung bey solchen Körpern besser mit der Erfahrung übereintrift, die wenigstens eine Dicke von einem oder mehreren Zollen haben. Bey dem Holze ist dieses besonders zu merken. Denn wenn man zu den Versuchen hölzerne Stäbchen nehmen wollte, die kaum 1 oder 2 Linien dicke

dicke sind, so würde der Erfolg sehr veränderlich und zweifelhaft seyn, wie man es an den Ringen, die man bey abgesägten Holzstämmen die Jahre nennt, sehr deutlich sehen kann, weil jeder Ring aus Fibern von sehr ungleicher Stärke besteht, und eine beträchtliche Breite hat.

§. 134.

Die Versuche sind übrigens der bisher vorgetragenen Theorie nicht zuwider. Belidor bringt solche vor, die zum Muster dienen können. Hingegen kann ich nicht finden, woher es kömmt, daß Muschenbröks Versuche unter sich selbst mit andern Versuchen und mit der Theorie ungleich weniger harmoniren. Seine Hölzer brechen acht bis zehnmal leichter als sie zerreißen, ungeachtet sie den Mariottischen Versuchen und selbst auch der Theorie zufolge kaum drey, höchstens viermal leichter brechen als zerreißen sollten.

§. 135.

Von solchen Versuchen, wodurch die Kraft mit der Ausdehnung verglichen wird, ist mir nur derjenige bekannt, den Jacob Bernoulli mit einer Darmsaite angestellt hat. Sie war 3 Fuß lang, und indem er 2, 4, 6, 8 Pfund Gewicht anhängte, dehnte sie sich um 9, 17, 23, 27 Linien aus, demnach langsamer als nach Verhältniß des Gewichtes. Bilfinger glaubt, daß, wenn er den Cubus der Ausdehnung dem Quadrate des Gewichtes proportional setze, dieses mit dem Bernoullischen Versuche gut zutreffen, auch den

den Mariottischen Versuchen und selbst der Natur der Sache gemäß seyn würde. Ich glaube nun von allem diesen ganz anders urtheilen zu können. Denn einmal sind

die Cubi der Ausdehnung		die Quadrate der Gewichte		Die Verhältniße
729	:	4	=	182 : 1
4913	:	16	=	307 : 1
12167	:	36	=	338 : 1
19683	:	64	=	308 : 1

Diese Verhältnisse sind nicht nur nicht gleich, sondern fast ums doppelte und daher viel zu merklich von einander verschieden. Man setze aber überhaupt die Ausdehnung $= x$, das Gewicht $= y$. Soll nun x^3 im Verhältniß von y^2 seyn, so wird

$$x^3 = m.\ y^2$$

Dabey hat nun y nicht nur kein maximum, und x keine Gränze, sondern es wird, wenn die Ausdehnung sehr klein genommen wird, dennoch nicht

$$x = my$$

und eben so wenig hat y keinen möglichen Werth, wenn x negativ genommen wird.

§. 136.

Setze ich aber

$$x + 1 = \tfrac{11}{2}y - \tfrac{1}{4}yy$$

 so

so drückt diese Formel ganz nett alle Zahlen des Bernoullischen Versuches aus. Denn es wird

für $y = 2$	$x = 9$
4	17
6	23
8	27

und hiebey kann x ein maximum werden, und demnach eine Gränze haben. Die Rechnung giebt

$$o = dx = \tfrac{11}{2}\, dy - \tfrac{1}{2}\, ydy$$

demnach $y = 11$

das will sagen, die Saite würde bey 11 Pfunden gebrochen seyn. Indessen werde ich die Formel

$$x + 1 = \tfrac{11}{2}\, y - \tfrac{1}{4}\, yy$$

dennoch nicht als durchaus richtig ansehen. Sie giebt für $y = o$, den Werth $x = -1$, anstatt $x = o$. Nun läßt sich zwar dieses erklären, wenn man setzen will, **Bernoulli** habe sich in der Art, wie er die Ausdehnungen gemessen, um 1 Linie versehen, und er hätte jede um 1 Linie größer finden oder angeben sollen. Damit würde $x + 1 = \xi$ und

$$\xi = \tfrac{11}{2} . y - \tfrac{1}{4} . yy$$

herausgekommen, und ξ zugleich mit $y = o$ geworden seyn. Es ist aber überhaupt zu vermuthen, daß man statt dieser Quadratgleichung eine ganze Reihe

$$x = ay - by^2 + cy^3 - dy^4 + \&c.$$

anneh-

annehmen muß, und eben so dürfte die Ausdehnung einer Saite wohl nicht für jede andere Körper zum Muster dienen.

§. 137.

Aus dem, daß die brechende Kraft bey vierecktigen Balken im Verhältniß der Breite und des Quadrats der Dicke zunimmt, hat bereits Parent und nachgehends Kraft ein an sich artiges Problem abgeleitet. Es ist die Frage: **aus einem runden Stamm Holz den stärksten Balken zu schneiden.** Der Diameter des Stammes wird hiebey die Diagonale des Balkens, und als gegeben angenommen. Man kann ihn $= 1$, die Breite $= \sin. \omega$, die Höhe oder Dicke $= \cos. \omega$ setzen. Und da muß

$$\sin\omega . \cos. \omega^2 = \text{maximum}$$

seyn. Die Rechnung giebt

$$\cos. \omega^2 . d\sin. \omega + 2 \sin\omega . \cos. \omega . d \cos. \omega = o$$

demnach

$$\cos. \omega^3 d\omega - 2 \sin\omega^2 . \cos. \omega . d\omega = o$$

oder

$$\cos. \omega^2 - 2 \sin\omega^2 = o$$

$$\text{tang.} \omega = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

und so muß sich die Breite zur Dicke wie 1 zu $\sqrt{2}$ verhalten. Indessen scheint es dennoch, wenn man auf die verschiedene Lage der Fibern bey solchen Balken Acht hat, daß die Verhältniß geringer seyn könne, und daß man unter den bey-

beyden gewöhnlichen Verhältnissen (2 : 3) und (3 : 4) lieber das letztere wählen sollte.

§. 138.

Ueberdies werden die Balken nicht immer so groß gemacht, als es der Stamm leidet, und denn ist auch von dem hier berechneten maximo nicht mehr die Rede. Es läßt sich aber dabey ein anderes gedenken, welches von der Dauerhaftigkeit hergenommen ist. Die Feuchtigkeit und überhaupt das etzende und vermodernde Wesen der Luft greift die Körper nach Verhältniß ihrer Flächen an. Diese Wirkung soll nun ein minimum, die brechende Kraft aber ein maximum seyn. Das will nun genauer betrachtet so viel sagen, daß man bey einerley brechender Kraft die geringste Vermoderung, oder bey einerley Vermoderung die gröste brechende Kraft erhalten wolle. Es sey nun die Breite des Balkens $= x$, die Dicke $= y$, so können wir $2x + 2y$ der Fläche gleich setzen, und dieses wird desto weniger fehlen, je länger der Balken ist. Ist demnach

$$x + y = a$$

eine beständige oder bestimmte Größe, so muß die brechende Kraft

$$xyy = \text{maximum}$$

seyn. Nun giebt die erste Formel

$$x = a - y$$

Wird dieser Werth in der andern gesetzt, so ist

$$ay^2 - y^3 = \text{maximum}$$

demnach

$$0 = 2aydy - 3yydy$$

folglich

$$y = \tfrac{2}{3}a$$

und

$$x = \tfrac{1}{3}a$$

$$x : y = 1 : 2$$

Die breitere Seite ist demnach doppelt größer, als die schmale, auf welche der Balken gelegt wird. Man findet eben dieses, wenn man $xyy = b^3$ als bestimmt annimmt, und $x + y =$ minimum macht, das will sagen, für einerley brechende Kraft die geringste Möglichkeit zur Vermoderung sucht. Denn die erste Gleichung giebt

$$x = \frac{b^3}{y^2}$$

und damit wird

$$\frac{b^3}{y^2} + y = \text{minimum}$$

$$\frac{-2b^3 dy}{y^3} + dy = 0$$

$$y = b.\sqrt[3]{2}$$

$$x = b : \sqrt[3]{4}$$

$$x : y = \frac{b}{\sqrt[3]{4}} : b\sqrt[3]{2} = 1 : 2$$

Hiebey sind nun x, b, y wie 5, 8, 10 oder genauer wie 63, 100, 126. Und da $y = 2x$ ist, so ist dieses eben so viel, als wenn die Zimmerleute zween gleich breite und dicke Balken über einander legen, und sie durch ein Sprengwerk verbinden.

VIII. Die Stärke des Windes in Absicht auf die Gebäude.

§. 139.

Ungeachtet die Gebäude gewöhnlich Masse genug haben, der Gewalt des stärksten Sturmwindes zu wiederstehen, so giebt doch die Erfahrung, daß man nicht immer genug dafür sorgt, und in sofern lohnt es sich gar wohl der Mühe, die Theorie davon anzugeben, wenn man auch nur Schorsteine und einzelne Mauern dadurch in mehrere Sicherheit bringen könnte.

§. 140.

Ein Gebäude setzt dem Winde überhaupt betrachtet seine eigene Last, die Befestigung in dem Fundamente, und die Cohäsionskräfte des Gemäuers und des Holzwerkes entgegen. Von diesen dreyen Stücken ist die Last das einige, worauf man immer zählen kann. Das Fundament kann schwächer werden. Die Cohäsionskräfte können aufhören, und wenn dadurch ein Gebäude baufällig wird, so hat es keine andere Kraft mehr, als die, so ihm sein eigenes Gewicht giebt. Es kann daher geschehen, daß ein neues Gebäude jeden Stoß des Windes aushält, mit der Zeit aber vom Winde umgeschmissen wird. Man hat daher vornemlich nur auf das Gewicht eines Gebäudes Rechnung zu machen, wenn es so angelegt werden soll, daß es auch nach Jahrhunderten gegen den Wind Riß halten kann, und daß das mole sua stat dabey anwendbar sey. Die Frage ist nun aber, wie die Kraft des Windes bestimmt werde, und wie groß man sie setzen könne, wenn sie so groß gerechnet werden soll, als sie jemals nach dem Laufe der Natur statt haben kann.

§. 141.

In Ansehung der erstern dieser Fragen werde ich das voraussetzen, was ich theils in den Anmerkungen über die Gewalt des Schießpulvers theils in den *Memoires de l'Academie R. des Sc. et B. L. de Berlin 1765* über die Theorie vom Wiederstande der Luft angemerkt habe. Und so bleibt nur noch übrig, daß ich hier eine Anwendung davon auf die Gebäude mache. In dieser Absicht werden folgende Sätze bey den übrigen zum Grunde gelegt werden können.

§. 142.

Es stelle A B C D das Profil eines Würfels vor, dessen 6 Flächen gleiche Quadrate sind. Dieser Würfel liege auf ebenem Boden, und der Wind stürme gerade auf denselben nach der Richtung F E, so läßt sich hiebey auf eine gedop- Fig. 26.

doppelte Art ein Winkelhebel gedenken, dessen Ruhepunct in A ist. Einmal ist es der Hebel ABC, auf dessen Seite CB die Gewalt des Windes drückt. Diese Gewalt läßt sich als in dem Mittelpunct E vereinigt gedenken, und sie thut eben die Wirkung, als wenn der Würfel vermittelst eines über der Rolle H hangenden Gewichtes P nach der Richtung EGH gezogen würde. Das Moment ist demnach

$$M = P . AI$$

Sodann drückt der Würfel dergestalt durch sein Gewicht herunterwerts, als wenn dasselbe in dem Schwerpunct G vereinigt wäre, oder als wenn an dem Hebel AB aus dessen Mitte h ein Gewicht p herunter hienge. Das Moment ist demnach

$$m = p . Ah$$

Setzt man nun die Kraft des Windes dem Widerstande gleich, so wird

$$M = m$$

demnach

$$P . AI = p . Ah$$

Da nun bey dem Würfel

$$AI = Ah$$

ist, so wird schlechthin

$$P = p.$$

und damit muß die Kraft des Windes dem Gewichte des Würfels gleich seyn.

§. 143

§. 143.

Nun giebt die Theorie vom Widerstande der Luft, daß man die Höhe einer Luftsäule bestimmen soll, die mit dem Würfel gleiche Grundfläche hat, und von gleichem Gewichte ist. Man setze zu diesem Ende, der Würfel sey nmal schwerer als ein gleichgrosser Würfel von Luft, so wird diese Columne Luft nmal höher seyn als der Würfel. Setzt man demnach die Höhe des Würfels = h rheinländische Fuß, so ist die Höhe der Columne = nh Fuß.

§. 144.

Ferner giebt eben die Theorie an, daß, wenn ein Körper in freyem Raume aus dieser Höhe fallen würde, die zuletzt erlangte Geschwindigkeit C der Geschwindigkeit des Windes gleich seyn werde, welcher gegen den Würfel eine dessen Gewicht gleiche Kraft äußert. Demnach haben wir, vermöge der Theorie vom Fall der Körper,

$$CC = \frac{125}{2} . nh$$

$$C = 5\sqrt{(\tfrac{5}{2} nh)}$$

Hiebey wird n so angenommen, daß dadurch nicht die absolute specifische Schwere des Würfels, sondern der Ueberschuß derselben über die specifische Schwere der Luft ausgedrückt wird. Die absolute Schwere würde nemlich n + 1 mal größer als die Schwere der Luft seyn. Uebrigens wird dieser Unterschied unerheblich, wenn der Würfel von Holz, Mauer, Stein rc. ist.

 §. 145.

§. 145.

Hiebey ist nun C ebenfalls diejenige Geschwindigkeit, die der Würfel, wenn er nach der Richtung DA in der Luft gerade herunterfiele, endlich erhalten würde. Diese Geschwindigkeit muß demnach der Wind haben, wenn er den Würfel um die Ecke A umzuwelzen im Stande seyn soll. Man sieht auch leicht, daß, je größer die Geschwindigkeit noch überdis wird, desto geschwinder auch der Würfel umgeworfen oder umgewälzt wird.

§. 146.

Wir wollen nun den Fall setzen, die specifische Schwere des Würfels n sey $= 1690$ (welches ungefehr die specifische Schwere der Ziegelsteine ist) und $AD = h$ sey $= 1$ rheinl. Fuß, so ist

$$C = 5\sqrt{(\tfrac{5}{2} . 1690)} = 325$$

Demnach müßte der Wind, um einen solchen Würfel umzuwerfen, wenigstens eine Geschwindigkeit von 325 Fuß in einer Secunde Zeit haben. Wäre hingegen die specifische Schwere μ mal größer, so würde

$$C = 325\sqrt{\mu}$$

seyn. Diese Formel kann nun zum Grunde gelegt werden.

§. 147.

Die nächste Anwendung, die wir davon machen können, betrift jede andere viereckigte Körper AL. Man setze die
Fig. 27.

Höhe

Höhe $BC = h$ rheinl. Fuß
Breite $BK = b$
Dicke $AB = d$

Der Wind stoße nach der Richtung FE gerade auf die Fläche BCLK, so ist nun hier seine Kraft um desto größer, je größer das Product aus der Fläche BCLK und der halben Höhe NE ist. Demnach haben wir das Moment

$$M = \tfrac{1}{2} hhb;$$

Hingegen ist das Moment m desto größer, je größer das Product aus dem körperlichen Raume hbd und der halben Dicke Ag ist. Demnach haben wir

$$m = \tfrac{1}{2} hbdd$$

und hieraus folgt

$$CC = (325)^2 \mu . \frac{m}{M} = 325^2 . \mu dd : h$$

$$C = 325\sqrt{\frac{\mu dd}{h}}$$

Vermittelst dieser Formel kann nun von den drey Werthen d, h, C einer durch die beyden übrigen, und durch das Verhältniß der specifischen Schwere μ bestimmt werden.

§. 148.

So z. E. im Hornung 1770 warf ein starker Westwind eine Gartenmauer von Backsteinen mit einem Stoße um, und zwar in einer Länge von 170 Fuß. An beyden Enden blieb

die

die Mauer noch stehen, und so war eigentlich ein Stück von 170 Fuß lang herausgerissen. Der Riß ging, vermuthlich nach der Lage der schwächeren Fugen der Mauersteine, auf beyden Seiten schief herunter, so daß das herausgerissene Stück oben viel länger als unten war. Die Höhe der Mauer vom Boden an war 10 Fuß, ihre Dicke 10 Zoll. Sie hatte aber von 10 zu 10 Fuß Pfeiler, welche 20 Zoll breit und 14 Zoll dick waren, so daß wir die mittlere Dicke 11 Zoll rechnen können. So liesse sich auch eine mittlere Länge setzen, wenn diese in Betrachtung käme. Nehmen wir nun für eine Mauer von Backsteinen $\mu = 1$, und

$$h = 10$$
$$d = \tfrac{11}{12}$$

so finden wir

$$CC = 325^2 . (\tfrac{11}{12})^2 : 10$$
$$C = 94\tfrac{1}{4}$$

Demnach muß der Wind bey diesem Stoße wenigstens 94 Fuß in einer Secunde Zeit durchlaufen haben. Die Geschwindigkeit war aber ohne allen Zweifel noch größer, theils weil die Mauer Knall und Fall umgeschmissen worden, theils auch weil es immer noch eine Kraft mehr brauchte, die Backsteine aus ihren Fugen zu reißen. Denn so gering auch die Cohäsion mag gewesen seyn, so ging es doch ohne einige Friction nicht an.

§. 149.

§. 149.

Man setze nun hinwiederum, ein Schorstein sey 2 Fuß breit und dick, und die Backsteine haben eine Dicke von zween Zollen. Die Frage ist, wie hoch ein solcher Schorstein seyn könne, damit er von einem Winde, der 100 Fuß in einer Secunde Zeit durchläuft, nicht umgeschmissen werde, wenn die Fugen mit der Zeit nicht mehr feste zusammenhalten. Nun ist die inwendige Weite desselben = 22mal 22 Quadratzoll, die auswendige = 24mal 24 Quadratzoll. Der Schorstein ist demnach wie ein Körper anzusehen, der

$$\frac{24.24 - 22.22}{24.24} = \frac{576 - 484}{576} = \frac{92}{576}$$

das will sagen, in der Verhältniß von 576 zu 92 oder von 144 zu 23 leichter ist, als wenn er ein maßives Prisma von Backsteinen wäre. Demnach ist hier

$$\mu = \tfrac{23}{144}$$
$$d = 2'$$
$$C = 100'$$

Da nun (§. 146.) die Höhe

$$h = 325^2 . \mu dd : CC$$

ist, so haben wir

$$h = \frac{325.325.23.\ 2.2}{100.100.144} = 6\tfrac{3}{4}$$

Es kann demnach ein solcher Schorstein höchstens nur $6\tfrac{3}{4}$ Fuß hoch über das Dach aufgeführt werden,

den, dafern er von einem Winde, der 100 Fuß in einer Secunde Zeit durchläuft, nicht umgeschmissen werden soll. Es wird übrigens auch hier vorausgesetzt, daß der Schorstein eben nicht neu, sondern schon ohnehin sehr baufällig sey.

§. 150.

Bey solchen Körpern, welche nicht viereckige Prismen sind, wird die Rechnung nach Beschaffenheit ihrer Figur weitläuftiger. Da man aber in der Baukunst eben nicht will, daß ein Körper dem stärksten Winde schlechthin nur das Gleichgewicht halte, so kann man sich in den meisten Fällen statt des Körpers ein Prisma von gleicher Höhe, Grundfläche und Gewicht gedenken, welches der Wind leichter als den Körper selbst umwirft. Bey Körpern, deren Breite von unten nach oben geringer wird, hat dieses nothwendig statt. Kann demnach das Prisma dem Winde genugsam widerstehen, so wird es der Körper selbst noch vielmehr thun. Ich werde indessen dennoch von solchen Flächen, die gegen den Horizont geneigt sind, noch einige Sätze vortragen.

§. 151.

Fig. 28. Es sey AG das Profil einer solchen Fläche, AB der horizontale Boden. Fährt nun der Wind nach der Richtung DC mit einer Kraft = DC an, so wird diese in die parallele Kraft DE und in die senkrechte Kraft EC aufgelößt, und diese leztere allein ist wirksam. Sie löst sich

sich aber noch ferner in die verticale Kraft EF und in die horizontale Kraft CF auf, und der Erfolg ist, daß die Kraft EF sich mit der Schwere vereinigt, und demnach den Körper noch fester auf den Boden drückt, und daß hingegen die Kraft CF allein den Körper umzuwerfen abzielt. Die Kraft, womit der Wind auf die ganze Fläche drückt, kann immer als in einem Punkt derselben vereinigt angesehen werden, und dieser Punkt ist bey ebenen Flächen mit ihrem Schwerpunct einerley.

§. 152.

Es sey nun AGB das Profil eines liegenden triangulären Prisma, so ist der Schwerpunct der Seite AG mitten auf derselben in C. Man löse die Kraft des Windes CD, in die parallele DE, und senkrechte EC auf; so ist es eben so viel, als wenn das Prisma mit einer Kraft = CE nach der Richtung EC gedrückt würde. Geht nun diese Richtung durch den Punkt B, so sieht man leicht, daß das Prisma, so groß auch die Kraft CE seyn mag, nicht umgewälzt, sondern höchstens nur vorwerts geschoben werden kann. In diesem Fall ist das Prisma gleichseitig, und demnach kann ein solches Prisma, so leicht es auch seyn mag, von dem Winde nicht umgewälzt, sondern höchstens nur vorwerts geschoben werden. Dieses hat in allen denen Fällen noch mehr statt, wo EC verlängert innerhalb BA die Grundfläche durchschneidet. Fig. 29.

§. 153.

Fig. 30. Es sey AGB das Profil einer viereckigten Pyramide, so fällt der Schwerpunkt C auf AC $= \frac{1}{3}$ AG. Die Kräfte seyn CD, CE, ED, wie vorhin. Trift nun EC verlängert in B, so kann die Pyramide vom Winde ebenfalls nicht umgewälzt, sondern höchstens nur vorwerts geschoben werden. Da nun in diesem Fall, wenn wir GB = GA setzen,

$$CC = \tfrac{2}{3}\, GB = GB.\ \cos.\ BGC$$

ist, so wird

$$\cos. BGC = \tfrac{2}{3}$$

welches

$$BGC = 48^\circ.\ 11'$$

$$AB = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.\ BG = 0{,}8164965.\ BG$$

giebt. Macht man AB größer, so fällt EC verlängert innerhalb AB, und die Pyramide kann noch um desto weniger vom Winde umgewälzt werden.

Nachtrag zum zweyten Abschnitt über das Eindringen der Pfähle.

§. 154.

Nachdem ich das bisher gesagte bereits vor 2 Jahren geschrieben, und es nebst den übrigen in diesem Bande befindlichen Abhandlungen dem Druck übergeben wollte, so wurde ich durch verschiedene andere seitdem gemachte Bemerkungen veranlaßt, das im §. 35. angegebene Verfahren genauer zu prüfen. Ich hatte es daselbst ohne Beweis vorgetragen. Indessen sieht man leicht, daß es als eine Folge aus der Leibnitzischen Theorie der Kräfte angesehen werden kann, nach welcher man einräumen muß, daß z. E. bey Ramm-Maschinen die Kraft des Rammbärens dem Product aus seiner Masse in die Höhe des Falles proportional ist, und daß in einerley Boden und bey einerley Art von Pfählen die Tiefe des Eindringens im Verhältniß dieser Kraft des Rammbärens zunimmt. Dieses nahm ich nun daselbst nicht wegen des Leibnitzischen Kräftenmaaßes, sondern wegen der unter andern von s'Gravesande deswegen angestellten ganz ähnlichen Versuchen an. Die von mir selbst angestellten und im §. 32. beschriebenen Versuche schienen davon eine Art von Bestätigung anzugeben. Indessen erhellet aus denselben weiter nichts, als daß die Tiefe des Eindringens umgekehrt wie die Grundfläche, und gerade wie das Gewicht zunimmt. Aus dem Gewichte läßt sich aber noch nicht auf die lebende Kraft, oder auf das Eindringen eines fallenden Körpers schließen. Dieser Schluß ist, so viel ich weiß, erst noch zu machen, und gar nicht leicht. Indessen ist er von äußerster Wichtigkeit, und viele noch unerörterte Fragen erwarten von diesem Schluße ihre ächte Aufklärung und Erläuterung. Es wird daher von einigem Nutzen seyn, wenn ich darinn wenigstens das Eis zu brechen suchen

suchen werde. Dieses werde ich nun auf folgende Art vornehmen.

§. 155.

Einen Körper, der wie Bley, Wachs, Butter, Thon &c. weich, oder wie Sand locker ist, sehe ich als einen wiewohl in sehr geringem Grade flüßigen Körper an, und zwar nicht in Form einer Hypothese, die allenfalls zur Aufklärung mehrerer Versuche gut gebraucht werden kann, sondern weil die Sache selbst es so mit sich bringt. Die Theilchen solcher Körper weichen beym Eindringen eines andern Körpers nur etwas mühsamer, übrigens eben so aus, wie die Theilchen flüßiger Materien. Der Unterschied besteht nur darinn, daß letztere, wenn der eingedrungene Körper wiederum herausgezogen wird, den Raum wieder ausfüllen, anstatt daß es bey ersteren meistens nicht, beym Sande nur zum Theile geschieht. Auf diesen Unterschied haben wir nun hier, wo nur von dem Eindringen die Rede ist, nicht zu sehen, und so wird er uns auch nicht im Wege stehen.

§. 156.

Aus den oben (§. 32.) angeführten Versuchen erhellet nun ferner, daß, wenn ein vierecktigter oder auch cylindrischer Körper durch sein bloßes Gewichte in Sand eindringt, die Tiefe des Eindringens dem Gewichte desselben durch seine Grundfläche getheilt, proportional ist. Das Gewicht ist demnach im Verhältniß des Products aus der Grundfläche in die Tiefe des Eindringens, und dieses will wiederum sagen, daß das Gewicht des Sandes, dessen Raum der eingedrungene oder eingesunkene Körper eingenommen, dem Gewichte des Körpers proportional ist.

§. 157.

Will man nun statt dieser Proportionalität eine Gleichheit haben, so geht es immer an, daß man dem Sande eine Art von specifischer Schwere zuschreibe, und diese so ansehe, als wenn die von dem eingedrungenen Körper aus ihrer Stelle getriebene Sandkörner so viel wiegen, als der Körper wiegt. Dieses macht sodann die hydrostatischen Sätze, in Absicht auf das Eindringen, dabey dem Buchstaben nach anwendbar.

§. 158.

Nun dringt ein Körper, welchen man, von der Oberfläche des Sandes an gerechnet, durch seine eigene Schwere, und ohne ihn aus einer gewissen Höhe fallen zu lassen, in den Sand einsinken läßt, tiefer ein, als es das bloße Gleichgewicht erfordern würde. Dieses geschieht bey eigentlich flüßigen Materien ebenfalls. Der Unterschied ist nur, daß bey diesen der Körper sich wieder aufwerts zieht, anstatt daß er bey dem Sande oder andern blos weichen Körpern in der erlangten größten Tiefe stecken bleibt. Die Rechnung giebt nun, daß diese gröste Tiefe doppelt so groß ist, als diejenige, wobey das Gleichgewicht

gewicht statt hat. Dieses macht auch die ersterwähnte specifische Schwere des Sandes doppelt größer, wenn man auf das eigentliche Gleichgewicht sieht, als wo man nur, wie es oben (§. 32.) geschehen, die ganze Tiefe des Einsenkens in die Rechnung zieht, ungeachtet in beyden Absichten die Verhältniß einerley bleibt.

§. 159.

Da es sich hiebey genauer vom großen aufs kleine schließen läßt, als hinwiederum von diesem auf jenes, so ist es gut, wenn man, um die ersterwähnte specifische Schwere des Sandes oder anderer weicher Körper zu bestimmen, lieber einen schwereren oder schwerer beladenen als einen leichteren Körper gebraucht, und sodann von diesem auf leichtere schließt. Denn beym Abmessen des Eindringens kann man gleich viel fehlen, der Körper mag viel oder wenig eingedrungen seyn. Hingegen hat eine halbe Linie bey einem Zoll weniger auf sich, als bey einem halben oder viertel Zoll.

§. 160.

Die ersterwähnte specifische Schwere müßte, um Zweydeutigkeiten zu vermeiden, einen eigenen Namen haben, da sie nur wegen Aehnlichkeit mit der specifischen Schwere flüßiger Materien so benannt worden. Vielleicht könnte sie die **dynamische Schwere**, der **hydrostatische Gegendruck**, die **Flußschwere** 2c. genannt werden. Sie ist das einige Datum, so man

man in Absicht auf das Eindringen von Seiten des Sandes oder anderer weicher Körper zu wissen nöthig hat, und muß eben so, wie die specifische Schwere, für jede Arten von Körper durch besondere Versuche gefunden werden. Diese Bestimmung vorausgesetzt, so läßt sich die Berechnung folgendermaßen angeben.

§. 161.

Fig. 31.

In den Sand oder einen weichen Körper, dessen Oberfläche EF, lasse man aus einer beliebigen Höhe H einen Cylinder AB nach der Richtung seiner Axe fallen. Es soll bestimmt werden, wie tief er eindringe. Man setze, daß AC die Tiefe sey, wo das Gewicht des Cylinders dem **hydrostatischen Gegendrucke** des Sandes gleich sey, so hat eine dem Theil AC des Cylinders gleiche Masse Sandes eben so viel dynamisches **Gewicht** als der Cylinder selbst wiegt. Es wird demnach AC durch AB mittelst der **dynamischen Schwere** des Sandes bestimmt. Man setze nun

$$AC = b$$
$$AD = \xi$$

und die Geschwindigkeit, mit welcher der bereits bis in D eingedrungene Cylinder noch ferner eindringt, sey $= c$, oder die Höhe, aus welcher er in freyem Raume fallen müßte, um diese Geschwindigkeit zu erhalten, werde $= h$ gesetzt, so ist $(b - \xi) : b$ die Beschleunigungskraft, weil dem Cylinder desto mehr von seiner Schwere benom-

benommen wird, je mehr er sich bis in C eingesenkt. Wir haben demnach zufolge des allgemeinen dynamischen Grundsatzes

$$dh = \frac{b - \xi}{b} . d\xi$$

und hieraus durch die Integration

$$bh = b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi + \text{Const.}$$

Es soll aber, wenn $\xi = 0$ ist, $h = H$ seyn, demnach ist

$$bh = bH + b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi$$

§. 162.

Ist nun der Cylinder bis in G, nemlich so tief er eindringen kann, wirklich eingedrungen, so hat er keine Geschwindigkeit mehr, demnach ist c so wie auch $b = 0$. Dieses macht

$$0 = bH + b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi$$

demnach

$$\xi = AG = b + \sqrt{(bb + 2bH)}$$

Dieses ist also die erste Formel, welche sollte gefunden werden. Man sieht daraus, daß, wenn H vielfach größer als b ist, die Tiefe des Eindringens der Quadratwurzel von H immer näher kömmt, und daß hinwiederum, wenn $H = 0$ ist, $AG = 2b = 2.AC$ wird, wie dieses bereits vorhin (§. 157.) angemerkt worden ist. Es ist auch leicht zu sehen, daß diese Gleichung von dem Satze, daß das Eindringen der Höhe des Falls proportional sey, sehr merklich abweicht, und

und mit demselben zugleich nicht bestehen kann. Jedoch die Vergleichung werden wir nachgehends anstellen, und inzwischen unsere Theorie noch weiter fortsetzen.

§. 163.

Man setze, der Cylinder stecke schon bis auf eine beliebige Tiefe in dem Sande. Der Sand wird ihn nicht aufwerts treiben, hingegen wird der Cylinder, dafern er nicht wenigstens bis in C eingesenkt ist, noch ferner einsinken. Wir setzen aber, er sey bereits bis über C eingesenkt. Soll er nun noch tiefer eindringen, so muß ihm eine Geschwindigkeit mitgetheilt werden. Dieses kann geschehen, wenn man darauf schlägt, oder einen Körper darauf fallen läßt. Wäre nun der Cylinder ganz frey, so könnte die Geschwindigkeit, so er erhalten würde, durch die bekannten Regeln des Stoßes berechnet werden. Da er aber in dem Sande steckt, so äußert sich ein Unterschied. Der Cylinder erhält die Geschwindigkeit nicht wirklich, sondern höchstens nur die Fähigkeit, sie zu äußern. Ein Theil davon geht sogleich in den Sand über. Dieser Abgang aber hebt sich dadurch wenigstens größtentheils auf, daß der Sand seinen Druck unterwerts äußert, und dadurch das Eindringen des Cylinders weniger hindert. Dieses dürfte nun wohl in Absicht auf die Tiefe des Eindringens eben so viel seyn, als wenn der Cylinder die ihm durch den Schlag mitgetheilte Geschwindigkeit

digkeit behalten hätte. Der Unterschied betrift allem Ansehen nach nur die Zeit. Man setze die Tiefe des Cylinders bey dem Schlage sey $= \xi$, die Geschwindigkeit, so ihm mitgetheilt wird, $= c$, die derselben entsprechende Höhe $= h$, so können wir auch hier die Formel

$$bh = bH + b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi$$

gebrauchen, und daraus die Höhe

$$H = \frac{bh - b\xi + \frac{1}{2}\xi\xi}{b}$$

herleiten, um daraus die Höhe zu bestimmen, aus welcher der Cylinder selbst hätte fallen müssen, um in der Tiefe ξ noch die Geschwindigkeit c zu haben, welche der durch den Schlag erhaltenen gleich ist. Ist dadurch H bestimmt, so findet sich die Tiefe, bis wohin er durch den Schlag eindringt, von der Oberfläche an gerechnet (§. 160.)

$$\xi' = b + \sqrt{(bb + 2bH)}$$

oder, wenn man für die Höhe H deren Werth setzt,

$$\xi' = b + \sqrt{(bb + 2bh - 2b\xi + \xi\xi)}$$

eine Gleichung, wodurch aus der Tiefe ξ und der Höhe h die größere Tiefe ξ' unmittelbar bestimmt wird, und welche geschmeidiger gemacht

$$\xi' - b = \sqrt{(2bh + (\xi - b)^2)}$$

vermittelst einer gleichseitigen Hyperbel leicht construirt werden kann. Dabey zeigt nun $\xi - b$ an, wie tief der Punkt C unter die Oberfläche EF

EF eindringt. Setzt man demnach $\xi - b = x$, so hat man kürzer

$$x' = \sqrt{(2bh + xx)}$$

§. 164.

Setzt man z. E. der Cylinder soll durch Schläge, welche demselben immer gleiche Geschwindigkeiten mittheilen, immer mehr eindringen, so ist h eine beständige Größe. Der Cylinder sey anfangs bis in C eingesenkt, so ist bey dem ersten Schlage $x = 0$. Man mache nun auf der Axe der Hyperbel $AB = \sqrt{(2bh)}$, die Asymtote sey AD, und halbire den rechten Winkel BAL. Endlich sey die Hyperbel BC gezogen; so macht man der Ordnung nach Fig. 32.

$$AE = AB$$
$$AG = EF$$
$$AI = GH$$
$$AK = IM$$
$$AL = KN$$
&c.

und die Abscissen AE, AG, AI, AK, AL &c. oder auch die Ordinaten AB, EF, GH, IM, KN, LP &c. werden das Maaß des Einsenkens des Punkts C (Fig. 31.) unter der Oberfläche EF seyn. Man sieht also aus der Figur, wie es damit immer langsamer zugeht, weil AE, EG, GI, IK, KL &c immer kleiner werden.

§. 165.

Wenn der Cylinder unten zugespitzt ist, so ist an sich klar, daß er leichter eindringen wird. Denn

Denn so lange die Spitze noch nicht ganz eingedrungen, kann die Beschleunigungskraft, die vorhin $= (b - \xi) : b$ war, nicht nach der Höhe allein geschätzt werden, sondern man muß sie nach dem Raume bestimmen. Ueberdis ist bekannt, daß der Widerstand bey dem zugespitzten Cylinder vermindert wird, weil die Spitze den Sand oder den weichen Körper, in den sie eindringt, leichter trennt. Sofern aber die Theilchen, so die Spitze von ihrer Stelle treibt, sich selbst wiederum Raum machen, und demnach die über ihnen liegende Masse aufwerts treiben müßen, sofern hat auch der zugespitzte Cylinder nichts voraus, wiewohl indessen das leichtere Trennen eben den Erfolg hat, als wenn die dynamische Schwere geringer wäre. Eben dieses ist auch bey solchen Fällen zu bemerken, wo der weiche Körper von der Art ist, daß die Theilchen sich näher zusammenpressen lassen. Denn dadurch wird das Aufwertsdrücken der ganzen Maße wenigstens zum Theil, und desto mehr vermieden, je tiefer der Cylinder bereits eingedrungen. Diese Verschiedenheit der Fälle ist hier besonders auch deswegen anzumerken, damit man die erst angegebene Berechnung nicht ohne vorläufige Prüfung bey solchen Versuchen anwende, wo ganz andere Umstände vorkommen. So z. E. hat s'Gravesande seine vorhin erwähnte Versuche (§. 154.) vom Eindringen der Kugeln, und zugespitzten Cylinder in feuchtem Thon angestellt. Die Theilchen des Thons

Thons sind schwammigter Art, und schwellen vom Wasser auf, so wie sie beym Eintrocknen locker werden, und zusammengedrückt werden können. Wenn ich demnach auch setze, daß seine Versuche mit aller Genauigkeit gemacht sind, so wird dennoch der Erfolg davon, daß nemlich die Tiefen, ihrem Raume nach berechnet, der Höhe des Falles proportional sind, die erstgegebene Rechnung nicht umstossen. Ich sehe indessen auch nicht, daß dieser Erfolg die erforderliche Allgemeinheit haben könne. Die Höhe des Falles muß von der Oberfläche an gemessen werden, damit das Product derselben in die Masse dem Raume der Vertiefung proportional sey. Wenn demnach die Kugel anfangs die Oberfläche berührt, und von da an eindringen soll, so ist die anfängliche Höhe $= 0$, und damit müßte der Raum des Eindringens ebenfalls $= 0$ seyn. Dieses ist nun nicht, weil die Kugel durch ihr blosses Gewicht desto mehr eindringt, je schwerer sie ist. Also müßte statt der Höhe $= 0$, eine dem Eindringen proportionale Höhe in der Rechnung zum Grunde gelegt, und zu jeden von der Oberfläche an gemessenen Höhen addirt werden. s'Gravesande thut aber dieses nicht nur nicht, sondern will, daß man nach Maaßgabe der Umstände die Höhen um etwas vermindern müße. Elem. Phys. §. 833 Den Grund hievon giebt er nicht an. Das Gegentheil aber erhellet aus dem erst gesagten. Ueberdis ist die Art, wie s'Gravesande die Vertiefungen

fungen ausmißt, sehr mißlich, zumal wenn die Kugeln bis nahe zur Hälfte in den Thon eindringen. Denn der Thon wirft sich gewöhnlich seitwärts auf, und der, welcher satt an der Kugel liegt, beugt sich unterwärts. Und dennoch soll der Raum der Vertiefung durch den Diameter ihrer Breite an der Oberfläche bestimmt werden. Es wird demnach der nach Befinden der Umstände verminderten Höhe, und dieser mißlichen Bestimmung des Raums der Vertiefung zugeschrieben werden müßen, wenn s'Gravesande aus seinen Versuchen die Regel (Elem. Phys. §. 842) herleitet, daß die Größe dieses Raumes ohne Rücksicht auf dessen Figur durch die Masse und Geschwindigkeit bestimmt sey.

§. 166.

Wir wollen aber setzen, daß diese Regel nach aller Schärfe statt habe, so folgt zum Behuf der lebenden Kräfte noch nichts daraus, sondern alles, was daraus folgt, ist, daß die vorhin (§. 164.) erwähnte Einschränkung bey dem s'Gravesandischen Versuche keine merkliche Veränderung verursacht habe. Es dehnen sich aber auch diese Versuche nicht sehr weit aus, sonst würden sich unstreitig Unterschiede gezeigt haben, die die Verschiedenheit der Figur des Körpers in der Wirkung merklich gemacht haben würde.

§. 167.

Ich habe indessen ebenfalls, und zwar im Sande, einige Versuche im Nov. 1771 angestellt.

stellt. Ich nahm anfangs von eben dem Streusande, den ich bey denen oben (§. 32.) angeführten Versuchen gebraucht hatte, und füllte damit eine kleine Schachtel an. Damit ließ ich eben den Maaßstab, und zwar ohne ihn zusammen zu legen, aus Höhen von 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12 Zollen auf denselben fallen, so daß ich jedesmal die Fläche wiederum eben abstrich, und das Umfallen des Maaßstabes dadurch verhinderte, daß ich die Hand vorhielt, woran er sich beym Neigen anlehnen konnte, ohne daß die durch den Fall in dem Sande erlangte Tiefe dadurch verändert wurde. Da der Maaßstab selbst in Zolle und Linien eingetheilt war, so konnte ich sogleich sehen, wie weit er mit Sande bedeckt war, und wie viel höher der zur Seite aufgeworfene Sand stand. Aus beyden Maaßen, deren Unterschied mit der Höhe des Falles bis auf 2 Linien anwuchs, nahm ich das Mittel. Der Erfolg war nun dieser:

Höhe des Falles.	Tiefe des Eindringens.
Zolle.	Linien.
0	$\frac{2}{3}$
1	$2\frac{1}{2}$
2	$3\frac{1}{2}$
3	$4\frac{1}{2}$
4	$5\frac{1}{2}$
5	$6+$
6	7
12	9

Setze ich nun hier $b = \frac{2}{7}$ Linien, und für H die Werthe von 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 144 Linien, so giebt die Formel (§. 161.)

$$\xi = b + \sqrt{(bb + 2bH)}$$

folgende Werthe

H Zolle.	ξ Linien.	Exper.
0	0,6	$\frac{2}{3}$
1	2,9	$2\frac{1}{2}$
2	4,0	$3\frac{1}{2}$
3	4,8	$4\frac{1}{2}$
4	5,5	$5\frac{1}{2}$
5	6,2	6+
6	6,8	7
12	9,4	9

§. 168.

Der kleine Vorrath von diesem Sande hinderte mich diese Versuche weiter fortzusetzen. Ich nahm daher ein Gefäß voll gröberen Sandes, und ließ eben den Maaßstab aus Höhen von 1, 2, 3, 4, 5 Fußen auf denselben fallen, um das Einsenken daran zu bemerken. Da fand ich nun

H Fuß.	ξ Linien.	Rechnung. ξ
1	7	7,1
2	10	10,0
3	12	12,2
4	14	14,0
5	$15\frac{1}{2}$	15,7

Die

Die dritte Columne ist nach der Formel

$$\xi = \tfrac{1}{6} + \sqrt{(\tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{3}H)}$$

berechnet. Man sieht auch, daß bey diesem gröberen Sande das Eindringen merklich geringer ist.

§. 169.

Diese Versuche kommen demnach mit der Formel

$$\xi = b + \sqrt{(bb + 2bH)}$$

ganz ordentlich überein, und mögen Anlaß geben, sie auch in Absicht auf andere Fälle anzustellen. Indessen muß sie auch nicht weiter angewandt werden, als es die Theorie mit sich bringt. Diese setzt z. E. unter andern voraus, daß der Körper falle, und demnach vermittelst seines Gewichtes, und nicht mit seiner Masse und Geschwindigkeit allein wirke. In dieser Absicht aber lohnt es sich allerdings der Mühe, bey Ramm-Maschinen Versuche im großen anzustellen, um die im §. 162. folgg. angegebene Berechnung zu prüfen. Da muß nun freylich das Erdreich, bis so weit der Pfahl eindringt, so viel möglich gleichartig, das will sagen, von gleicher Materie, Dichtigkeit und Festigkeit seyn, und die Höhe des Rammbären muß genau gemessen, auch bestimmt werden, was ihm allenfalls wegen des Anreibens an Geschwindigkeit abgeht.

§. 170.

Wollte man hingegen anstatt eines prismatischen oder cylindrischen Körpers Kugeln in

 Sand

Sand fallen lassen, und zwar aus solchen Höhen, daß die Kugeln ganz und tief in den Sand eindringen, so bringt es die oben vorgetragene Theorie an sich schon mit sich, daß die Rechnung geändert werden muß. Denn so bald die Kugel ganz im Sande ist, nimmt ihre Beschleunigungskraft nicht mehr ab, wie die von prismatischen Körpern, sondern sie bleibt ziemlich von beständiger Größe, weil der Sand, den sie aus seiner Stelle treibt, nicht bis zur Oberfläche, sondern nur bis oberhalb der Kugel aufwerts getrieben wird, und in dem von der Kugel leer gelassenen Raume, auch größtentheils wieder auf die Kugel selbst fällt. Daß dieses auch in dem Erdreiche geschieht, sieht man bey den Bomben, bey welchen das Loch, so sie sich in der Erde graben, gleich wieder mit Erde angefüllt wird. Uebrigens aber ist die Erde darinn lockerer, und dieses macht auch, daß die Beschleunigungskraft etwas und zuweilen merklich schneller abnimmt, als es bey einerley Umständen bey wirklich flüßigen Materien geschieht, jedoch immer nicht so schnell, als bey cylindrischen Körpern, auch wenn diese unten in Form einer halben Kugel abgerundet sind.

§. 171.

Wollte man nun auch setzen, daß eine Kugel ganz horizontal durch den Sand getrieben werde, so hört die von ihrer Schwere herrührende Beschleunigungskraft in Absicht auf die Bewegung der Kugel so viel als ganz auf, und man sieht

sieht leicht, daß die Rechnung dabey ganz anders gemacht werden muß, weil die Kugel da nur mit ihrer Masse und Geschwindigkeit wirkt. Da sie indessen dennoch dabey den Sand, den sie von sich wegtreibt, in die Höhe hebt, so hängt in Absicht auf die immer abnehmende Geschwindigkeit ein vieles auch von der Tiefe ab, in welcher die Kugel fortgetrieben wird. Dieses ist bey wirklich flüßigen Materien anders, weil die unter der Kugel liegende Theilchen durch ihre Schnellkraft die Kugel aufwärts drücken, und dadurch machen, daß die Verminderung der Geschwindigkeit von der Tiefe der Kugel nicht abhängt.

§. 172.

Noch bleibt die Frage, ob bey dem Eindringen eines Cylinders in den Sand oder Erdreich auch die Theorie des Widerstandes vorkomme? Dieses würde der Rechnung eine andere Gestalt geben. Ich hatte sie auch anfangs vorgenommen, fand aber bey der Anwendung auf die erst getragene Versuche, daß der Widerstand nicht nach der dynamischen Schwere, sondern allem Ansehen nach nur nach der besonderen Schwere des Sandes berechnet werden müße, und daher auch bey geringen Geschwindigkeiten nicht sehr groß seyn könne. Ich werde indessen die Berechnung hersetzen, zumal da sie auch bey flüßigen Materien anwendbar ist, und dabey dienen kann, ihren Widerstand durch Versuche zu finden.

§. 173.

Es sey demnach alles, wie im §. 160. und der Widerstand werde durch den Coefficienten a ausgedruckt, wie es in meinen Anmerkungen über die Kraft des Schießpulvers oder auch in denen Memoires de l'academie des sciences de Berlin 1765 von mir geschehen, so haben wir die Formel

$$dc = \frac{g(b-\xi)d\xi}{bc} - \frac{cd\xi}{a}$$

und hieraus das Integrale

$$h = \frac{a}{2b}\left(b-\xi+\frac{a}{2}\right)+\frac{B}{b}\cdot e^{2(b-\xi):a}$$

wo $h = cc:2g$ und log. hyperb. von $e = 1$ ist.

§. 174.

Hiebey ist nun B eine beständige Größe, welche durch ein gegebenes ξ und h bestimmt werden muß. Man setze z. E. c, h, ξ sollen zugleich $= 0$ seyn, so erhält man

$$-B = \frac{a}{2}\left(b+\frac{a}{2}\right).e^{-2b:a}$$

demnach

$$h = \frac{a}{2b}\left(b+\frac{a}{2}\right).(1-e^{2-\xi:a})-\frac{a\xi}{2b}$$

§. 175.

§. 175.

Setzt man' hingegen, daß, wenn $\xi = 0$ ist, $h = H$ seyn müße; so erhält man

$$B = \left[H-\frac{a}{2b}\left(b+\frac{a}{2}\right)\right].e^{-2b:a}$$

demnach

$$h = \frac{a}{2b}\left(b+\frac{a}{2}\right)+\left[H-\frac{a}{2b}\left(b+\frac{a}{2}\right)\right].e^{-2\xi:a}-\frac{a\xi}{2b}$$

eine Gleichung, die sich vermittelst einer logarithmischen Linie, deren Subtangente $= \frac{1}{2}$ a ist, leicht construiren läßt. Ist AB (Fig. 31.) ein Cylinder, dessen Länge $AB = \lambda$, und dessen Halbmesser $= r$, so findet sich für flüßige Materien

$$a = \frac{8rb}{3\lambda}$$

Für Sand, Erdreich ꝛc. muß aber der Werth von a, dafern nicht $a = \infty$ ist, durch Versuche gefunden werden. Und solche Versuche lassen sich auch mit flüßigen Materien anstellen, wenn man den Werth von a auf die Probe setzen will.

IX.

IX.

Anmerkungen über die Sterblichkeit, Todtenlisten, Geburthen und Ehen.

§. 1.

Tab. XVI. Der Gegenstand, den ich hier zu betrachten vornehme, ist schon ziemlich bearbeitet worden, und besonders seitdem **Graunt**, **Petty** und die Königl. Londonsche Gesellschaft der Wissenschaften angefangen, die Sterberegister als die Grundlage der politischen Rechenkunst anzusehen; und selbst auch solchen Registern mehrere Vollständigkeit zu geben, haben sich jede gesittetere Nationen bemüht, Beyträge dazu zu liefern. In Deutschland hat sich vorzüglich **Süßmilch** mit seinem sehr bekannten Werke von der **göttlichen Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts** auf mehrerley Arten um die Sache verdient gemacht, da er nicht nur selbst zu Einsammlung vollständigerer Sterbe- Geburts- und Heyrathslisten Mittel und Wege gesucht, sondern auch, was in auswärtigen Ländern in der Sache vorgenommen worden, so ziemlich gesammlet hat. Indessen betrachtete er die Sache fürnehmlich nur nach dem Maaße seiner Kenntnisse, und daher meistens nur theologisch, moralisch und politisch, letzteres auch nur so weit seine Kenntniß im Rechnen es ihm zuließ. Wir

haben aber 1767 eine von dem neulich verstorbenen Hr. Prof. **Seybert** ausgearbeitete Inauguraldissertation: de reditu annuo præsertim vitali, tontina ac fiscis viduarum, worinn das, was Süßmilch meistens zurückegelassen, nachgeholt, und die Sache in sehr schöner Ordnung historisch, juristisch und besonders auch mathematisch betrachtet wird. Es schränkt sich zwar diese Abhandlung besonders auf die Leibrenten, Tontinen und Wittwencassen ein, indessen werden doch die zu solchen Berechnungen erforderlichen allgemeineren Data mit einer guten Auswahl, und zugleich in bündiger Kürze angeführt. Sollte demnach diese Abhandlung ins deutsche übersetzt, und einer neuen Auflage des Süßmilchischen Werkes beygefügt werden, so würde man, was bisher über die Sache brauchbares gefunden worden, so ziemlich beysammen haben, wiewohl allerdings noch einige bereits im Druck erschienene Zusätze mit hinzukommen müßten, dergleichen z. E. **Wargentins** schwedisches Tabellenwerk, **D. Bernoulli** Anwendung des Integralcalculs auf die Tödlichkeit der Kinderblattern, und **Kritters** Auflösung der die Wittwencassen betreffenden Fragen ꝛc. seyn würden.

§. 2.

Indessen bleibt in der ganzen Sache noch ziemlich viel zurücke, das Stoff zu ferneren Beyträgen geben kann. Und dahin werden die hier zu liefernden Anmerkungen dienen. Ich gedenke

denke dabey nicht die Sache von ihren ersten Gründen an, vollständig durchzugehen, sondern nur Beyträge zu liefern, und da das Süßmilchische Werk in jedermanns Händen ist, so werde ich die besonderen Data vorzüglich aus demselben entlehnen und anführen.

I. Ueber die Tabellen der Sterblichkeit.

§. 3.

Wenn es die Frage ist, zu bestimmen, wie **viel jährlich, ein Jahr ins andere gerechnet, von einer gewissen Anzahl Menschen überhaupt, oder von gegebenem Alter, Geschlecht, Stande, Lebensart, Wohnorte** rc. sterben, so ist die Auflösung, die sich zuerst darbeut, diese, daß man jedes Jahr die Lebenden aufzeichne, und dann auch abzähle, wie viele davon jedes Jahr gestorben sind. Dieses hat man auch bereits in einigen Städten und Ländern vorgenommen. Es konnte aber wegen der weitläuftigen Arbeit nicht so vorgenommen werden, daß dabey weder zu viel noch zu wenig gezählt worden wäre, weil währenden Abzählens vielerley Veränderungen vorgehen, und das Abzählen theils Verdacht von Absichten erregt, theils auch nicht immer nach der äußersten Schärfe und Genauigkeit nach allen Umständen und Absichten vorgenommen wird.

§. 4.

§. 4.

Die Abzählung der jährlich und jährlich von gewissem Alter sterbenden scheint einer grösseren Richtigkeit fähig zu seyn. Jeder Todte wird ins Sterberegister eingetragen, und sein Alter gewöhnlich auch bey der Leichenbegängniß oder in der Leichenrede angemerkt. Halley hat sich demnach die Aufgabe vorgesetzt, aus denen jährlich von jedem Alter sterbenden die **Anzahl der von jedem Alter lebenden zu bestimmen.** Bey dieser Aufgabe kann die Anzahl der sterbenden noch ziemlich genau als ein Datum gebraucht werden. Es kommen aber andere Umstände dabey vor, welche die Auflösung zweifelhaft machen können. Die auf der ganzen Erdfläche jährlich von gegebenem Alter sterbenden wird man wohl nie in eine Summe bringen, noch sie pünctlich abzählen. Man hält sich daher an die Sterbelisten eines einzelnen Landes oder einer Stadt. Kommen nun z. E. in einer Stadt eben so viele Fremde an, als von den Eingebohrnen wegziehen, und ist die Anzahl der Einwohner seit 100 Jahren weder merklich vermehret noch vermindert worden; so ist die Stadt im **Beharrungsstande** und die Aufgabe leicht aufzulösen. **Denn da werden jährlich eben so viele gebohren als sterben, und es erreichen eben so viele jährlich ein gewisses Alter als jährlich von höherem Alter sterben.** Damit läßt sich dann leicht bestimmen, wie viele von 1000 oder 10000 zugleich

zugleich gebohrnen nach einer beliebigen Anzahl von Jahren noch bey Leben seyn werden.

§. 5.

Es gründet sich aber diese Auflösung auf die eben erwähnten Bedingungen, und diese müßen demnach vorerst untersucht werden. Die eine war, daß an dem Orte, aus dessen Todtenlisten die Anzahl der Lebenden und die Grade der Sterblichkeit bestimmt werden sollen, die Anzahl der Einwohner seit 100 Jahren sich nicht merklich verändert habe. Diese Bedingung trift bey London so ziemlich ein, wo seit 100 Jahren die Anzahl der jährlich Sterbenden meistens 22000 bis 24000 gewesen. Man kann aber nicht sagen, daß alle in London sterbende daselbst gebohren worden, noch daß alle daselbst gebohrne daselbst auch sterben. Indessen ist die Stadt so ziemlich im Beharrungsstande, und sofern man überhaupt schließt, daß die Sterblichkeit in grossen Städten größer als auf dem Lande ist, sofern kan London zum Muster und gleichsam zur Grenzlinie der Sterblichkeit für grosse Städte angesehen werden. Ich werde daher aus der zehnten Tabelle des zweyten Bandes des Süßmilchischen Werkes, welche die während 30 auf einander folgender Jahre zu London gestorbenen nach dem Alter angiebt, folgende Tabelle herleiten.

Alter.	Gestorbene.	Lebende.	reducirte Zahl.
0	272903	750332	1000000
2	64745	477419	636286
5	25912	412674	549996
10	22891	386762	515414
20	58474	363871	484884
30	71502	305397	407021
40	73238	233895	311726
50	59783	160675	214117
60	47269	100875	134423
70	33679	53606	71444
80	16948	19927	26555
90	2979	2979	3970

§. 6.

Die Zahlen der ersten und zweyten Columne sind aus dem Süßmilch, und zeigen an, wie viele zu London in Zeit von 30 Jahren in allem zwischen 0 und 2, 2 und 5, 5 und 10, 10 und 20 &c. Jahren gestorben. Die dritte Columne enthält die Summen der Zahlen der zweyten Columne von unten herauf gerechnet. Sie zeigt daher unmittelbar an, wie viele zu London in einer Zeit von 30 Jahren von jedem höheren Alter gestorben. Z. E. neben dem Alter von 40 Jahren steht in der dritten Columne die Zahl 233895. So viele sind demnach zu London in Zeit von 30 Jahren gestorben, die ihr vierzigstes Jahr bereits erreicht hatten, sie mögen nun viel oder wenig älter geworden seyn. Genug daß sie ihr neun und dreyßigstes Jahr schon ganz zurücke gelegt hatten.

§. 7.

Setzt man nun aber, London sey im Beharrungsstande, so haben die Zahlen der dritten Columne vermöge des §. 5. gesagten, noch eine andere Bedeutung. Sie zeigen nemlich an, wie viele von 750332 neugebohrnen in London nach 2, 5, 10, 20 ꝛc. Jahren noch bey Leben sind. In dieser Absicht habe ich die Zahlen der vierten Columne denen von der dritten dergestalt proportionirt, daß man daraus sehen kann, wie viel von 1000000 neugebohrnen in London nach 2, 5, 10, 20 bis 90 Jahren noch am Leben sind. Diese Columne zeigt demnach an, wie die Leute in London nach und nach wegsterben; das will also sagen: diese Columne giebt das Gesetz der Sterblichkeit für London an.

§. 8.

Man sieht übrigens, daß dieses Gesetz in der Tabelle nur von 10 zu 10 Jahren angegeben ist. Wenn man es also Jahr für Jahr haben will; so müßen die zwischenfallende Zahlen durch Interpolation gefunden werden. Man kann auch, wie ich es bereits im ersten Theile der Beyträge zur Mathematik in Form eines Beyspiels gezeigt, die Zahlen der vierten Columne als Ordinaten einer krummen Linie ansehen, und diese, so gut es vermittelst einer so geringen Anzahl von Ordinaten angeht, construiren, so wie ich es daselbst, wiewohl nach einem kleineren Maaßstabe, und nach einer nur sechsjährigen Todtenliste von London gethan. Indessen sind die daselbst nur aus 6 Jahren geschlossene Zahlen von denen hier aus 30 Jahren geschlossenen nicht so sehr verschieden, daß der Unterschied in der Figur zu bemerken wäre; und so kann die Figur dienen, sich überhaupt von dem Gesetze der Sterblichkeit zu London, und gleichsam mit einem Anblicke, einen Begrif zu machen. Ich werde auch das daselbst darüber, wiewohl nur summarisch, angemerkte hier nicht wiederholen.

§. 9.

Seitdem habe ich nachgeforscht, ob sich nicht für diese krumme Linie eine Gleichung a posteriori würde finden lassen, welche dieselbe wo nicht genau, doch ohne merkliche Abweichung vom wahren, vorstellen würde. Ich fand auch wirklich, daß folgende

$$y = 10000\left(\frac{96 - x}{96}\right)^2 - 6176\,(e^{-x:31{,}682} - e^{-x:2{,}43114})$$

der Sache ziemlich Genüge that. Man kann es aus folgender Tabelle sehen.

x	y calc.	y observ.	diff.
0	10000	10000	0
2	6407	6363	+44
5	5490	5500	—10
10	5153	5154	— 1
20	4838	4849	—11
30	4038	4070	—32
40	3099	3117	—18
50	2136	2141	— 5
60	1329	1344	—15
70	697	714	—17
80	260	266	— 6
90	30	40	—10

§. 10.

Die Zahlen der dritten Columne sind die aus der vorhergehenden Tabelle, um zwo Stellen vermindert oder auf 10000 reducirt. Die Unterschiede in der vierten Columne sind sehr geringe, und viel geringer, als es in einer Sache, die von so sehr vielen zufälligen Umständen abhängt, zu erwarten war. Die Gleichung ist aus einer Parabel und zwoen logistischen Linien zusammengesetzt und überhaupt sehr einfach. Das erste Glied, welches parabolisch ist, würde angeben, daß das menschliche Geschlecht eben so wegstirbt, wie ein cylindrisches Gefäß voll Wasser sich ausleert. Die zwey andern Glieder haben mit dem Erwärmen und Erkälten der Kör-

per viel ähnliches, weil dabey in der That die logistische Linie zum Grunde liegt, wie ich es im zweyten Bande von den Actis helveticis längst schon gezeigt habe. Dessen unerachtet werde ich die hier gegebene Formel nur als etwas mit der Beobachtung noch erträglich gut übereinstimmendes, und statt des Interpolirens brauchbares ansehen. Und in so fern kann sie, wenn man über die Sterblichkeit zu London Betrachtungen anstellen will, bey den Rechnungen gut gebraucht werden. Die Frage, der wievielte sowohl überhaupt als in jedem Alter stirbt, läßt sich vermittelst der Gleichung überhaupt auflösen. Inzwischen muß dennoch angemerkt werden, daß man die Formel bis über das 95ste Jahr hinaus nicht ausdehnen muß, weil das erste Glied mit dem 96sten Jahre = 0 wird.

§. 11.

Da London unter den grossen Städten mit oben an stehet, und alle, so über die Sterblichkeit geschrieben haben, urtheilen, daß der Grad der Sterblichkeit mit der Größe der Städte zunimmt, und auf dem Lande am geringsten ist; so werde ich nun diese zweyte äusserste Grenzlinie noch vornehmen, um zu sehen, zwischen welchen Schranken bey jedem Alter der Grad der Sterblichkeit enthalten ist. Ich werde aber ebenfalls annehmen, daß auch auf dem Lande der völlige Beharrungsstand da sey, weil sich sodann von den Abweichungen besonders wird reden lassen.

§. 12.

Die Data zu der Rechnung nehme ich von denen 10 + 7 = 17 Kirchspielen auf dem Lande, welche in der 23 und 24sten Tabelle im zweyten Theile des Süßmilchischen Werkes vorgestellt sind. Die Gestorbenen sind darin von 5 zu 5 Jahren ihres Alters angegeben. Ich werde sie aber von 10 zu 10 Jahren zusammennehmen, um die etwan darin vorkommenden Irregularitäten noch mehr gegeneinander aufzuheben. Daraus entsteht folgende Tabelle:

Alter.	Sterbende.	Lebende.	reducirte Zahl.
0	1575	6552	10000
1	396	4987	7627
2	472	4591	7007
5	389	4119	6287
10	318	3730	5693
20	388	3412	5208
30	396	3024	4615
40	418	2628	4011
50	606	2200	3358
60	745	1594	2433
70	602	849	1296
80	199	247	377
90	38	48	89
100	10	10	15

§. 13.

Die Zahlen dieser Tafel haben mit den Zahlen der ersten Tafel nach Ordnung der Columnen einerley Bedeutung. Da nun beyde Tafeln die äußerste Verschiedenheit in Absicht auf die Sterblichkeit vorstellen, so wird es nicht undienlich seyn, sie in folgender Tabelle mit einander zu vergleichen.

Alter.	Lebende zu London.	Lebende auf dem Lande.	Unterschied.
0	10000	10000	0
2	6363	7007	644
5	5500	6287	787
10	5154	5693	539
20	4849	5208	359
30	4070	4615	545
40	3117	4011	894
50	2141	3358	1217
60	1344	2433	1089
70	714	1296	582
80	266	377	111
90	40	89	49

§. 14.

Man sieht aus dieser Vergleichung, daß der Unterschied in den Graden der Sterblichkeit zu London und auf dem Lande überhaupt sehr merklich ist, und daß sich die Verhältniß mit den

Jahren des Alters ändert, und im hohen Alter bis zur Verhältniß von 1 zu 2 anwächst.

§. 15.

Nun ist aber die Berechnung sowohl für London als für das Land auf die bereits erwähnte Voraussetzung des Beharrungsstandes gegründet, und sofern diese Voraussetzung nicht statt hat, muß auch jede daherrührende Aenderung vorgenommen werden. Ich werde hier einer einigen Erwähnung thun. Daß nicht alle in großen Städten sterbende daselbst gebohren werden, erhellet schon an sich daraus, daß in solchen Städten überhaupt jährlich mehr sterben, als gebohren werden. Alle mehrsterbende mussen überhaupt betrachtet theils aus kleineren Städten, fürnehmlich aber vom Lande in die grösseren Städte gekommen seyn, nachdem sie bereits ein gewisses Alter erreicht hatten. Viele von solchen, besonders Knechte und Mägde, die in ihren besten Jahren in die Städte gekommen, ziehen mit herannahendem Alter wieder aufs Land zurücke. Blieben sie in den Städten, so würden sie allerdings die Anzahl der daselbst in höherem Alter lebenden vergrössern, und hinwiederum die Anzahl der auf dem Lande lebenden alten Leute vermindern, folglich aus beyden Gründen die Verhältniß der Gleichheit näher bringen. Dieses wäre also der erste Erfolg.

§. 16.

Der andere ist, daß diejenigen, die vom Lande in die Städte ziehen, und daselbst sterben, die

die Anzahl der von gleichem Alter auf dem Lande lebenden und sterbenden vermindern, in den Städten aber vermehren. Dieses macht auch, daß in der letzten Tabelle die Zahlen zwischen dem 10ten und 30sten Jahre des Alters nicht sehr verschieden sind.

§. 17.

Man setze endlich, daß z. E. 500 Personen in ihrem 20sten Jahre vom Lande in die Städte kommen, so setzt dieses voraus, daß 500 vor ihrem 20sten Jahre bereits auf dem Lande gestorben seyn müssen. Denn von 1000 gebohrnen stirbt auf dem Lande vor dem 20sten Jahre des Alters ungefehr die Hälfte weg. Diese 500 haben demnach auf dem Lande das Sterberegister vermehrt, ohne daß es durch die übrigen 500, so in die Städte ziehen, ebenfalls vermehrt würde. Dieses macht nun ebenfalls, daß die Sterblichkeit auf dem Lande in der ersten Kindheit und in den Jugendjahren größer zu seyn scheint, als sie wirklich ist. Denn fallen z. E. 500 Personen aus denen Sterberegistern auf dem Lande deswegen weg, weil sie in die Städte ziehen, so müssen auch diejenigen 500 aus eben denen Sterberegistern wegbleiben, welche mehr gebohren werden mußten, damit 500 das 20ste Jahr erreichen, und in die Städte ziehen konnten.

§. 18.

Da es nun nicht leicht ist, über solche Veränderungen nach jeden Umständen Rechnung zu zu halten, so bleibt das einige Mittel, die in Städten und die auf dem Lande sterbende in behöriger Verhältniß zusammen zu nehmen. Der Unterschied, wo sie gebohren worden, und gestorben sind, fällt dadurch weg, und die Rechnung kömmt dem Wahren näher. Nun leben überhaupt ungefehr doppelt mehr Leute auf dem Lande als in Städten, und so wird man hiedurch in den Stand gesetzt, die Grade der Sterblichkeit überhaupt genauer zu bestimmen, als wenn man die Einwohner der Städte und des Landes besonders nehmen wollte.

§. 19.

Süßmilch hat bereits auf diese Art zu verfahren gesucht, um seine Tabelle so einzurichten, daß sie die Grade der Sterblichkeit überhaupt angebe. Ich kann aber nicht sagen, daß mir seine Tabelle hinreichend Genüge leiste. Er berechnete sie nur auf 1000 gebohrne, und sagt noch überdis, daß er die in der Kindheit gestorbenen um 19 habe verringern müssen, damit er, nach seiner Art die Tabelle zu verfertigen, die 1000 Todten nett heraus bringen könne. Nimmt man nun 10000 anstatt 1000, so verwandeln sich diese 19 in 190, und dis giebt schon einen sehr beträchtlichen Unterschied, wenn man das wahre Mittel zu treffen gedenkt. Sieht man ferner in seiner Tabelle die letzte Columne nach, wo er angiebt, von wie vielen in jedem Alter einer stirbt, so kommen darin Sprünge vor, die

die von dem Gesetze der Natur sehr abweichen. Z. E. nach Süßmilch stirbt

im 29sten Jahr	einer von	90
30	- - - - -	89
31	- - - - -	88
32	- - - - -	87
33	- - - - -	86
34	- - - - -	71
35	- - - - -	70
36	- - - - -	60
37	- - - - -	58
ꝛc.		ꝛc.

Hier folgen die Zahlen 90, 89, 88, 87, 86 in ihrer natürlichen Ordnung. Woher aber bey dem 34ten Jahre der Abfall von 86 auf 71 und gleich darauf von 70 auf 60 herunter? Dies sind Unrichtigkeiten, die in solchen Tabellen theils an sich vermieden werden müssen, theils besonders auch dadurch vermieden werden, daß, wenn man nicht Decimalbrüche gebrauchen will, die Rechnung nicht für 1000 sondern für 10000, oder 100000 gemacht werden muß.

§. 20.

Um aber noch ferner zu sehen, wiefern die Süßmilchische Tabelle die Probe hält, so werde ich sie im Auszuge mit den Zahlen der letzten Tabelle vergleichen, und die Unterschiede von beyden in folgender Tabelle angeben.

Alter.	Lebende zu London.	Nach dem Süßmilch.	Lebende auf dem Lande.	Unterschied von London.	Unterschied vom Lande.
0	10000	10000	10000	0	0
2	6363	6600	7007	—237	+407
5	5500	5840	6287	—340	+447
10	5154	5400	5693	—246	+293
20	4849	4960	5208	—111	+248
30	4070	4460	4615	—390	+155
40	3117	3850	4011	—733	+161
50	2141	3130	3358	—989	+228
60	1344	2260	2433	—916	+173
70	714	1300	1296	—586	— 4
80	266	490	377	—223	—113
90	40	110	89	— 70	— 21

§. 21.

Hieraus sieht man überhaupt, daß Süßmilch die Grade der Sterblichkeit nach dem Mittelverhältniß durchaus kleiner, oder für jedes Alter mehr überlebende ansetzt, als aus den Sterberegistern für London folgt. Dieses ist in sofern ganz richtig. Hingegen sollte er die Grade der Sterblichkeit nach seinem Mittelverhältniß größer ansetzen, als sie nach der Rechnung für die auf dem Lande lebende gefunden werden. Dieses trift aber nur bis zum 60sten Jahre ein, da für das 70ste, 80ste und 90ste Jahr Süßmilch mehr alte Leute überhaupt ansetzt, als in der Columne für die Landleute angesetzt sind. Dieses letztere sollte nun nicht seyn, und in sofern kann

kann man demnach nicht sagen, daß Süßmilch das eigentliche Mittelverhältniß getroffen habe. Die Unterschiede in der letzten Columne sollten sämtlich positiv und ungefehr halb so groß seyn, als die in der fünften Columne. Sie sind aber bis zum 20sten Jahre wirklich größer, und bey den folgenden Jahren theils viel zu klein, theils gar negativ.

§. 22.

Ungeachtet demnach die Süßmilchische Tabelle eben nicht das eigentliche Mittelverhältniß angiebt, so mag sie dennoch in besonderen Absichten ihren guten Gebrauch haben. So z. E. werden diejenigen, welche Leibrenten und Tontinen errichten, ihre Rechnung immer sicherer nach solchen Tabellen machen, welche den Einlegern ein längeres Leben zueignen, so wie hingegen bey Wittwencassen mehr darauf zu sehen ist, daß das wahrscheinliche Leben der beysteuernden Ehemänner kürzer, der überlebenden Wittwen Leben länger angesetzt werde. Man muß sich, um nicht vorsetzlich ungerecht zu seyn, allerdings nicht von dem Mittelverhältniß allzusehr entfernen. Sofern aber das Mittelverhältniß selbst innerhalb gewissen Schranken zweifelhaft oder veränderlich ist, kann man allerdings diejenigen Schranken wählen, welche dem etwan zu besorgenden Nachtheil am sichersten vorbeugen. Es giebt auch in der That Fälle, wo selbst in Städten alte Leute zahlreicher sind, als sie das Mittelverhältniß angiebt.

§. 23.

§. 23.

Wir wollen nun das Mittelverhältniß aus der Tafel (§. 13.) so nehmen, daß es denen auf dem Lande lebenden doppelt näher komme, als denen zu London oder in großen Städten lebenden (§. 18). Und da erhalten wir folgende Tafel:

Alter	0	10000 Lebende
	2	6792
	5	6025
	10	5513
	20	5088
	30	4433
	40	3713
	50	2952
	60	2070
	70	1102
	80	340
	90	73

§. 24.

Diese Tafel geht nur von 10 zu 10 Jahren fort, sie muß demnach durch behöriges Einschalten auf jede Jahre ausgedehnt werden. Ich habe mir zu diesem Ende die Jahre des Alters als Abscissen, die Anzahl der Lebenden als Ordinaten einer krummen Linie vorgestellt, und diese auf einem halben Regalbogen so regulär gezeichnet, als es ohne von den Zahlen merklich abzuweichen geschehen konnte. Dadurch erhielt ich die Ordinaten für jede Jahre so, daß, da ich sie nach

nach eben dem Maaßstabe in Zahlen bestimmte, an den Zahlen nur wenig zu ändern war, um die Unterschiede so viel möglich regulär zu machen. Der Erfolg ist nun in beyliegender Tafel vorgestellt, wovon ich nun jede Columne noch näher erklären werde.

§. 25.

Die erste Columne zeigt die laufende Jahre des Alters an. Die zweyte zeigt, wie viel in jedem Jahre des Alters jährlich sterben. So z. E. wenn von der Geburt an bis ins erste Jahr 2610 sterben, so sterben 610 vom ersten bis ins zweyte, 340 vom zweyten bis ins dritte Jahr u. s. f. Die dritte Columne zeigt, wie viele von 10000 neugebohrnen in jedem Alter noch leben, und wie sich folglich ihre Anzahl in jedem Jahre vermindert. Die Zahlen dieser Columne sind die Summen der Zahlen der zweyten Columne.

§. 26.

Die Zahlen der vierten sind ebenfalls die Summen der Zahlen der dritten, und damit stellen sie die Summe der lebenden vor. Setzt man nemlich, daß jährlich 10000 gebohren werden, und 10000 sterben, so zeigen die Zahlen der dritten Columne an, wie viele von jedem Alter zugleich leben, und die Zahlen der vierten Columne zeigen an, wie viele von jedem höheren Alter zugleich leben. Wir wollen das 20ste Jahr zum Beyspiele nehmen, neben welchem die Zahlen 43; 5124; 175854 stehen. Diese Zahlen

Alter Jahre.	Jährlich sterbende.	Lebende.	Summe der Lebenden.	Es stirbt einer von	Mittlere Alter.	Alter, wo die Hälfte gestorben.
0	2610	10000	295022	4	29,5	22,6
1	610	7390	285022	12	40,2	40,5
2	340	6780	277632	20	42,1	44,4
3	233	6440	270852	27	45,0	46,7
4	169	6207	264412	37	46,7	48,3
5	140	6038	258205	43	47,7	49,5
6	116	5898	252167	51	48,5	50,2
7	96	5782	246269	60	49,6	51,0
8	80	5686	240487	71	50,3	51,6
9	68	5606	234801	82	50,9	52,0
10	58	5538	229195	95	51,4	52,4
11	50	5480	223657	110	51,8	52,8
12	45	5430	218177	121	52,2	53,1
13	42	5385	212747	128	52,5	53,3
14	39	5343	207362	137	52,8	53,6
15	37	5304	202019	143	53,1	53,8
16	35	5267	196715	151	53,3	54,0
17	33	5232	191448	159	53,6	54,2
18	36	5199	186216	144	53,8	54,4
19	39	5163	181017	132	54,1	54,6
20	43	5124	175854	119	54,3	54,8
21	48	5081	170730	106	54,6	55,1
22	54	5033	165649	93	54,5	55,3
23	58	4979	160616	86	55,2	55,6
24	62	4921	155637	79	55,6	55,9
25	65	4859	150716	75	56,0	56,3
26	67	4794	145857	72	56,4	56,7
27	69	4727	141063	69	56,8	57,0
28	70	4658	136336	67	57,3	57,4
29	71	4588	131678	65	57,7	57,8
30	72	4517	127090	63	58,1	58,1
31	74	4445	122573	60	58,6	58,5
32	75	4371	118128	58	59,0	58,9
33	77	4296	113757	56	59,5	59,3
34	79	4219	109461	54	59,9	59,7
35	80	4140	105242	52	60,4	60,1
36	80	4060	101102	51	60,9	60,5
37	81	3980	97042	49	61,4	60,9
38	81	3899	93062	48	61,9	61,3
39	80	3818	89163	48	62,4	61,7
40	80	3738	85345	47	62,8	62,1
41	79	3658	81607	46	63,3	62,5
42	78	3579	77949	45	63,8	62,9
43	77	3501	74370	45	64,2	63,2
44	76	3424	70869	45	64,7	63,6
45	75	3348	67445	44	65,1	64,0
46	75	3273	64097	44	65,5	64,3
47	76	3198	60924	42	66,0	64,7
48	77	3122	57626	41	66,4	65,0
49	78	3045	54504	39	66,9	65,4
50	80	2967	51459	37	67,3	65,8
51	82	2887	48492	35	67,8	66,2
52	84	2805	45605	33	68,2	66,6
53	86	2721	42800	32	68,7	67,0
54	88	2635	40079	30	69,2	67,5
55	90	2547	37444	28	69,7	67,9
55	90	2547	37444	28	69,7	67,9
56	92	2457	34897	27	70,2	68,4
57	94	2365	32440	25	70,7	68,9
58	96	2271	30075	24	71,2	69,4
59	98	2175	27804	22	71,8	70,0
60	100	2077	25629	21	72,3	70,6
61	101	1977	23552	20	72,9	71,2
62	103	1876	21575	18	73,5	71,9
63	105	1773	19699	17	74,1	72,4
64	104	1668	17926	16	74,7	73,1
65	102	1564	16258	15	75,4	73,7
66	99	1462	14694	15	76,0	74,4
67	95	1363	13232	14	76,7	75,1
68	92	1268	11869	14	77,4	75,7
69	88	1176	10601	13	78,0	76,3
70	85	1088	9425	13	78,7	76,9
71	82	1003	8337	12	79,4	77,5
72	80	921	7334	12	80,0	78,1
73	79	841	6413	11	80,6	78,7
74	77	762	5572	10	81,3	79,3
75	75	685	4810	9	82,0	79,9
76	73	610	4125	8	82,7	80,6
77	70	537	3515	8	83,5	81,3
78	66	467	2978	7	84,3	82,0
79	62	401	2511	6	85,2	82,8
80	56	339	2110	6	86,2	83,6
81	50	283	1771	6	87,2	84,5
82	43	233	1488	5	88,4	85,7
83	35	190	1255	5	89,6	87,4
84	25	155	1065	6	90,8	89,3
85	18	130	910	7	92,0	90,9
86	13	112	780	9	92,9	92,0
87	10	99	668	10	93,7	92,8
88	9	89	569	10	94,4	93,6
89	9	80	480	9	95,0	94,1
90	8	72	400	9	95,5	94,7
91	8	64	328	8	96,1	95,3
92	8	56	264	7	96,7	95,9
93	7	48	208	7	97,3	96,5
94	7	41	160	6	97,9	97,1
95	7	34	119	5	98,5	97,7
96	6	27	85	4	99,2	98,3
97	6	21	58	3	99,8	98,9
98	5	15	37	3	100,5	99,5
99	4	10	22	2	101,2	100,3
100	3	6	12	2	102,0	101,0
101	1	3	6	2	103,0	102,5
102	1	2	3	2	103,5	103,0
103		1	1		104,0	

Zahlen wollen nun sagen; erstlich, daß von 10000 neugebohrnen nur 5124 ihr zwanzigstes Jahr erreichen; zweytens, daß von diesen 5124 während ihrem zwanzigsten Jahre 43 wegsterben, und daher nur 5081 ihr ein und zwanzigstes Jahr erreichen; drittens, daß, wenn jährlich 10000 gebohren werden, und 10000 sterben, an solchem Orte 5124 im zwanzigsten Jahre ihres Alters leben, und jährlich 43 im zwanzigsten Jahre sterben; viertens, daß an eben solchem Orte 175854 leben, die über 19 Jahr alt sind, es sey, daß sie ihr zwanzigstes Jahr erst angetreten oder es schon längst zurücke gelegt haben; fünftens stellt die Zahl 175854 auch noch die Summe der Jahre vor, welche die ins zwanzigste Jahr eintretende 5124 noch zu durchleben haben, bis sie sämtlich ausgestorben sind.

§. 27.

Die 5te Columne zeigt an, von wie vielen in jedem Alter einer des Jahrs über stirbt. Die Zahlen dieser Columne finden sich, wenn man die Zahlen der dritten Columne durch die von der zweyten dividirt.

§. 28.

Theilt man aber die Zahlen der vierten Columne durch die von der dritten, z. E. bey dem zwanzigsten Jahre 175854 durch 5124, so ist der Quotient $34\frac{3}{10}$, und dieser zeigt an, daß, wenn die 5124, so ihr zwanzigstes Jahr antreten, gleich lange lebten, jeder noch $34\frac{3}{10}$ Jahre leben,

leben, und daher das Alter von $54\frac{3}{10}$ Jahren, welches in der sechsten Columne als ihr mittleres Alter angezeichnet ist, erreichen würde.

§. 29.

Endlich zeigt die siebente Columne an, in welchem Alter die Hälfte von denen, so in ein beliebiges Jahr ihres Alters eintreten, weggestorben ist. So z. E. wenn die 5124, so ins zwanzigste Jahr eintreten, $54\frac{8}{10}$ Jahr alt werden, so ist inzwischen die Hälfte davon weggestorben. Denn die Hälfte von 5124 ist 2562. Sucht man diese Zahl in der dritten Columne auf, so fällt sie zwischen das 54ste und 55ste Jahr, und eigentlich auf das $54\frac{8}{10}$te Jahr.

§. 30.

Die Zahlen der sechsten und siebenten Columne sind bey den meisten Rechnungen und politischen Anstalten, so von der Sterblichkeit abhängen, von Erheblichkeit und vielem Gebrauche. Halley bestimmte die mittlere Dauer des Lebens, so wie es in der siebenten Columne geschehen, Deparcieux nach der sechsten Columne, Süßmilch ist darüber verlegen, beschwert sich über die Weitläuftigkeit der Deparcieuxschen Art zu rechnen, findet die Halleysche leichter, und tröstet sich endlich damit, daß beyde Rechnungen wenig von einander verschieden sind. Seybert sagt, Deparcieux habe sich selbst kaum, Süßmilch aber ihn gar nicht verstanden. Dabey klärt er die Sache hinlänglich auf, läßt sich aber nicht bey=

beyfallen, daß es besser und leichter ist, wenn die Summe der lebenden nicht, wie Süßmilch gethan, vom Anfange an, sondern so wie es hier geschehen, vom Ende rückwerts zusammengerechnet wird.

§. 31.

Es war aber sowohl bey Süßmilch als bey Seybert noch eine andere Frage, ob nemlich Halley oder Deparcieux die Sache besser getroffen habe? Süßmilch läßt es dabey bewenden, daß beyde Rechnungsarten nur im ersten Jahre des Alters merklicher voneinander verschieden sind. Seybert aber spricht der Halleyschen das Wort, und da er sie für ganz ausgemacht und bewiesen ansieht, so verwirft er die Deparcieuxsche, blos weil sie mit der Halleyschen nicht durchaus zusammentrift. Dieser Grund ist aber nicht zureichend, denn er zeigt nur, daß, wo die Halleysche Rechnungsart zu gebrauchen ist, die vom Deparcieux nicht gebraucht werden müße. Ich werde also hinwiederum sagen, daß, wo letztere zu gebrauchen ist, erstere weggelassen werden müße. Ich werde sogar noch beyfügen, daß es Fälle giebt, wo man keine von beyden gebrauchen kann. Diese Aussagen zu beweisen, bedarf die Sache einer genaueren Entwickelung.

§. 132.

Halley bestimmt, wie es hier in der siebenten Columne geschehen, das Alter, in welchem die Hälfte

Hälfte der Personen, so zugleich ein beliebiges Alter erreicht haben, weggestorben ist. So ist z. E. von 3198 Personen, die ihr 47stes Jahr antreten, mit dem Anfange ihres 66sten Jahres die Hälfte weggestorben. Man setze nun z. E. eine Gesellschaft von 3198 solcher Personen, und diese soll aufhören, sobald sie auf die Hälfte eingegangen ist. Hier ist nun die Halleysche Methode oder die siebente Columne anwendbar, und sie giebt an, daß man für eine solche Gesellschaft nur 19 Jahre Dauer rechnen kann, weil die Hälfte vor dem 66sten Jahre wegstirbt. Sie kann etwas länger oder kürzer dauern, je nachdem es die individuellen Umstände mit sich bringen. Aber eins ins andere gerechnet, muß die Dauer auf 19 Jahre gesetzt werden.

§. 33.

Wiederum wenn eine Person 47 Jahr alt ist, und man hat nachgehends weiter keine Nachricht von ihr, so entsteht die Frage, ob sie wahrscheinlicher Weise noch bey Leben sey oder nicht? Sind 19 Jahre verflossen, so müßte diese Person 66 Jahr alt seyn, und da ist es gleich möglich, daß sie noch lebe oder bereits gestorben sey. Vorher war ihr Leben, nachher wird ihr Todt wahrscheinlicher. Auch dieser Fall wird nach der siebenten Columne bestimmt.

§. 34.

Soll hingegen einer grossen Anzahl Personen jährlich und lebenslang eine Summe Geldes ausgezahlt werden, und man will wissen, wie viel in allem zu bezahlen seyn wird, so muß des Deparcieux Rechnungsart oder die sechste Columne gebraucht werden. Man setze, es seyn 10000 neugebohrne Kinder, so ist die Anzahl der Jahre, die sie in allem durchleben, 295022, (§. 26.) und so groß ist auch die Anzahl der Portionen. Es ist eben so viel, als wenn sie sämtlich $29\frac{1}{2}$ oder 29,5022 Jahre alt würden. Nach dem Halley würden nur 22,6000 Jahre, und demnach nur 226000 Portionen zu bezahlen seyn, welches viel zu wenig ist. Dessen unerachtet, wenn von jedem dieser Kinder besonders die Rede ist, so kann man nicht sagen, daß es auf $29\frac{1}{2}$ Portionen Hoffnung habe, weil es im 29sten Jahre wahrscheinlicher todt als lebend ist. Alles was nun aus diesem anscheinenden Widerspruch folgt, ist, daß wenn solche Portionen, z. E. Leibrenten seyn sollten, sie für Kinder nicht anzurathen sind. Sie müßen für $29\frac{1}{2}$ Portionen vorausbezahlen und haben doch nur auf 20,6 Portionen Hoffnung, so sehr sie auch, eins ins andere gerechnet, die $29\frac{1}{2}$ wirklich einziehen. Uebrigens ist dieser Unterschied auch nur bey neugebohrnen Kindern so merklich. Denn man sieht aus Vergleichung der sechsten und siebenten Columne, daß er bereits vom ersten Jahre an sehr geringe wird.

§. 35.

Endlich bey solchen Fällen, wo man wegen der grossen Capitalien Zins auf Zins zu rechnen hat, sind diese beyden Columnen von keinem Gebrauche, sondern man muß die zweyte und dritte gebrauchen, und Jahr für Jahr rechnen.

§. 36.

Man sollte übrigens denken, daß die Zahlen der sechsten und siebenten Columne durchaus zusammentreffen müßten. Die sechste giebt die mittlere Dauer des Lebens aller Personen an, die zugleich einerley Alter haben. Die siebente aber zeigt das wahrscheinliche Alter einer jeden dieser Personen insbesondere, sofern nemlich dieses durch die Hälfte der bereits weggestorbenen bestimmt wird. Es scheint, daß beyde Bestimmungen zusammentreffen sollten, und wenn nicht gerade im ersten Jahre der Unterschied sehr groß wäre, so könnte man leicht schließen, daß die sehr geringen Unterschiede der übrigen Jahre schlechthin nur daherrühren, daß die Beobachtungen, aus denen die Tabelle gezogen worden, einige kleinere Unrichtigkeiten haben, weil sie nicht von einem größeren Zeitraume sind ꝛc.

§. 37.

Dieser Schluß wird aber nicht wohl angehen. Da es sich aber der Mühe lohnt, zu sehen, woher die Unterschiede in den beyden Columnen entstehen, und warum sie, wenn sie doch seyn sollen, nicht größer sind; so werde ich mich in diese Untersuchung etwas mehr einlassen.

§. 38.

Ich setze also erstlich, die beyden letzten Columnen sollen durchaus zusammentreffen, und da ist die Frage: wiefern sich das Gesetz der
Fig. 1. Sterblichkeit dadurch bestimmen lasse? Die Jahre des Alters stelle man durch die Abscissen AP, AQ, AC vor, und die Ordinaten AB, PM, QN sollen anzeigen, wie viele von den neugebohrnen in jedem Alter noch leben. Es werden demnach die Zahlen der dritten Columne dadurch vorgestellt. Man nehme nun ein beliebiges Alter AP, wo die Anzahl der überlebenden PM ist. Ferner sey AQ dasjenige Alter, wo noch die Hälfte derselben bey Leben, und demnach $QN = \frac{1}{2} PM$ ist; so ist AQ das *wahrscheinliche* Alter eines jeden von denen, die das Alter AP erreichen, und für jede Jahre AP werden AQ die in der siebenten Columne angesetzten Jahre seyn.

§. 39.

Hingegen findet man das mittlere Alter, wenn man den Flächenraum PCM durch PM dividirt, und zu dem Quotienten AP addirt. Soll demnach AQ ebenfalls das mittlere Alter seyn, so darf man nur das Rechteck PMRQ vollends ausziehen, und dessen Flächenraum wird dem Flächenraume PCM gleich seyn. Denn es ist

$$\frac{PCM}{PM} = PQ$$

und

$$\frac{PMRQ}{PM} = PQ$$

demnach

$$PCM = PMRQ.$$

§. 40.

Man setze nun

$$PC = x \qquad QC = \xi$$
$$PM = y \qquad QN = \tfrac{1}{2} y$$

und für die krumme Linie überhaupt

$$x = ay^n + by^m + \&c.$$

so ist

$$PCM = \int ydx = \frac{n}{1+n} ay^{n+1} + \frac{m}{1+m} by^{m+1} + \&c.$$

demnach

$$\frac{PCM}{PM} = \frac{n}{1+n} ay^n + \frac{m}{1+m} by^m + \&c. = PQ.$$

§. 41.

Ferner ist

$$\xi = a\left(\tfrac{1}{2}\right)^n y^n + b\left(\tfrac{1}{2}\right)^m y^m + \&c.$$

demnach

$$x - \xi = a\left(1 - \tfrac{1}{2}^n\right) y^n + b\left(1 - \tfrac{1}{2}^m\right) y^m + \&c. = PQ.$$

§. 42.

Aus diesen beyden Werthen von PQ folgt nun

$$\begin{cases} = \dfrac{n}{1+n}\, ay^n + \dfrac{m}{1+m}\, by^m + \&c. \\ = (1 - \tfrac{1}{2}^n)\, ay^n + (1 - \tfrac{1}{2}^n)\, by^m + \&c. \end{cases}$$

Hier können num die gleichnamigen Glieder verglichen werden, und da sie einerley Form haben, so werden wir statt aller übrigen das erste vornehmen. Es ist also

$$\frac{n}{1+n} = 1 - (\tfrac{1}{2})^{n}$$

Hieraus folgt

$$2^n = 1 + n$$

Diese Gleichung giebt für n nur zween reelle Werthe, nemlich

$$n = 0$$
$$n = 1$$

Wenn man nun beyde beybehält, so findet man nur

$$x = a + by$$

und damit müßte BMNC eine gerade Linie seyn. Sie ist es aber nicht, und so geht es auch nicht an, daß das mittlere und das wahrscheinliche Alter durchaus zusammentreffen.

§. 43.

Wir haben nun in Absicht auf das mittlere Alter überhaupt

$$\frac{\int y\,dx}{y} = x - \xi$$

Wird

Wird diese Gleichung differentiirt, so ist

$$dx - \frac{dy.\int y\,dx}{yy} = dx - d\xi$$

demnach

$$d\xi = \frac{dy}{yy}.\int y\,dx = \frac{dy}{y}(x - \xi)$$

Hieraus folgt

$$x - \xi = \frac{y\,d\xi}{dy}$$

Ist nun überhaupt QN in beständiger Verhältniß zu PM, so daß

$$QN = py = \eta$$
$$d\eta = pdy$$

ist, so haben wir

$$\frac{y\,d\xi}{dy} = \frac{\eta\,d\xi}{d\eta}$$

und dieses ist der Ausdruck für die Subtangente QT. Es wird demnach in allen denen Fällen, wo $\eta = py$ ist, auch

$$QT = PQ$$

seyn.

§. 44.

Man setze nun, die krumme Linie BMNC wäre parabolischer Art, so daß

$$y = ax^n$$

so

so ist

$$\frac{\int y\,dx}{y} = \frac{1}{q+1}\cdot x = PQ$$

demnach

$$CQ = \xi = \frac{q}{q+1}\cdot x$$

$$QN = \eta = a x^q . \left(\frac{q}{q+1}\right)^q = \left(\frac{q}{q+1}\right)^q . y$$

folglich QN in beständiger Verhältniß zu PM, folglich auch

$$QT = PQ = \frac{1}{q+1}\cdot x$$

Wäre demnach auch überhaupt

$$\left(\frac{q}{q+1}\right)^q = \frac{1}{2}$$

so würde das mittlere und das wahrscheinliche Alter zusammentreffen. Es hat aber diese Gleichung nur statt, wenn $q = 1$ ist. Ist aber q nicht $= 1$; so erhält man für diese beyden Alter zwo verschiedene Ordinaten, die im Verhältniß von $\left(\frac{q}{q+1}\right)^q$ zu $\frac{1}{2}$ sind. Die Abscissen sind hinwiederum im Verhältniß von $\frac{q}{q+1}$ zu $\left(\frac{1}{2}\right)^{1:q}$. Man setze für q der Ordnung nach die Werthe 1, 2, 3 ꝛc. so ist für

q = 1

$q =$ 1	die Verhältniß			0,50000	:	0,50000
2	:	:	:	0,66667	:	0,70711
3	:	:	:	0,75000	:	0,79370
4	:	:	:	0,80000	:	0,84090
5	:	:	:	0,83333	:	0,87055
6	:	:	:	0,85714	:	0,89090
7	:	:	:	0,87500	:	0,90572
ꝛc.						

woraus man sieht, daß überhaupt für jede Werthe von q diese Verhältniß der Gleichheit sehr nahe kömmt. In der Tafel geschieht dieses noch um destomehr, da sich die Linie BMNC dergestalt krümmt, daß das mittlere Alter bald größer bald kleiner als das wahrscheinliche ist.

§. 45.

Es bleiben noch über die Zahlen der vier letzten Columnen einige Anmerkungen zu machen. Die vierte stellt die Summe der Zahlen der dritten Columne vor, und hat zur Ueberschrift: Summe der Lebenden. Um aber diese Ueberschrift noch schärfer zu verdienen, muß jede Zahl der vierten Columne um die Hälfte der nebenstehenden Zahl der dritten Columne vermindert werden. Denn die Summe der Lebenden ist eigentlich $\int y\,dx$ durch 1 Jahr dividirt, wenn nemlich durch x Jahre vorgestellt werden. Es Fig. 2. stelle nun AP eine Anzahl Jahre des Alters, PM die in diesem Alter lebende vor, Pp sey ein Jahr, und pm die im Alter Ap noch lebenden, so ist PMC durch Pp oder 1 Jahr getheilt die

Summe

Summe aller derer, so älter als AP Jahre sind. Und pmC die Summe aller derer, so älter als Ap Jahre sind. Die Differenz von beyden ist PMmp durch 1 Jahr dividirt. Da man nun Mn ohne merklichen Fehler als geradlinicht ansehen kann, so ist diese Differenz $=$ Pnmp $+$ nMm durch Pp $= 1$ dividirt, folglich $=$ Pn $+ \frac{1}{2}$ nM. In der Tafel aber ist diese Differenz $=$ PM genommen, weil die Zahlen der vierten Columne durch die Addition aus den Zahlen der dritten Columne entstanden sind. Es ist also PM um die Hälfte von Mn zu groß. Da nun Mn die in dem Jahre Pp sterbenden vorstellt, so muß von denen im Alter AP lebenden PM, die Hälfte derer, so davon im Jahre Pp sterben, abgezogen werden. Dieses Abziehen häuft sich, von C gegen P gerechnet, Jahr für Jahr auf. Da nun PM aus den Summen aller Mn erwächst, so ist die Hälfte von PM die Summe der Hälften aller Mn. Da nun die Zahlen der vierten Columne Summen aller PM sind, so muß die Hälfte der Summen aller Mn, demnach die Hälfte von PM davon abgezogen werden, um die Summe aller in höherem Alter lebenden genauer zu haben.

§. 46.

Dieses zieht nun ebenfalls eine Aenderung in den Zahlen der sechsten Columne nach sich. Denn diese Zahlen erwachsen dadurch, daß jede Zahl der vierten Columne durch die nebenstehende Zahl der dritten getheilt wird, oder sie ist

$$= \int y\,dx : y$$

Da

Da nun die Zahlen der vierten Columne, die zu theilen sind, um die Hälfte der Zahlen der dritten Columne, demnach jede um die Hälfte ihres Theilers vermindert werden müssen; so wird jeder Quotient um $\frac{1}{2}$ kleiner. Demnach muß jedes in der sechsten Columne angesetzte mittlere Alter um $\frac{1}{2}$ Jahr vermindert werden.

§. 47.

Es wird übrigens damit genug seyn, daß diese Anmerkung angeführet worden, um zu zeigen, wie die Sache allenfalls schärfer zu nehmen wäre, wenn die Data selbst mehrere Zuverläßigkeit hätten. Es kömmt aber auch bey Berechnungen von Leibrenten, Tontinen ꝛc. bey Bestimmung des wahrscheinlichen Alters auf ein halbes Jahr Unterschied nicht an. Diejenigen, so solche Stiftungen anlegen, werden ohnehin, um sicherer zu gehen, das in der sechsten Columne zu viel angesetzte halbe Jahr nicht nur nicht weglassen, sondern die Jahre lieber voll anrechnen, oder gar noch ein Jahr mehr nehmen, um die Einlagen nicht zu geringe zu machen. Hingegen können die, so einlegen wollen, sich an die siebente Columne halten, welche jedem sein wahrscheinlich zu hoffendes Alter Jahr für Jahr anzeigt, um daraus zu beurtheilen, wiefern sie etwas wagen können.

§. 48.

Die fünfte Columne, welche zeigt, von wie vielen jährlich einer stirbt, stellt in ihren Zahlen

so

Fig. 1. so ziemlich die Subtangenten QT der Linie BMNC für jedes Alter QT vor. Ich sage: so ziemlich. Denn die Zahlen dieser Columne weichen nur in dem ersten Jahre merklich von der wahren Länge der Subtangente ab. So z. E. ist gleich bey dem Anfange B die Subtangente kaum von einigen Monaten. Sie wächst aber sehr schnell, so daß sie am Ende des ersten Jahres schon nahe auf 12 Jahre kömmt. Diese Subtangente ist übrigens das eigentliche Maaß der Lebenskraft. Sie wächst sehr schnell bis ins 16te oder 17te Jahr. Von da an nimmt sie bis ins 25ste Jahr wieder sehr schnell, nachgehends langsamer, vom 50sten Jahr an wiederum etwas weniges geschwinder ab. Mitten in den achziger Jahren scheint sie hingegen wiederum etwas zuzunehmen, so daß sie im 95sten Jahr nicht kleiner als im 83sten ist.

§. 49.

Diese beyden letzteren Ungleichheiten in der allmählig abnehmenden Lebenskraft sind an sich so geringe, daß man verleitet werden könnte, sie auf Rechnung der Beobachtungen zu setzen. Ich habe sie aber lieber stehen gelassen, weil ich von denen zum Grunde gelegten Zahlen (§. 23.) nicht allzumerklich abweichen wollte. Es laufen bey den Sterbefällen ohnehin so viele besondere Umstände durch einander, daß es vielmehr zu bewundern ist, daß nicht mehrere und viel grössere Ungleichheiten vorkommen. Vielleicht lassen sich auch für die drey erst angeführten Gründe finden. Hr. Wargentin, der die Listen der lebenden und sterbenden im ganzen schwedischen Reiche gesammlet, findet sich ebenfalls genöthigt, den Schluß zu machen, daß es scheine, als wenn die Menschen, wenn sie ein hohes Alter erreicht haben, neue Lebenskraft erhielten. So viel scheint wohl richtig zu seyn, daß, wer für 90 bis 100 Jahre Lebenskraft hat und seine Geschäfte gegen dem 80sten Jahr aufgiebt, durch mehrere Ruhe und Ablegung der Besorgnisse für künftige Zeiten, seine noch übrige Lebenskraft der Gefahr, sie zu vermindern, weniger blos setzt.

§. 50.

Mit der gegen das 50ste oder bereits gegen das 48ste Jahr wiederum stärker abnehmenden Lebenskraft mag es wohl auch eine besondere Bewandniß haben. Man könnte denken, das 49ste als das climacterische Jahr müsse etwas auf sich haben. Wenn es aber auch etwas auf sich hat, so ist es nur weil in diesem Alter oder einige Jahre vor oder nachher in dem Menschen gewisse Aenderungen vorgehen, die seine Lebenskraft anders bestimmen. Uebrigens ist diese Aenderung gegen derjenigen sehr geringe, die sich vom 16ten bis ins 25ste Jahr des Lebens äussert. Bis zum 15ten Jahr nimmt die Lebenskraft beynahe in arithmetischer Progreßion, ja anfangs noch etwas mehr zu. Im 16ten und

17ten

17ten Jahre stehet sie gleichsam mit einemmal beynahe ganz still, und nimmt von da an so ab, daß sie im 22sten Jahre wieder eben so geringe, als im zehnten Jahre ist. Dies sind nun freylich die Jahre, wo junge Leute in die Welt treten, Geschäfte und Reisen vornehmen, sich mehreren Gefahren aussetzen, Personen weiblichen Geschlechtes durch Heyrathen sich neuen Gefahren blos geben ꝛc. Es scheinen aber alle diese Umstände zu einem so plötzlichen Stillstand der Lebenskraft und schnellen Abnahme nicht hinreichend zu seyn.

§. 51.

Wenn die Lebenskraft bis gegen das 15te Jahr ganz genau in arithmetischer Progreßion zunehmen würde, so könnte man schliessen, daß sie bis dahin eine ganz einfache und gleichförmig wirkende Ursache haben müßte. Denn mehrere Ursachen wirken gewöhnlich, jede nach ihrer Art, so daß die daher entstehende Wirkung ungleichförmig zunimmt. Nun fehlt an bemeldter arithmetischer Progreßion nicht viel, und so scheint es, daß wenigstens die Hauptursache von der zunehmenden Lebenskraft einfach seyn müsse.

§. 52.

Diese wirkt aber nur bis gegen das 15te Jahr ohne merklichen Abbruch. Von da an scheint sich eine sehr kräftig entgegenwirkende Ursache zu äußern, welche die Wirkung der ersteren nicht nur sehr hemmt, sondern schon im 17ten

17ten Jahre so überwiegend ist, daß die Lebenskraft, anstatt noch ferner zuzunehmen, wieder sehr schnell bis zum 25sten Jahr abnimmt. Die Sache gleicht so ziemlich einem Cylinder, darin ein Heber ist, welcher nicht eher anfängt den Cylinder auszuleeren, als bis der Cylinder höher, als der Heber geht, angefüllt wird. Da indessen beym 25sten, 50sten und in den achziger Jahren sich in der Abnahme der Lebenskraft neue Ungleichheiten äußern, so müssen auch in diesen Jahren durch neu hinzukommende Umstände entweder neue Ursachen sich äußern, oder die anfänglich wirkenden geändert werden. Wenn es also climacterische Jahre geben sollte, so würden diesen Betrachtungen zufolge das 16, 25, 50 und 84 als solche anzusehen seyn.

II. Die Trennung der Ehen durch den Tod.

§. 53.

Wenn man sich eine Anzahl Eheleute gedenkt, so kann die Frage entstehen: wie viele von solchen Ehen nach einer beliebigen Anzahl von Jahren noch stehen, wie viele ganz ausgestorben, und wie viele durch den Tod so getrennt seyn werden, daß noch überlebende Wittwer oder Wittwen vorhanden sind?

§. 54.

Diese Frage kann auf sehr weitläuftige Rechnungen führen, wenn man Eheleute von sehr ver-

verschiedenem Alter voraussetzt. Wenn man sie aber einfacher machen will, wie man denn immer nützlich bey einfacheren Fällen anfängt, so muß das Alter gleich gesetzt werden, weil sodann die verschiedenen Grade der Sterblichkeit keinen Umschweif verursachen. Indessen ist es der Natur der Sache gemäßer, wenn überhaupt den Ehemännern ein mehreres Alter als den Ehefrauen gegeben wird. Diesen Fall werde ich also, da er die Rechnung nicht viel weitläuftiger macht, vorerst vornehmen.

§. 55.

Es sey also das Alter jeden Ehemannes $= A$ Jahren, das Alter jeder Ehefrau $= a$ Jahren. Die Anzahl der Ehen sey $= N$. Nach r Jahren sollen noch M Männer und F Frauen leben; so hat die Anzahl der Männer wie N zu M, die Anzahl der Frauen wie N zu F abgenommen. Und diese beyden Verhältnisse werden als gegeben angesehen. Von den überlebenden Männern seyen E, deren Frauen noch leben, und W, deren Frauen todt sind. Hinwiederum von den überlebenden Frauen seyen e, deren Männer noch leben, und w, deren Männer todt sind; so ist

$$M = E + W$$
$$F = e + w$$

§. 56.

Ferner ist die Anzahl der gestorbenen

Männer $= N - M = G$

Frauen $= N - F = g$

so

so daß also

$$N = M + G = F + g$$

ist. Setzt man in dieser Gleichung die Werthe von M und F, so erhält man

$$N = E + W + G = e + w + g$$

Es ist aber $E = e$ die Anzahl noch stehender Ehen, demnach haben wir

$$W + G = w + g$$

und hieraus

$$W - w = g - G$$

so daß der Unterschied der Wittwer und Wittwen dem Unterschiede der gestorbenen Frauen und Männer, und daher auch dem Unterschiede der noch lebenden Männer und Frauen gleich ist. Hinwiederum ist

$$G - w = g - W$$

Und dieses will sagen, daß, wenn man die überlebenden Wittwen von den gestorbenen Männern, oder die überlebenden Wittwer von den gestorbenen Frauen abzieht, man in beyden Fällen die Anzahl der ganz ausgestorbenen Ehen erhält. Setzen wir diese $= T$, so ist

$$T = G - w = g - W$$

Auf eine ähnliche Art ist

$$E = e = M - W = F - w$$

die Anzahl der noch stehenden Ehen, dem Unterschiede der noch lebenden Männer

 und

und Wittwer, oder auch dem Unterschiede der noch lebenden Frauen und Wittwen gleich. Diese Sätze ließen sich durch bloßes addiren und subtrahiren finden.

§. 57.

Es ist nun aber auch zu finden, wie sich E, W, e, w sowohl gegeneinander als gegen M, F, G, g, N verhalten. Dieses wird, wie bey Glücksspielen überhaupt, berechnet. Wir haben

$$N = M + G$$
$$N = F + g$$

Man multiplicire diese Gleichungen mit einander, so ist das Product

$$NN = MF + Mg + FG + Gg$$

demnach

$$N = \frac{MF}{N} + \frac{Mg}{N} + \frac{FG}{N} + \frac{Gg}{N}$$

Hier stellt nun

N die Anzahl der anfänglichen Ehen,

$\frac{MF}{N}$ die Anzahl der noch stehenden Ehen, wo Mann und Frau noch lebt, $E = e$,

$\frac{Mg}{N}$ die Anzahl Ehen, wo nur der Mann noch lebt, die Frau gestorben, demnach die Anzahl der lebenden Wittwer $= W$

$\frac{FG}{N}$ die Anzahl der Ehen, wo nur die Frau noch lebt, der Mann gestorben, demnach die Anzahl der lebenden Wittwen $= w$

$\frac{Gg}{N}$ die Anzahl der ganz ausgestorbenen Ehen $= T$

vor.

§. 58.

Diese Ausdrücke geben besondere Analogien an, die sich allenfalls auch jede besonders beweisen lassen. Die erste ist folgende: Die Anzahl aller Ehen oder die anfängliche Anzahl der Männer verhält sich zu den noch lebenden Männern, wie die Anzahl der noch lebenden Frauen zu der Anzahl der noch stehenden Ehen. Der Beweis ist leicht. Die noch lebenden Frauen F haben anfangs F Männer gehabt. Die Männer haben aber überhaupt in der Verhältniß von N zu M abgenommen. Folglich sind von diesen F Männern auch nur noch $\frac{MF}{N}$ überlebend. Es können daher auch nur so viele noch stehende Ehen seyn.

§. 59.

Zieht man nun $\frac{MF}{N}$ von F ab, so bleibt

$$F - \frac{MF}{N} = \frac{F(M-N)}{N} = \frac{FG}{N} = w$$

die

die Anzahl der Wittwen, so wie sie die dritte Formel angiebt.

§. 60.

Zieht man aber $\frac{MF}{N}$ von M ab, so bleibt

$$M - \frac{MF}{N} = \frac{M(N-F)}{N} = \frac{Mg}{N} = W$$

die Anzahl der Wittwer, so wie sie die zweyte Formel angiebt.

§. 61.

Es können übrigens diese Formeln auch an sich bewiesen werden. Die zweyte

$$\frac{Mg}{N} = W$$

will sagen: die anfangs lebenden Männer verhalten sich zu den noch lebenden, wie die bereits gestorbenen Frauen zu den noch lebenden Wittwern. Denn die gestorbenen Frauen g hatten anfangs g Männer. Nun nahmen die Männer in Verhältniß von N zu M ab. Demnach können von den g Männern auch nur noch $\frac{Mg}{N}$ bey Leben seyn. Es können daher auch nur noch so viele Wittwer leben.

§. 62.

Der Beweis für die dritte Formel

$$\frac{FG}{N} = w$$

ist

ist ganz ähnlich. Diese Formel will sagen: die Anzahl der anfangs lebenden Frauen verhält sich zu den noch lebenden, wie die Anzahl der gestorbenen Männer zu der Anzahl der noch lebenden Wittwen. Denn G Männer hatten G Frauen. Es nahmen aber die Frauen überhaupt in der Verhältniß von N zu F ab. Also sind von den G Frauen auch nur noch $\frac{FG}{N}$ bey Leben. Und so groß ist demnach die Anzahl der Wittwen.

§. 63.

Die vierte Formel

$$\frac{Gg}{N} = T$$

will sagen: die Anzahl der anfangs lebenden Männer verhält sich zur Anzahl der abgestorbenen, wie die Anzahl der gestorbenen Frauen zur Anzahl der ganz ausgestorbenen Ehen. Denn die gestorbenen Männer G hatten anfangs G Frauen. Es starben aber die Frauen überhaupt in der Verhältniß von N zu g aus. Demnach sind von den G Frauen $\frac{Gg}{N}$ ausgestorben. Da nun ihre Männer auch todt sind, so ist dis die Anzahl der ganz ausgestorbenen Ehen.

§. 64.

Vergleicht man ferner die vier Formeln, so folgt daraus noch, daß

$$F:g = E:W = w:T$$

folglich die noch lebenden Frauen zu den gestorbenen sich wie die noch stehenden Ehen zu den Wittwern, oder auch wie die Wittwen zu den ganz ausgestorbenen Ehen verhalten.

§. 65.

Und hinwiederum, daß

$$M:G = E:w = W:T$$

folglich, die noch lebenden Männer sich zu den gestorbenen, wie die noch stehenden Ehen zu den Wittwen, oder wie die Wittwer zu den ganz ausgestorbenen Ehen verhalten.

§. 66.

Diese Sätze sind nun überhaupt desto sicherer anwendbar, je größer die anfängliche Anzahl der Ehen angenommen wird. Dieses bringt die Lehre von der Wahrscheinlichkeit an sich mit. Wir haben ferner dabey auf die Frage, ob die Wittwen oder Wittwer sich wieder verheyrathen, keine Rücksicht genommen, weil dieses wieder unsern Vorsatz die Rechnung verwickelter gemacht haben würde.

§. 67.

Da die Ehemänner überhaupt 4, 6, 8, 10 und auch mehr Jahre älter sind, als ihre Ehefrauen, so haben sie auch überhaupt einen grössern Grad der Sterblichkeit. Es ist daher M kleiner als F, und hinwiederum G größer als g. Da nun die Anzahl der

$$\text{Wittwen} = \frac{FG}{N} = w$$

$$\text{Wittwer} = \frac{Mg}{N} = W$$

und sowohl $F > M$ als $G > g$, so ist aus beyden Gründen

$$w > W$$

Es giebt daher schon aus diesem Grunde mehr Wittwen als Wittwer, und zwar ohne Rücksicht auf den Umstand, daß die Wittwer häufiger zur zweyten Ehe schreiten als die Wittwen.

§. 68.

Wir wollen nun noch ein Beyspiel geben, und sehen, wie 10000 Ehen nach und nach durch den Tod getrennt werden und ganz aussterben, wenn anfangs alle Frauen 20, und alle Männer 25 Jahr alt sind. Dieses giebt folgende Tabelle, von 5 zu 5 Jahren.

Jahre.	A	B	Lebende Frauen.	Gestorbene Frauen.	Lebende Männer.	Gestorbene Männer.	Stehende Ehen.	Wittwer.	Wittwen.	Ausgestorbene Ehen.
0	5124	4859	10000	0	10000	0	10000	0	0	0
5	4859	4517	9483	517	9296	704	8815	481	668	36
10	4517	4140	8812	1188	8520	1480	7508	1012	1304	176
15	4140	3738	8080	1920	7695	2305	6218	1477	1862	443
20	3738	3348	7295	2705	6890	3110	5026	1864	2269	841
25	3348	2967	6534	3466	6106	3894	3990	2116	2544	1350
30	2967	2547	5790	4210	5242	4758	3035	2207	2755	2003
35	2547	2077	4971	5029	4275	5725	2125	2150	2846	2879
40	2077	1564	4054	5946	3219	6781	1305	1914	2749	4032
45	1564	1088	3052	6948	2239	7761	683	1556	2369	5392
50	1088	685	2124	7876	1410	8590	300	1110	1824	6766
55	685	339	1337	8663	698	9302	93	605	1244	8058
60	339	130	661	9339	265	9735	18	247	643	9092
65	130	72	254	9746	148	9852	4	144	250	9602
70	72	34	141	9859	70	9930	1	69	140	9790
75	34	6	67	9933	12	9988	0	12	67	9921
80	6	0	12	9988	0	10000	0	0	12	9988
			F	g	M	G	E	W	w	T

§. 69.

§. 69.

In dieser Tabelle stellt die erste Columne von 5 zu 5 Jahren die Dauer der Ehen vor. Werden diese Jahre zu 20 addirt, so erhält man das jedesmalige Alter der Frauen, und nach diesem sind die Zahlen der Columne A aus der Tafel des §. 24. genommen. Addirt man aber 25, so erhält man das jedesmalige Alter der Männer, und nach diesem sind die Zahlen der Columne B aus der Tafel des §. 24. genommen. Die Zahlen dieser beyden Columnen A, B zeigen demnach, nach welchen Verhältnissen Frauen und Männer noch überlebend bleiben. Nach eben diesen Verhältnissen finden sie sich in den Columnen F und M so proportionirt, daß die anfängliche Anzahl beyderseits auf 10000 gesetzt wird. Zieht man nun die Zahlen dieser Columnen F, M von 10000 ab, so bleiben die Zahlen der Columnen g, G, welche zeigen, wie die anfängliche 10000 Frauen und Männer nach und nach absterben. Die vier letzten Columnen ergeben sich nun aus den vorhergehenden vermittelst obiger Lehrsätze auf mehrerley Arten, (§ 56. folgg.) am kürzesten aber auf folgende:

$$E = \frac{MF}{N}$$

$$W = M - E$$

$$w = F - E$$

$$T = G - w$$

Es

Es ist nemlich genug, wenn die Columne E durch multipliciren und dividiren gefunden wird. Die drey letzten Columnen ergeben sich sodann durch blosses Subtrahiren. Man kann übrigens auch jede andere dieser 4 Columnen durch multipliciren und dividiren nach den Formeln des §. 57. unmittelbar finden (§. 56.) Es sind genug Lehrsätze dazu vorräthig.

§. 70.

Aus dieser Tabelle sieht man nun, daß in den ersten 20 Jahren die Hälfte dieser Ehen getrennt, daß aber erst gegen das vier und vierzigste Jahr die Hälfte ganz ausgestorben ist. Man sieht auch, daß die Anzahl der Wittwer und Wittwen bis auf einen gewissen Grad zunimmt, von da an aber wiederum abnimmt; daß die Anzahl der Wittwer im 30sten, der Wittwen erst im 35sten Jahr ihr maximum erreicht, letzteres fast um $\frac{1}{3}$ grösser als ersteres ist, und daß zulezt noch Wittwen leben, wenn alle Männer bereits todt sind.

§. 71.

Fig. 3. Ich habe die Zahlen der vier letzten Columnen in der dritten Figur als Ordinaten der krummen Linien BE, AW, Aw, AT vorgestellt, weil man dadurch die Art, wie diese Zahlen zu und abnehmen, mit einem Anblicke übersehen kann. Die Linie BE nimmt in einem fort ab. Hingegen haben die Linien AW, Aw eine gröste Ordinate oder ein maximum, die Linie AT aber einen

einen Wendungspunct, wo demnach die Anzahl ausgestorbener Ehen am geschwindesten zunimmt.

§. 72.

Man setze nun, daß solche Ehen, wo die Männer 25, die Frauen 20 Jahr alt sind, Jahr aus und ein immer in gleicher Anzahl entstehen; so kommt die Anzahl aller daher entspringenden und jedesmal noch stehenden Ehen, lebende Wittwer und Wittwen in Zeit von 80 Jahren in ihren Beharrungsstand, und alsdann stellen die Flächenräume

ABECA die Anzahl zugleich stehender Ehen,

AWCA die Anzahl aller zugleich lebender Wittwer,

AwCA die Anzahl aller zugleich lebenden Wittwen,

ATDCA die Anzahl der in 80 Jahren ganz ausgestorbenen Ehen,

ABDCA die Anzahl aller sowohl stehenden als getrennten und ausgestorbenen Ehen von 80 Jahren Zeit

vor.

§. 73.

Diese Flächenräume lassen sich nun noch ziemlich genau folgendermassen bestimmen. Man nehme erstlich die Summe aller Zahlen der vier letzten Columnen. Diese sind

SE

$SE = 49121$
$SW = 16964$
$Sw = 23546$
$ST = 80369$

Die erste dieser Summen muß um die Hälfte der ersten Ordinate AB = 5000 vermindert werden, weil die Linie BEC in einem fort bis auf 0 abnimmt. Die vierte wird ebenfalls um 5000 vermindert. Bey der zweyten und dritten ist keine Aenderung nöthig, weil die Linien AWC, AwC von 0 anfangen, und in 0 aufhören. Es sind demnach die Flächenräume

ABECA ∽ 44121
AWCA ∽ 16964
AwCA ∽ 23546
ATDCA ∽ 75369

Da nun die Zahlen von 5 zu 5 Jahren fortgehen, so müßen sie mit 5 multipliciret werden. Dieses giebt

ABECA ∽ 220605 stehende Ehen,
AWCA ∽ 84820 Wittwer,
AwCA ∽ 117730 Wittwen,
ATDCA ∽ 376845 ausgestorbene Ehen.

Diese Zahlen, welche ziemlich genau im Verhältniß von 13, 5, 7, 22 sind, stellen nun die Summe aller stehenden Ehen, lebender Wittwer und Wittwen und ausgestorbenen Ehen von 80 Jahren oder so wie sie zu Ende des 80sten Jahres sind, dergestalt vor, daß dabey vorausgesetzt

gesetzt wird, daß mit dem Anfange eines jeden Jahres 10000 Ehen zwischen Männern von 25 und Frauen von 20 Jahren entstanden sind. Sofern aber diese Ehen nicht auf einen Tag, sondern das ganze Jahr durch gleichförmig entstehen, so kann man das Entstehen derselben auf die Mitte eines jeden Jahres setzen, um das, was von den einen mehr wegstirbt, durch das, was von den andern weniger wegstirbt, zu ersetzen oder aufzuheben.

§. 74.

Nach diesen ausführlicheren Betrachtungen über den ganz einfachen Fall, wo das Alter gleich gesetzt wird, kann man nun leicht sehen, was bey zusammengesetzteren Fällen zu thun ist. Die Personen müssen nach ihrem Alter in Classen geordnet werden, so daß man die, so nur um 1 oder 2 Jahr verschieden sind, zusammen in eine Classe nimmt, theils um die Rechnung nicht allzuweitläuftig zu machen, theils um für jede Classe grössere Zahlen zu erhalten. Für jede Classe wird sodann die Rechnung besonders gemacht, und alles Jahr für Jahr, oder wenigstens von 5 zu 5 Jahren, in Summen gebracht.

§. 75.

Dieses geht nun, wenn man die Personen vor sich hat und abzählen kann, noch leicht an. Hingegen hält es desto schwerer, wenn man die natürliche Verhältniß der verheyratheten Personen

nen von jedem Alter blos aus den Sterberegistern bestimmen soll. Dahin mögen nun folgende Betrachtungen dienen.

III. Bestimmung der stehenden Ehen, lebenden Wittwer und Wittwen aus den Sterberegistern.

§. 76.

Süßmilch hat im zweyten Theil aus dem Deparcieux eine Tabelle, welche die Anzahl der in dem Kirchspiele St. Sulpice in Paris während 30 Jahren gestorbenen Mannspersonen, Ehemänner, Wittwer, Frauenspersonen, Ehefrauen und Wittwen nach verschiedenen Altern enthält. Diese Tabelle ist unter denen im zweyten Theile die zwölfte, nach der dritten als der letzten von dem Verfasser selbst besorgten Ausgabe. Süßmilch fügt eine Anmerkung bey, wo er sagt, daß sich aus dieser Tabelle noch viele Folgen würden herleiten lassen, wenn Paris mit andern Städten nicht allzuviel unähnliches hätte. Dieser Umstand hat allerdings seine Richtigkeit, und so werden sich aus besagter Tabelle ebenfalls nicht sehr zuverläßige Folgen für andere Städte ziehen lassen. Da es aber auch nicht unmöglich ist, aus den Todtenregistern anderer Städte solche Tabellen zu ziehen, wie die vom Deparcieux ist; so lohnt es sich immer der Mühe, wenigstens auf die Methode zu denken, aus solchen Tabellen die darin liegenden Folgen zu ziehen.

§. 77.

Der Fall in Ansehung der Ehemänner und Wittwer ist nun eigentlich dieser. Man theilt die jährlich oder in einer bestimmten Anzahl von Jahren gestorbenen Ehemänner und Wittwer nach dem von 5 zu 5, oder von 10 zu 10 Jahren fortgehenden Unterschiede ihres Alters in Classen, und merkt die Anzahl von jeder Classe besonders an. Das Gesetz der Sterblichkeit für jedes Alter wird als gegeben angenommen. Und da ist dann die Frage zu bestimmen, wie groß die Anzahl der lebenden Ehemänner und Wittwer von jedem Alter sey, und in welchem Alter sie sich verheyrathet haben.

§. 78.

Es stelle in der vierten Figur AP jedes beliebige Alter, BQC die Lebenslinie vor, nach deren Ordinaten die Anzahl der lebenden abnimmt. Für jedes Alter P sey PG die Summe der in jeden jüngeren Jahren gestorbenen Ehemänner und Wittwer; so werden die beyden krummen Linien BQC, FGD als gegeben angesehen. Ferner sey für jedes Alter P die Anzahl der in diesem Alter lebenden Ehemänner $= PE$. Fig. 4.
Macht man nun durchaus

$$PN = PG + PE$$

so stellt PN die ganze Summe der sich verheyratheten Männer vor. Denn P E leben noch, und P G ist die Summe der bereits gestorbenen. Man sieht also, daß die Sache auf die Bestimmung der krummen Linie F E C ankömmt.

§. 79.

Die Ordinaten dieser Linie verändern sich nun nach einem doppelten Gesetze. Denn einmal von den zugleich lebenden Ehemännern P E stirbt in der Zeit P p ein Theil weg. Hingegen kommen durch die in der Zeit P p vollzogenen Heyrathen neue hinzu. So lange nun mehr neuverheyrathete hinzukommen, als wegsterben, so lange wird die Ordinate P E größer. Dieses geschieht nun in den jüngeren Jahren, wo mehr ans Heyrathen als ans Sterben gedacht wird. In den älteren Jahren kehrt sich die Sache um, und daher hat auch die Linie F E C ein maximum, nach welchem ihre Ordinaten wieder abnehmen.

§. 80.

Die Anzahl der in der Zeit P p sterbenden wird folgendermaßen bestimmt. Man ziehe die Tangente Q T an den Punct Q der Lebenslinie, so ist die Subtangente P S die Lebenskraft (§. 48). Man ziehe ferner E S, und E ε mit A C parallel, so stellt ε h die Anzahl der in der Zeit P p sterbenden vor, und man sieht leicht, daß auch $\varepsilon h = g\gamma$ seyn muß.

§. 81.

Hingegen ist $n\nu$ die Anzahl der hinzukommenden neuverheyratheten. Wird demnach $n\nu$ aus h aufwerts in e getragen, so stellt $e\varepsilon$ die Anzahl vor, um welche die zur Zeit P lebenden Ehemänner in der Zeit P p vermehrt worden, wenn e über ε fällt, oder vermindert, wenn e unterhalb ε fällt. Also ist

$$e\varepsilon = n\nu - \varepsilon h$$

§. 82.

Es sey nun

$$AP = \tau \quad PE = E \quad e\varepsilon = dE$$
$$Pp = d\tau \quad PG = G \quad g\gamma = dG$$
$$PS = 7 \quad PN = N \quad n\nu = dN$$

so haben wir

$$\varepsilon h = \frac{E\,d\tau}{7}$$

demnach

$$dE = dN - \frac{E\,d\tau}{7}$$

Nun ist

$$N = G + E$$

demnach

$$dN = dG + dE$$

Dieses giebt

$$dE = dG + dE - \frac{E\,d\tau}{7}$$

das will sagen

$$dG = \frac{E\,d\tau}{7}$$

 Die-

Dieses folgt auch unmittelbar aus dem zu Ende des §. 80 gesagten.

§. 83.

Es ist also

$$E = \frac{7\,dG}{d\tau}$$

die gesuchte Ordinate der Linie FEC. Es verhält sich die kleine Zeit $d\tau$ zu den in derselben sterbenden Ehemännern und Wittwern, wie die Zeit 7 zu den zu der Zeit τ lebenden Ehemännern und Wittwern E.

§. 84.

Wird nun E zu G addirt, so erhält man N, und kann daraus finden, wie diese Ehemänner und Wittwer nach und nach entstanden, und in welchem Jahre ihres Alters sie sich zum erstenmale verheyrathet. Ich sage zum erstenmale. Denn da in dieser Rechnung Ehemänner und Wittwer zusammengenommen, und schlechthin nur als solche betrachtet werden, so hat die Anzahl ihrer Hochzeiten in die Rechnung keinen Einfluß. Von dem Tage ihrer ersten Vermählung an sterben sie entweder als Ehemänner oder als Wittwer. Die Linie FND stellt demnach auch nur die allmählige Entstehung der ersten Ehen von Seiten der Ehemänner vor, und die Frage, ob ihre ersten Frauen ledig oder Wittwen waren, hat dabey keinen Einfluß.

§. 85.

§. 85.

Man ziehe nun ferner die Tangente GV, und setze

$$VP = \Theta$$

so ist

$$\Theta : d\tau = G : dG$$

demnach

$$\frac{dG}{d\tau} = \frac{G}{\Theta}$$

Dieses in der Formel

$$E = \frac{7\,dG}{d\tau}$$

gesetzt, giebt

$$E = \frac{7G}{\Theta}$$

Es wird also E durch die Ordinate G und die beyden Subtangenten PS, PV bestimmt.

§. 86.

Da die Natur der krummen Linie FGD unbekannt ist, und ihre Ordinaten nur aus den Todtenlisten bestimmt werden können, so macht die Bestimmung der Subtangente Θ einige Schwürigkeit, wenn man sie für jedes Alter genau bestimmt haben will. Wenn man indessen die Linie FGD mit einiger Sorgfalt construirt, so lassen sich die Tangenten in sofern gut genug ziehen, daß man nachgehends, wenn vermittelst

 der

der letzten Formel die Linie FEC und dann auch die Linie FND construirt wird, man dabey nachsieht, was etwan zu verbessern ist, damit diese Linien und besonders die letztere weder irreguläre noch der Natur der Sache zuwiederlaufende Beugungen erhalte. So z. E. ist leicht voraus zu sehen, daß die Linien FND, FGD, so sehr sie sich anfangs von einander entfernen, nachher immer näher zusammentreffen, und beyde endlich der Axe oder Abscissenlinie AC parallel werden müssen. Denn die Ordinaten von FND stellen die Summe der ersten Ehen vor, deren Anzahl mit zunehmenden Jahren immer weniger zunimmt; und ihre ganze Summe muß endlich der Summe aller gestorbenen Ehemänner und Wittwer gleich seyn. Uebrigens sieht man leicht, daß alles bisher gesagte auch auf die Ehefrauen und Wittwen anwendbar ist.

§. 87.

Fig. 5. Ich habe nun mit den Zahlen vorerwähnter Tabelle des Deparcieux (§. 76.) einen Versuch gemacht, und werde den Erfolg davon in der 5ten Figur vorlegen. AC ist in 100 Jahre getheilt, AB stellt 10000 neugebohrne vor, und die Ordinaten der Lebenslinie BQC sind nach der dritten Columne der Tafel des §. 24. aufgetragen. Die Ordinaten der Linie FGG stellen die Summen der gestorbenen Ehemänner und Wittwer aus des Deparcieux Tabelle vor, so daß z. E.

z. E. PG die Summe aller derer ist, die vor ihrem 50sten Jahre gestorben sind. Da diese Ordinaten genau nach des Deparcieux Zahlen aufgetragen sind, und die dadurch bestimmte krumme Linie eine sehr reguläre und der Natur der Sache gemäße Wendung hat, so habe ich keine Aenderung damit vorgenommen, sondern hatte vielmehr Anlaß mich zu verwundern, daß es in dem Kirchspiel St. Sulpice zu Paris in Ansehung des Absterbens der Ehemänner und Wittwer so regulär zugeht. Vermittelst der Subtangenten dieser Linie und der vorhin gegebenen Formeln bestimmte ich nun auch die Linien FWW, FEE anfangs so, wie sie durch die durch Construction gefundenen Subtangenten Θ und die aus der Tafel des §. 24. genommene Subtangenten 7, die eben auch nicht durchaus auf eine große Stadt, wie Paris ist, passen, sich bestimmen ließen. Nachgehends, da sich einige Irregularitäten äusserten, suchte ich diese dadurch zu vermeiden, daß ich etwas vor und nachgab. Auf diese Art stellen nun die Ordinaten der Linien FWW die Anzahl der in jedem Alter lebenden Ehemänner und Wittwer, die Ordinaten der Linie FEE die Summen der in jedem jüngeren Alter entstehenden ersten Ehen von Seiten des Mannes vor. Der Anfang dieser Linien trift ungefehr in das 16te Jahr. Von da an ziehen sie sich ziemlich gleichförmig, nach dem 30sten Jahre etwas mehr, gegen das 35ste Jahr am stärksten, aufwerts, wo demnach die meisten Ehen

Ehen entstehen. Von da an nimmt das Steigen der Linie FWW bis gegen das 44ste Jahr immer langsamer zu, nach dem 44sten Jahre aber wiederum nach und nach ab. Die stärkste Abnahme, wo die Linie ihren zweyten Wendungspunct hat, ist etwas nach dem 60sten Jahre, wo zugleich auch die Linie FEE ihrer grösten Höhe schon sehr nahe ist, da in der That wenig Mannspersonen sich erst nach ihrem 60sten Jahre das erstemal verheyrathen.

§. 88.

Auf eine ähnliche Art construirte ich für die ganze Summe der gestorbenen Ehefrauen und Wittwen die Linie Fgε genau nach den Zahlen des Deparcieux, und vermittelst deren Subtangenten die Linie Feε für die Summe ihrer ersten Ehen. Hier war nun das besonders, daß diese Linie bis zum 60sten Jahre in R sehr regulär sich aufwärts zog, von da an aber in S aufwärts sprang, und von da an mit der Abscissenlinie AC parallel wurde. Was nun hier für ein Umstand seyn muß, der diesen Absprung verursacht, das müßte besonders untersucht werden. Der Sprung von R in S beträgt in die 1000 Weibspersonen. Man kann doch wohl nicht sagen, daß von etwan 9000, denn so hoch beläuft sich ungefehr die Summe von allen, 1000 bis in ihr 60stes Jahr warten, ehe sie ihre erste Ehe antreten. Es heißt aber, und dis ist glaublicher, daß zu Paris unverheyrathete Frauenspersonen, wenn sie alt sind, anfangen sich für Wittwen auszugeben.

§. 89.

Ich habe also dienlich erachtet, die Linie FeR von R nach e zu ziehen. Dieses zog zugleich auch den Erfolg nach, daß die Linie Fgε die Wendung Fgg erhielt. Man sieht auch, daß sie dadurch der für die Ehemänner und Wittwer construirten Linie FGG ungleich ähnlicher wird, als Fgε. Nach den auf diese Art verbesserten Linien Fee, Fgg ließ sich nun auch die Linie Fww construiren, welche die Anzahl der in jedem Alter lebenden Ehefrauen und Wittwen vorstellt.

§. 90.

Man sieht nun mit einem Anblicke, wie schnell die Linie Fee ihrer größten Höhe entgegen steigt, und wie folglich die meisten Frauenspersonen vor ihrem 30sten Jahre sich zum erstenmal verheyrathen. Eben dis macht auch, wie man es an der Linie Fww sieht, daß 32 jährige Ehefrauen und Wittwen (es versteht sich in eins zusammengerechnet) am häufigsten sind, und die Anzahl derer von jedem höheren und geringeren Alter weniger groß ist. Das ein oder zwey und zwanzigste Jahr ist dasjenige, wo ihre Anzahl am geschwindesten zunimmt, weil die Linie Fee daselbst einen Wendungspunct hat. Der ähnliche Wendungspunct der Linie Fww ist um etwan ein Jahr später. Zwischen dem 40sten und

und 70sten Jahre nimmt diese Linie sehr gleichförmig ab. Sie scheint sogar zwischen dem 55sten und 65sten Jahr etwas weniger als vor und nach abzunehmen, und sowohl gegen das 48ste als gegen das 67ste Jahr einen Wendungspunct zu haben, wo also die Ehefrauen und Wittwen schneller als vor und nach wegsterben. Von dem ersten dieser Wendungspuncte lassen sich Gründe vermuthen. Wir haben auch bereits oben (§. 50.) bey Betrachtung der allgemeinen Lebenslinie etwas ähnliches bemerkt. Den andern Wendungspunct haben wir (§. 48. 49.) bey der allgemeinen Lebenslinie ebenfalls bemerkt, nur mit dem Unterschiede, daß er hier um etwan 17 bis 18 Jahre früher ist, vermuthlich weil die daselbst angeführten Gründe bey den Wittwen früher statt haben, oder diese sich früher der Weltsorgen entschlagen.

§. 91.

Wenn man die Ehemänner und Wittwer, oder auch die Ehefrauen und Wittwen von jeden Altern zusammennimmt, so wird die Anzahl der erstern durch den Flächenraum der Linie FWW, die Anzahl der andern durch den Flächenraum der Linie Fww vorgestellt. Man kann diese Flächenräume auch so nehmen, wie sie durch die Ordinaten zweyer beliebiger Jahre eingeschlossen werden, wenn man die zwischen solchen Jahren lebenden Ehemänner und Wittwer oder Ehefrauen und Wittwen bestimmen will. Indessen scheint es

es nicht, daß die Räume beyder Linien mit einander können verglichen werden, ungeachtet es sehr wohl begreiflich ist, daß der Flächenraum für die Ehefrauen und Wittwen FwwF größer, als der für die Ehemänner und Wittwer FWWF seyn müße. Diese schreiten häufiger zur zweyten Ehe als jene, und so müßen allerdings auf eine gleiche Anzahl von Ehemänner und Wittwer mehr Ehefrauen und Wittwen gerechnet werden. Die Linie Fww hat ungefehr um die Hälfte mehr Flächenraum als die Linie FWW. Dafern demnach das Kirchspiel St. Sulpice auch in diesem Stücke noch genug Regularität hat, so wird folgen, daß in allem die Anzahl der Ehefrauen und Wittwen um die Hälfte größer ist, als die von den Ehemännern und Wittwern.

§. 92.

Da endlich Deparcieux die Anzahl der gestorbenen Ehemänner und Ehefrauen besonders angiebt, so habe ich für dieselben die Construction ebenfalls vorgenommen, und es sind daher die in jedem Alter lebenden Ehemänner durch die Ordinaten der punctirten Linie FMM, und die in jedem Alter lebenden Ehefrauen durch die Ordinaten der punctirten Linie Fff vorgestellt. Der Unterschied dieser Linien von den Linien FWW, Fww zeigt nun zugleich, wie groß die Anzahl der in jedem Alter lebenden Wittwer und Wittwen ist. Die größte Zahl beyder ist in den sechsziger Jahren, dahingegen die größte Zahl

Zahl der Ehemänner gegen das 44ste, der Ehefrauen gegen das 31ste Jahr ist.

§. 93.

Die Linien Fww, Fff, so wie die Linien FWW, FMM fangen erst, nachdem sie ihr maximum erreicht haben, an von einander merklicher abzuweichen, und erstere beyden vielmehr als die beyden letzteren. Dieses ist erstlich schon dadurch begreiflich, daß die Unterschiede ihrer Ordinaten die Anzahl der Wittwen und Wittwer von jedem Alter vorstellen. Es folgt aber an sich auch daraus, daß die Anzahl der Ehefrauen und Ehemänner sowohl durch ihren eigenen als durch den Tod ihrer Ehegenossen abnimmt.

§. 94.

Uebrigens muß ich noch anmerken, daß alle bisher aus der Tabelle des Deparcieux und der Figur gezogene Folgen nicht weiter auszudehnen sind, als sie gehen. Sie dienen nur, um sich von der Sache einen etwas bestimmteren Begriff zu machen, als man ihn ohne genauere Untersuchung mehrerer Todtenlisten haben kann. Vielleicht geben andere Todtenlisten einen etwas verschiedenen Erfolg. Da man aber deren noch wenig vorräthig hat, so wird es auch mit dem bisher gesagten und der angezeigten Methode schon genug seyn. Bey umständlicheren und genaueren Tabellen müßten noch viel mehrere Umstände mitgenommen werden, z. E. man müßte die Männer und Frauen, die in oder nach der ersten,

ersten, zweyten, dritten ꝛc. Ehe sterben, die Dauer ihrer Ehen, die Jahre, in welchen sie und ihre Frauen die Ehen antraten, die Anzahl der in jeder Ehe erzeugten Kinder ꝛc. in eben so viele besondere Classen nach dem Alter der sterbenden anordnen. Von allem diesen läßt sich aus des Deparcieux Tabelle nichts bestimmen. Das einige, was in dieser Absicht daraus folgt, ist die Bestimmung der Wittwer und Wittwen, die sich wider verheyrathen, wobey ebenfalls der Beharrungsstand vorausgesetzt wird.

§. 95.

Um diese Bestimmung hier noch wenigstens als ein Beyspiel mitzunehmen, so ist anfangs anzumerken, daß dem Beharrungsstande zufolge alle Jahre gleich viel Ehemänner, Ehefrauen, Wittwer und Wittwen sterben. Sodann kommen bey der vorhabenden Berechnung auch Wittwer- und Wittwenschaften vor, die theils früher theils später anfangen, und aufhören. In dieser Absicht wird der Vortrag deutlicher, wenn wir die Rechnung für den Zeitlauf von vielen Menschenaltern vornehmen, um dadurch der Mühe überhoben zu seyn, das, was in einem Jahre geschieht, mit dem, was in verschiedenen Jahren geschieht, umzutauschen. Nun ist die Tabelle des Deparcieux zwar nur von 30 Jahren. Da es aber hier nur auf Verhältnisse ankömmt, so können wir bey seinen Zahlen bleiben. Die Rechnung ist nun folgende.

§. 96.

§. 96.

Es sind in allem 5413 Ehefrauen gestorben. Nun veranlasset der Tod jeder Ehefrau eine Wittwerschaft ihres hinterlassenen Ehemannes. Demnach sind in allem 5413 Wittwerschaften entstanden. Diese Anzahl ist aber größer, als die Anzahl der Mannspersonen, die Wittwer geworden sind, weil immer einige darunter zwey, drey und mehrmal Wittwer geworden. Es ist also 5413 die Summe der Producte, welche man findet, wenn jede Wittwer mit der Zahl ihrer Wittwerschaften multiplicirt werden. Nun sind nach der Tabelle nur 1416 Wittwer als Wittwer gestorben, und haben also durch den Tod ihre Wittwerschaft, und wenn sie mehrmals Wittwer geworden sind, ihre letzte Wittwerschaft geendigt. Zieht man demnach die 1416 Wittwerschaften, so sich durch den Tod endigen, von der ganzen Summe aller Wittwerschaften 5413 ab, so bleiben 3997 Wittwerschaften, die sich nicht durch den Tod, sondern durch wieder verheyrathen endigen. Die beyden Zahlen 1416, 3997 sind nun so beschaffen, daß die erste 1416 alle Wittwer begreift, die nach der ersten, zweyten, dritten, vierten ꝛc. Ehe, ohne sich weiter zu verheyrathen, gestorben sind. Und da sie nur einmal sterben konnten, so kommen sie in der Zahl 1416 nur einmal vor. Hingegen kommen unter der Zahl 3997 erstlich alle Wittwer, so in der zweyten, dritten, vierten ꝛc. Ehe als Ehemänner sterben, 1, 2, 3 ꝛc. mal vor. Sodann kommen darunter auch die Wittwer, so nach der zweyten, dritten, vierten ꝛc. Ehe sterben, ohne sich weiter zu verheyrathen, 1, 2, 3 ꝛc. mal vor. Endlich sind nach der Tabelle in allem 5079 Männer gestorben. Es ist klar, daß dieses in der ersten, zweyten, dritten, vierten ꝛc. Ehe geschehen seyn müsse. Man nenne M', M'', M''', M'''' &c. die Männer, so in der ersten, zweyten, dritten, vierten ꝛc. Ehe sterben, und W', W'', W''' &c. die Wittwer, so nach der ersten, zweyten, dritten ꝛc. Ehe sterben; so ist

$$3997 = W'' + 2W''' + 3W'''' + 4W^{v} + \&c. + M'' + 2M''' + 3M'''' + 4M^{v} + \&c.$$

und

$$5079 = M' + M'' + M''' + M'''' + \&c.$$

und

$$1416 = W' + W'' + W''' + W'''' + \&c.$$

Wird nun 3997 von 5079 abgezogen, so bleibt

$$1082 = M' - W'' - 2W''' - 3W'''' - 4W^{v} - \&c. - M''' - 2M'''' - 3M^{v} - \&c.$$

und so ist

$$M' = 1082 + W'' + 2W''' + 3W'''' + 4W^{v} + \&c. + M''' + 2M'''' + 3M^{v} + \&c.$$

Und so auch, wenn man 1416 addirt,

$$M' + W' = 2498 + W''' + 2W'''' + 3W^{v} + \&c. + M''' + 2M'''' + 3M^{v} + \&c.$$

§. 97.

In Ansehung der Frauen und Wittwen ist die Rechnung ganz ähnlich. Es starben in allem allein 5079 Ehemänner, und demnach entstunden 5079 Wittwenschaften. Nun starben nur 3937 Wittwen (nach der Tabelle; denn nach obiger Anmerkung (§. 88.) würden es weniger seyn) und 5413 Ehefrauen. Man nenne f', f'', f''', f'''' &c. die Frauen, so in der ersten, zweyten, dritten, vierten ꝛc. Ehe starben, und w', w'', w''', w'''' &c. die so nach der ersten, zweyten, dritten, vierten Ehe als Wittwen starben; so ist

$$5413 = f' + f' + f'' + f''' + \&c.$$

$$\left.\begin{array}{l} 1142 = w'' + 2w''' + 3w'''' + \&c. \\ \quad + f'' + 2f'' + 3f''' + \&c. \end{array}\right\} = 5079 - 3937$$

$$3937 = w' + w'' + w'' + w'''' + \&c.$$

Wird nun 1142 von 5413 abgezogen, so bleibt

$$4271 = f' - f'' - 2f''' - \&c.$$
$$- w'' - 2w''' - 3w'''' - \&c.$$

Wird hiezu 3937 addirt, so ist

$$8208 = f' - f'' - 2f''' - 3f^{v} - \&c.$$
$$+ w' - w''' - 2w'''' - 3w^{v} - \&c.$$

demnach

$$f' = 4271 + w'' + 2w''' + 3w'''' + 4w^{v} + \&c.$$
$$+ f'' + 2f''' + 3f^{v} + \&c.$$

und

$$f' + w' = 8208 + f'' + 2f'''' + 3f^{v} + \&c.$$
$$+ w''' + 2w'''' + 3w^{v} + \&c.$$

Nach der Anmerkung des §. 88 dürften nun diese zwo Zahlen, 4217 und 8208, jede um ihren vierten oder fünften Theil müssen vermindert werden.

§. 98.

§. 98.

Daß diese Abänderung nöthig sey, erhellet auch aus der Anzahl der geschlossenen Ehen. Denn für die Mannspersonen waren

$$\left.\begin{array}{ll} \text{erste Ehen} & = 5079 + 1416 = 6495 \\ \text{folgende Ehen} & = 5413 - 1416 = 3997 \end{array}\right\} \overset{\text{Summe.}}{=} 10492.$$

Für die Frauenspersonen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{erste Ehen} & = 5413 + 3937 - x = 9350 - x \\ \text{folgende Ehen} & = 5079 - 3937 + x = 1142 + x \end{array}\right\} = 10492.$$

Hier habe ich die vorzunehmende Verbesserung durch x angedeutet.

§. 99.

Nun läßt sich aus der Tabelle, die Süßmilch im zweyten Theile auf der 274sten Seite giebt, und wo die Anzahl der viererley Ehen nicht aus Todtenlisten, sondern aus wirklicher Abzählung gefunden worden, leicht herleiten, daß

zu	Amsterdam	Harlem	in Pommern
der Mannspersonen			
erste Ehen an der Zahl	799	668	789
folgende Ehen - - -	350	183	205
der Frauenspersonen			
erste Ehen - - - -	905	673	832
folgende Ehen - - -	244	178	162

waren. Es waren also der Frauen erste Ehen hier nur vier höchstens fünfmal zahlreicher als ihre folgenden Ehen, da sie hingegen nach den Zah-

 len

len des vorhergehenden §. 8 ½ mal zahlreicher seyn müßten, wenn $x = 0$ seyn sollte. Der Unterschied ist allzumerklich, zumal da es scheint, daß zu Paris auch die Wittwer häufiger wieder heyrathen, als nach der Süßmilchischen Tabelle. Setzen wir demnach

$$(9350 - x) : (1142 + x) = 4 : 1$$

wie dann dieses den ebenfalls volkreichen Städten Amsterdam und Harlem näher kömmt, so erhalten wir

$$x = 956$$

Wir haben auch bereits in dem §. 88. angezeigt, daß die Verbesserung oder der Sprung von R in S (Fig. 5.) in die 1000 Personen beträgt.

§. 100.

Der Beweis des Verfahrens (§. 98.) ist übrigens leicht. Denn es ist klar, daß die 5079 gestorbene Ehemänner, und die 1416 gestorbene Wittwer, jeder nur eine erste Ehe antraten. Die Summe giebt also 5079 + 1416 = 6495 erste Ehen. Wiederum geben 5413 gestorbene Ehefrauen eben so viele Wittwerschaften ihrer hinterlassenen Männer. Diese 5413 Wittwerschaften wurden nun theils durch Wiederverheyrathen, theils durch den Tod geendigt. Es wurden aber nur 1416 durch den Tod geendigt, weil nur so viele Wittwer als Wittwer starben. Also bleiben 5413 — 1416 = 3997 Wittwerschaften, die durch Wiederverheyrathen sich endigten, und demnach 3997 folgende Ehen veranlaßten. Auf eine ähnliche Art

Art werden auch die ersten und folgenden Ehen der Frauen erwiesen.

IV. Die Anzahl der zweyten und folgenden Ehen.

§. 101.

Ich habe über diese Materie im Süßmilchischen Werke und auch sonsten wenig gefunden, wodurch sich aus unmittelbaren Beobachtungen bestimmen ließe, wie sich die Anzahl der ersten Ehen zur Anzahl der zweyten, dritten 2c. verhalten. Aus andern Beobachtungen läßt sich höchstens nur auf eine sehr mißliche Art etwas hiezu dienendes herleiten. Da ich nun selbst keine Sterbe- noch Vermählungsregister vor mir habe; so habe ich die genealogischen Tabellen hierüber zu Rathe gezogen, wo aber freylich auch nur die verschiedenen Ehen der Personen männlichen Geschlechtes etwas sorgfältiger aufgezeichnet sind, weil man darin gemeiniglich nur des Mannesstammes vorzüglich Rechnung trägt.

§. 102.

Aus diesen Tabellen zählte ich nun anfangs 115 Personen, so viel nemlich der Raum des Papiers gestattete. Es waren sämtlich Reichsgrafen, und unter diesen hatten sich 82 einmal, 27 zweymal, 6 dreymal verheyrathet. Darauf zählte ich wiederum 105 andere, und unter diesen waren

ren 87, die sich einmal, 24, die sich zweymal, 4, die sich dreymal verheyrathet hatten. Ich nahm sie, so wie sie der Ordnung nach in den Tabellen folgten, und demnach ohne Auswahl. Auch nahm ich nur solche, deren bereits erfolgter Tod keine fernere Ehe mehr gestattete. Da nun beydemale die Verhältnisse ziemlich gleich waren; so ließ ich es dabey bewenden, und so waren in allem

169, die sich 1 mal
51, die sich 2 mal
$\frac{10}{230}$, die sich 3 mal

verheyrathet hatten. Vierte Heyrathen kamen darunter nicht vor. Man sieht auch aus der Art, wie diese Zahlen abnehmen, daß kaum eine vierte Heyrath unter einer so geringen Zahl statt finden konnte.

§. 103.

Hieraus findet sich nun die Anzahl

$10+51+169 = 230$ erster Ehen,
$10+51 = 61$ zweyter Ehen,
$10 = 10$ dritter Ehen,
in allem 301 Ehen,
230 erste Ehen,
71 folgende Ehen.

§. 104.

Vergleicht man nun diese 230 erste und 71 folgende Ehen mit dem was nach dem §. 99 die

die Städte Amsterdam und Harlem, und ganz Pommern geben, so ist

hier 230 : 71 = 1000 : 306
zu Amsterdam 799 : 350 = 1000 : 437
zu Harlem 668 : 183 = 1000 : 274
in Pommern 789 : 205 = 1000 : 260

Es kommen also die Reichsgräflichen Ehen den Harlemschen am nächsten, und sind auch von den Pommerschen nicht um viel mehr verschieden, desto mehr aber von den Amsterdamschen, wo die folgenden Ehen um ein merkliches zahlreicher sind. Nach des Deparcieux Tabelle sind sie in Paris noch zahlreicher (§. 98). Es scheint also, daß die Frauenzimmer in großen Städten weniger Bedenken tragen, Wittwer zu heyrathen, oder daß die Wittwer daselbst sich leichter, vermuthlich auch wegen der grösseren Sterblichkeit früher um Frauen umsehen können, oder theils auch wegen weitläuftiger Zerstreuung ihrer Geschäfte müssen.

§. 105.

Dieses bey Seite gesetzt, können wir also für Provinzen wie Pommern, und für Städte wie Harlem, das will sagen, überhaupt eben so wie für die Reichsgrafen gefunden worden, annehmen, daß

gegen 23 erste Ehen,
6 zweyten Ehe
und 1 dritte Ehe

zu rechnen sind, und daß also von Personen männlichen Geschlechtes

17 einmal
5 zweymal
1 dreymal

sich verheyrathen.

§. 106.

Die ersten Ehen treffen meistens in die jüngeren Jahre. Für diese haben wir nun oben (§. 73.) gefunden, daß gegen 5 Wittwen erster Ehe, 7 Wittwer erster Ehe zu rechnen, so daß unter 12 ersten Ehen 7 sind, wo die Frau, und 5, wo der Mann zuerst stirbt. Dieses giebt auf 23 erste Ehen 13 bis 14 Wittwer. Von diesen schreiten aber nur 6 zur zweyten Ehe (§. 105). Demnach bleiben 6 bis 7 Wittwer, die nach der ersten Ehe sterben.

§. 107.

Die zweyten und folgenden Ehen der Frauen sind überhaupt seltener. Nach §. 99. ist für

Amsterdam	905	: 244	=	1000	:	270
Harlem	673	: 178	=	1000	:	265
Pommern	832	: 162	=	1000	:	195

Wir können also, um auch hier näher bey Harlem zu bleiben, gegen 1000 erste Ehen 266 bis 267 folgende Ehen der Frauen rechnen. Dies giebt 8 folgende Ehen auf 30 ersten. Unter diesen 8 folgenden Ehen wird höchstens eine dritte Ehe zu rechnen seyn, da dieser bey den Männern schon 6 mal weniger als zweyte Ehen sind. Wir haben also

30 erste Ehen
8 zweyte
1 dritte.

so daß von Frauenzimmern, sich

22 einmal
7 zweymal
1 dreymal

verheyrathet. Nun entstehen von 30 ersten Ehen nur 12 bis 13 Wittwen. Und da sich von diesen nur 8 wieder verheyrathen, so folgt, daß ihrer 4 oder 5 nach der ersten Ehe als Wittwen sterben. Nähere Bestimmungen in grösseren Zahlen, und besonders auch, was die vierten und folgenden Ehen betrift, müssen aus grösseren Sterbe- und Heyrathslisten herausgebracht werden. Das hier gesagte ist demnach nur als eine vorläufige Anleitung anzusehen.

V. Die Anzahl der Kinder aus jeden Ehen.

§. 108.

Ich werde auch diese Betrachtungen nur als eine vorläufige Anleitung hersetzen, nach welcher aus grösseren Taufregistern Hochzeit- und Sterbelisten etwas vollständigeres herauszubringen seyn wird. Denn aus Ermangelung solcher Ver-

Verzeichnisse habe ich mich ebenfalls der genealogischen Tabellen bedient, und da blieb ich mehr zurücke, weil die todtgebohrnen und vor der Taufe oder auch in den ersten Jahren verstorbenen Kinder, jene gar nicht, diese wenigstens nicht immer angezeigt sind.

§. 109.

Wenn es nur die Frage ist, wie viel im Durchschnitte Kinder auf eine Ehe müssen gerechnet werden, so findet sich im Süßmilchischen Werke genug Stoff dazu. Auch läßt sich leicht auf folgende Art schließen. Die Hälfte der Menschen stirbt bis ins 20ste Jahr weg, also 500 von 1000. Die übrigen 500 geben 250 Ehen, und aus diesen müssen wiederum 1000 gebohren werden, wenn alles im Beharrungsstande bleiben soll. Also kommen auf jede Ehe 4 Kinder im Durchschnitte. Süßmilch zeigt, daß nach Verschiedenheit der Umstände bald etwas mehr, bald etwas weniger im Durchschnitte herauskömmt. Nun entstehen nicht aus jeder Ehe gleich viel Kinder, sondern die Zahl derselben verändert sich von 0 bis auf 23. Denn so viel hatte nach dem Krebelschen Handbuche die Stollbergische Gräfin Christina, die 1749 im 86sten Jahre ihres Alters verstorben. Es entsteht daher die Frage, wie sich die Ehen von 0, 1, 2, 3, 4 rc. Kindern gegen einander verhalten.

§. 110.

Zu diesem Ende zählte ich in genealogischen Schriften 612 Ehen auf, fand aber in allem nur 1518 Kinder aufgezeichnet, und schloß daher, daß diese Zahl wegen der todtgebohrnen, vor der Taufe oder überhaupt in der Wiege verstorbenen, oder in den Tabellen vergessenen, wohl um die Hälfte vermehrt werden müsse, wenn man alle rechnen will, die aus den 612 Ehen gebohren worden. In Ansehung der aufgezeichneten Kinder fanden sich nun

Ehen		zu Kinder		geben Kinder
104	-	0	- -	0
149	-	1	- -	149
112	-	2	- -	224
90	-	3	- -	270
54	-	4	- -	216
38	-	5	- -	190
31	-	6	- -	186
12	-	7	- -	84
12	-	8	- -	96
4	-	9	- -	36
4	-	10	- -	40
1	-	13	- -	13
1	-	14	- -	14

so daß, wie gesagt, auf 612 Ehen nur 1518 Kinder würden zu stehen kommen, dafern nicht sehr viele, ja wenigstens die Hälfte aus den Tabellen weggelassen wären, die, weil sie in der Kindheit weggestorben, weiter nichts auf sich haben konnten.

§. 111.

Die hier angegebenen Zahlen haben übrigens noch eine ziemliche Regularität, indessen bedürfen

fen sie wegen der etwas allzuungleichen Abfälle von 112 auf 90, von 90 auf 54, von 31 auf 12 einiger Verbesserung. Um diese, so gut es sich thun ließe, vorzunehmen, construirte ich die Anzahl der Kinder als Abscissen, und die Anzahl der Ehen als Ordinaten, und zog zwischen den Endpuncten der Ordinaten eine krumme Linie dergestalt durch, daß sie so viel möglich regulär wäre, und zwischen den Fehlern der Ordinaten das Mittel hielte. Hierauf zog ich neue Ordinaten, die um $\frac{2}{3}$ näher beysammen waren, als die ersteren, weil ich annehmen konnte, daß die Anzahl der Kinder um die Hälfte müsse vermehret werden. Dieses vermehrte nun zugleich auch die Anzahl der Ehen, aber so daß dessen unerachtet 4 Kinder auf eine Ehe zu stehen kamen. Der Erfolg war nun überhaupt dieser:

Ehen		zu Kinder		geben Kinder
104	-	0	- -	0
147	-	1	- -	147
143	-	2	- -	286
118	-	3	- -	354
93	-	4	- -	372
73	-	5	- -	365
57	-	6	- -	342
45	-	7	- -	315
35	-	8	- -	280
26	-	9	- -	234
19	-	10	- -	190
14	-	11	- -	154

Ehen

Ehen		zu Kinder		geben Kinder
10	-	12	- -	120
7	-	13	- -	91
5	-	14	- -	70
4	-	15	- -	60
3	-	16	- -	48
2	-	17	- -	34
1	-	18	- -	18
906 Ehen		- - - - -		3480 Kinder.

Zu diesen 906 Ehen mögen nun noch einige hinzukommen, wo die Anzahl der Kinder noch um 1, 2, 3 2c. grösser als 18 ist, und dadurch kommen sodann ganz ordentlich vier Kinder auf eine Ehe. Ich werde zwar diese Tabelle nicht als ein Muster sondern nur als ein Beyspiel angeben, und kann aus Ermangelung anderer Beobachtungen nicht sagen, wiefern sie dem wahren Mittel aus mehreren Oertern nahe kömmt. Sie ist, wie man sieht, auf den Fall gerichtet, wo auf eine Ehe im Durchschnitte vier Kinder zu rechnen sind. Daß dieses nicht aller Orten noch zu allen Zeiten eintrift, hat Süßmilch aus vielen Beobachtungen gefunden. Der Erfolg hievon ist, daß, wenn man aus Tauf- Hochzeit- und Sterberegistern ähnliche Tabellen errichtet, es auch dabey gut seyn wird, zu sehen, wie sich nach den verschiedenen Graden der Fruchtbarkeit der Ehen überhaupt die Grade für jede Anzahl von Kindern besonders proportioniren.

§. 112.

§. 112.

Nach der hier gelieferten Tabelle sind diejenigen Ehen nicht die zahlreichsten, die 4 Kinder haben, sondern diejenigen, wo 1 oder 2 Kinder sind. Dieses zeigt die Vergleichung der ersten und zweyten Columne. Hingegen sieht man aus der dritten Columne, daß die Anzahl derjenigen Kinder am grösten ist, wo von jeder Ehe 4 sind. Dieser Umstand trift also mit dem Mittelverhältniß zusammen, ungeachtet er eben nicht nothwendig zusammentreffen muß, weil ein anderes Gesetz der Fruchtbarkeit andere maxima geben kann. Uebrigens habe ich die Kinder, so einen Vater, aber verschiedene Mütter hatten, nicht zusammen als Kinder von einer Ehe, sondern als Kinder verschiedener Ehen gerechnet, wiewohl sie übrigens auch in eine besondere Classe hätten geordnet werden können. Ich habe indessen nicht gefunden, daß ein beträchtlicher Unterschied daher entstehe. Die vorhin erwähnten 23 Kinder der Gräfin von Stollberg Wernigerode waren Kinder der zweyten Ehe, die erste war unfruchtbar, wiewohl sie übrigens nur 10 Monate dauerte. Hingegen hatte ein Graf von Kuffstein von der ersten Ehe 15 und zwar lauter todtgebohrne Kinder, von der zweyten dessen ungeachtet noch drey ihn überlebende Söhne.

VI.

VI. Die Ehen mit dem Alter beyder Personen verglichen.

§. 113.

Nachdem ich nun einmal auf den Einfall gerathen, den Mangel der Sterbe- Tauf- und Vermählungsregister durch die genealogischen Tafeln wenigstens einigermaßen zu ersetzen, so habe ich noch einen Versuch gemacht, daraus das Alter der Personen männlichen Geschlechtes zur Zeit ihrer ersten, zweyten, dritten Vermählung und zugleich auch das Alter ihrer Gemahlinnen aufzusuchen, und den Umstand, ob diese bereits verheyrathet gewesen waren, noch mitzunehmen. Dieses stellt nun, so weit ich die Abzählung vorgenommen, folgende Tabelle vor:

A	B	C	D
16	—	—	20
18	—	—	---
	29	—	19
		33	23
19	—	—	18
19	—	—	23
	31	—	37
		45	17
19	—	—	29
20	—	—	25
20	—	—	28

A	B	C	D
21	—	—	16
21	—	—	17
	24	—	24
21	—	—	17
21	—	—	21
	33	—	30
21	—	—	23.
21	—	—	24
21	—	—	26
21	—	—	27
22	—	—	15
22	—	—	15

A	B	C	D
22	—	—	16
	43	—	---
		52	50 .W
22	—	—	18
22	—	—	20
22	—	—	21
22	—	—	22
22	—	—	22
	45	—	32
22	—	—	27
23	—	—	16
23	—	—	17
	46	—	37
23	—	—	17
	53	—	27
		61	---
23	—	—	21
	58	—	32
		64	24
23	—	—	25
23	—	—	31
23	—	—	33
23	—	—	33 .W
	34	—	28
24	—	—	14
24	—	—	18
24	—	—	21

A	B	C	D
24	—	—	21
24	—	—	22
24	—	—	24
	41	—	25
24	—	—	24
	30	—	21
24	—	—	24
	37	—	36
		39	28
24	—	—	25
	34	—	30
24	—	—	26
24	—	—	27
24	—	—	28
24	—	—	32
	37	—	20
25	—	—	13
25	—	—	14
25	—	—	16
25	—	—	17
25	—	—	18
25	—	—	20
25	—	—	21
—	41	—	20
25	—	—	21
—	38	—	31
25	—	—	21

A	B	C	D
25	—	—	22
25	—	—	23
	41	—	24
25	—	—	23
25	—	—	38. W
	42	—	23
25	—	—	44. W
26	—	—	21
26	—	—	22
26	—	—	22
26	—	—	22
26	—	—	27
26	—	—	28
	69	—	33
26	—	—	37. W
27	—	—	17
	37	—	30
27	—	—	18
27	—	—	20
27	—	—	23
	35	—	30
27	—	—	24
27	—	—	27
27	—	—	30
28	—	—	16
28	—	—	22
	31	—	20
28	—	—	22

A	B	C	D
28	—	—	28
28	—	—	32
28	—	—	---
	48	—	39
29	—	—	18
29	—	—	23
30	—	—	21
30	—	—	22
30	—	—	26
	35	—	24
30	—	—	27
30	—	—	27
31	—	—	18
31	—	—	19
31	—	—	20
31	—	—	24
31	—	—	26
31	—	—	31
	34	—	19
32	—	—	17
32	—	—	18
32	—	—	23
32	—	—	24
32	—	—	30
33	—	—	20
33	—	—	21

A	B	C	D
33	—	—	22
33	—	—	23
33	—	—	25
33	—	—	33
34	—	—	15
	52	—	24
34	—	—	18
34	—	—	19
34	—	—	23
34	—	—	23
34	—	—	28
34	—	—	28
	44	—	28
35	—	—	22
36	—	—	18
	41	—	20
36	—	—	---
	47	—	18

A	B	C	D
36	—	—	20
36	—	—	27
36	—	—	28
38	—	—	23
38	—	—	23
38	—	—	24
38	—	—	40 .W
39	—	—	21
39	—	—	24
39	—	—	50
	48	—	40
40	—	—	21
41	—	—	24
	53	—	29
58	—	—	25 .W
61	—	—	22

§. 114.

In dieser Tafel stellt nun A das Alter des Mannes zur Zeit der ersten, B zur Zeit der zweyten, C zur Zeit der dritten Vermählung. D aber das Alter der Frau vor. Wo dieses in den genealogischen Tabellen nicht angezeigt war, das ist hier durch --- bemerkt, und eben so ist durch W angezeigt, daß sie Wittwe gewesen. Man sieht, daß die Tabelle überhaupt nach dem Alter des

Mannes, jedes Fach aber nach dem Alter der ersten Frau angeordnet ist. Diese Anordnung, so wie die Tafel überhaupt, mag zu mehreren Speculationen Anlaß geben. Man sieht beym ersten Anblicke, daß das Alter der Frauen sich nicht sehr nach dem Alter des Mannes richtet, obgleich überhaupt betrachtet, jenes geringer ist. Man sieht ebenfalls leicht, das die ersten Ehen im 24sten und 25sten Jahre am zahlreichsten sind. Dieses mag wohl daher rühren, daß die Tabelle von solchen Personen hergenommen ist, die für die Erhaltung einer Familie nicht mehrere Jahre vorausſorgen müssen. Denn sonst würden die häufigsten ersten Ehen wohl 8 bis 10 Jahr später seyn. Aus gleichem Grunde hören die ersten Ehen gegen das 40ste Jahr so viel als ganz auf. Auch dieses würde um 10 und mehr Jahre später geschehen, wenn die Tafel sich nicht auf Personen vom Stande einschränkte, sondern sich so, wie die vom Deparcieux, auf alle Arten Leute erstreckte. (§. 87.)

§. 115.

Die Jahre des Alters in dieser Tabelle müssen, im Durchschnitte genommen, als volle Jahre angesehen werden, weil ich, um sie zu finden, schlechthin nur das Jahr der Geburt von dem Jahre der Vermählung abgezogen habe, ohne auf die Monate zu sehen, welches bald einige Monate mehr, bald auch einige weniger würde gegeben haben.

§. 116.

Ungeachtet nun die Tabelle sich auf Personen vom Stande so einschränkt, daß sie nicht allgemein ist, so werde ich dennoch den Gebrauch davon wenigstens in Form eines Beyspiels anzeigen. In dieser Absicht werde ich die ersten Ehen von Seiten der Mannspersonen besonders vornehmen, und ihre Anzahl mit dem Alter vergleichen. Es traten demnach

5	vor	ihrem	20sten	Jahre
45	- -		25	- -
81	- -		30	- -
110	- -		35	- -
123	- -		40	- -
125	- -		42	- -

ihre erste Ehe an.

§. 117.

Diese Zahlen gaben mir nun eine der Linie FEE (Fig. 5.) ganz ähnliche Linie (§. 87), woran jedoch, um sie so viel möglich regulär zu machen, die Ordinaten vom 18ten bis ins 30ste Jahr um etwas vermindert werden mußten. Vermittelst dieser Linie, die ich auf einem Quartblatt construirte, konnte ich nun mit Vermeydung der wegen allzugeringer Anzahl der Personen in der Tafel rückständigen Anomalien die in jedem

jedem Alter entstehenden Ehen in folgende Tafel bringen.

Alter	Ehen	Summe	Alter	Ehen	Summe
17	1	1	31	6	95
18	2	3	32	5	100
19	3	6	33	5	105
20	5	11	34	5	110
21	6	17	35	4	114
22	8	25	36	3	117
23	8	33	37	2	119
24	8	41	38	2	121
25	8	49	39	2	123
26	8	57	40	1	124
27	8	65	41	1	125
28	9	74	42	1	126
29	8	82	43	1	127
30	7	89			

§. 118.

Durch diese Abgleichung wird nun die zu den übrigen Jahren gar nicht proportionirte Anzahl der Ehen, so auf das 24ste und 25ste Jahr

Jahr des Alters fällt, dadurch vermieden, daß, was diese beyden Jahre zu viel hatten, auf die vorhergehenden und folgenden vertheilt wird. Auch fällt nun die gröste Anzahl der Ehen auf das 28ste Jahr, und dieses weicht von dem gemeinen Laufe der Natur ebenfalls weniger ab.

§. 119.

Das Alter bey den zweyten und dritten Ehen hängt von dem Tode der ersten und zweyten Frau ab, und hat in sofern kein bestimmtes Gesetz. Ich werde demnach das Alter der Frauen vornehmen. Von diesen verheyratheten sich

3 vor ihrem 15ten Jahre,
34 - - 20 - -
102 - - 25 - -
132 - - 30 - -
150 - - 34 - -

das erste mal. Nach diesen Zahlen construirte ich, so wie vorhin (§. 117), eine krumme Linie, um die in der Tafel rückständige Anomalien, die übrigens hier viel geringer sind, abzugleichen. Den Erfolg stellt nun folgende Tafel vor.

Alter	Ehen	Summe	Alter	Ehen	Summe
13	1	1	28	5	127
14	2	3	29	5	132
15	3	6	30	4	136
16	4	10	31	4	140
17	6	16	32	3	143
18	8	24	33	3	146
19	10	34	34	3	149
20	14	48	35	3	152
21	15	63	36	2	154
22	14	77	37	2	156
23	14	91	38	2	158
24	11	102	39	1	159
25	8	110	40	1	160
26	7	117	41	1	161
27	5	122	42	1	162

Es treffen also hier die zahlreichsten Ehen ins 21ste Jahr, und dieses kömmt mit dem, was wir aus des Deparcieux Tabelle gefunden haben (§. 90), sehr genau überein. Es ist auch weiter kein Grund, warum Frauenzimmer vom Stande hierin von der allgemeinen Regel abgehen sollten. Daß auch nach dem 40sten Jahre ihre erste Ehen selten werden, ist dem Laufe der Natur ebenfalls nicht zuwieder.

§. 120.

Es kommen übrigens in obiger Tafel (§. 113) in allem

127 erste Ehen,
32 zweyte,
6 dritte,
7 Wittwen

vor. Zu diesen 7 Wittwen müssen noch etwan 7 andere gerechnet werden, weil in der Tafel nur diejenigen angezeichnet sind, deren erste Ehegemahle in der Tafel nicht vorkommen. Wenn wir aber diesem zufolge die Anzahl auf 14 setzen, so scheint sie doch noch immer sehr geringe zu seyn, da sie nicht den neunten Theil von den ersten Ehen austrägt, und die Zahl der Wittwer über zweymal größer ist, da sie doch oben (§. 99) nicht viel größer gefunden worden. Ob der in adelichen Familien übliche Wittwensitz den Wittwen die Sorge, sich wieder nach einem Manne umzusehen, entbehrlich mache, oder immer genug Fräuleins vorräthig sind, oder ob in den genealogischen Tabellen die Wittwen nicht immer als solche angezeichnet worden, das werde ich hier dahin gestellt seyn lassen.

§. 121.

Aus der Tabelle des §. 117. findet sich das mittlere Alter der Mannspersonen zur Zeit ihrer ersten

ersten Vermählung von $27\frac{3}{4}$ Jahren, demnach trift es mit dem Alter der häufigsten ersten Ehen zusammen. (§. 118).

§. 122.

Hingegen ist für die, so sich zweymal verheyrathen, das mittlere Alter erster Ehe $26\frac{5}{8}$ Jahr, zweyter Ehe 41 Jahre.

§. 123.

Endlich für die, so sich dreymal verheyrathen, ist das mittlere Alter erster Ehe $21\frac{1}{2}$ Jahre, zweyter Ehe $41\frac{5}{8}$ Jahre, dritter Ehe 49 Jahre.

§. 124.

Das mittlere Alter der Frauen zur Zeit ihrer ersten Heyrath ist von 23 Jahren, und demnach wenig geringer als das von den Mannspersonen. Nimmt man die besonders heraus, die sich an Wittwer erster Ehe verheyrathet haben, so ist ihr mittleres Alter von $27\frac{1}{2}$ Jahren, und demnach um $4\frac{1}{2}$ Jahr größer. Hingegen ist das mittlere Alter der Wittwen von 38 Jahren. Ich muß übrigens nochmals erinnern, daß diese Bestimmungen nur als Beyspiele, nicht aber als Regeln anzusehen sind, theils weil sie nur auf Personen von Stande gehen, theils auch, weil sie aus einer nicht sehr großen Anzahl derselben hergeleitet sind.

VII. Die Tödlichkeit der Kinderblattern.

§. 125.

So viel seit einigen Jahren über diese Materie ist geschrieben und gestritten worden; so wenig hat man darüber vollständige Erfahrungen. Süßmilch führt auch weiter nicht viel anders an, als daß er aus verschiedenen Sterberegistern findet, daß von 1000 jährlich sterbenden 80 sind, die von den Pocken weggerafft werden, und daß von 300 und mehreren inoculirten kaum einer an den Pocken stirbt. Damit aber weiß man noch nichts von den besonderen Verhältnissen. Süßmilch sagt ferner, daß, da wenige oder keiner von den Pocken verschont bleiben, man setzen könne, daß unter 1000, die von den Pocken überfallen werden, 80 an denselben, demnach 2 von 25 sterben. Dis ist aber offenbar zu wenig. Denn von den 1000, die jährlich sterben, sind sehr viele, die die Blattern noch nicht gehabt haben. Man setze, deren Anzahl sey $= a$; so sind unter den 1000 jährlich sterbenden $1000 - a - 80$, die nach den bereits überstandenen Blattern sterben, und 80 sterben an den Blattern. Demnach von $1000 - a$, die von den Blattern ergriffen werden, sterben 80.

§. 126.

Nun ist a keine sehr kleine Zahl. Denn unter 1000 jährlich sterbenden sind 261 Kinder, die

die noch nicht ein Jahr alt sind, und von denen die meisten die Blattern noch nicht gehabt haben. Im zweyten Jahr des Alters sterben 61, und auch von diesen haben die meisten die Blattern noch nicht gehabt, weil die Blattern erst gegen das vierte Jahr mehrere Kinder anfallen. Es wird demnach a nicht viel geringer, sondern eher größer als 300 seyn. Und dieses macht, daß die Tödlichkeit der Blattern, anstatt nach Süßmilchen $\frac{2}{25}$ zu seyn, $\frac{1}{9}$ oder gar $\frac{1}{8}$ ist; so daß von 8 oder 9, die von den Blattern befallen werden, 1 stirbt.

§. 127.

Dieses ist aber noch sehr überhaupt gesagt. Indessen hat sich aus Ermangelung besonderer Erfahrungen Hr. D. Bernoulli bemüht, zu sehen, wiefern sich durch die Theorie etwas mehreres bestimmen lasse. Seine Rechnung ist ungefähr folgende. Von a gebohrnen seyen y, die das Alter τ erreichen. Unter diesen haben υ die Blattern bereits gehabt, η aber noch nicht. Dieses giebt erstlich

$$y = \upsilon + \eta.$$

In der Zeit $d\tau$ werde von den η der $\frac{1}{7}$ Theil von den Blattern angegriffen, demnach $\eta . d\tau : 7$, und von diesen sterbe der mte Theil, demnach $\eta\, d\tau : m7$. Da nun in allem dy sterben, so folgt,

folgt, daß die Anzahl derer, so in der Zeit $d\tau$ an andern Krankheiten sterben

$$= dy - \frac{\eta\, d\tau}{m\, 7}$$

ist. Um nun zu finden, wie viele unter diesen sind, die die Blattern noch nicht gehabt haben, so schließt Hr. B. daß sich y zu η wie $\left(dy - \frac{\eta\, d\tau}{m\, 7}\right)$ zu der zu findenden Zahl verhalte, und demnach in der Zeit $d\tau$ die Zahl

$$\frac{\eta}{y}\left(dy - \frac{\eta\, d\tau}{m\, 7}\right)$$

vor den Blattern sterbe. Um so viel wird demnach η in der Zeit $d\tau$ aus diesem Grunde vermindert. Es wird aber η noch um alle diejenigen vermindert, die in der Zeit $d\tau$ von den Blattern befallen werden, demnach um $\frac{\eta\, d\tau}{7}$. Dieses giebt also die Gleichung

$$d\eta = \frac{\eta}{y}\left(dy - \frac{\eta\, d\tau}{m 7}\right) + \frac{\eta\, d\tau}{7}$$

und daraus folgt

$$\frac{d\eta}{\eta} - \frac{dy}{y} = \frac{d\tau}{7}\left(1 - \frac{\eta}{ym}\right)$$

Und da sowohl $d\eta$ als dy müssen negativ genommen werden, so folgt hieraus

$$\frac{d(y:\eta)}{(y:\eta)\left(1 - \frac{\eta}{ym}\right)} = \frac{d\tau}{7}$$

oder
$$\frac{d\,(y:\eta)}{\frac{y}{\eta} - \frac{1}{m}} = \frac{d\tau}{7}$$

Setzt man nun hier m und 7 beständig, und für den Fall, wo $\tau = 0$ ist, $\eta = y$, so erhält man durch die Integration

$$\log.\left(\frac{y:\eta - 1:m}{1 - 1:m}\right) = \frac{x}{7}$$

oder
$$\log.\left(\frac{ym - \eta}{\eta m - \eta}\right) = \frac{x}{7}$$

Es sey $\log. e = 1$, so ist

$$\frac{ym - \eta}{\eta m - \eta} = e^{x:7}$$

demnach
$$\eta = \frac{my}{(m-1)e^{x:7} + 1}$$

§. 128.

Auf diese Art konnte nun die Formel, ungeachtet sie drey veränderliche Größen enthält, glücklich integrirt werden. Hr. Bernoulli erreichte auch dadurch seine Absicht, durch eine nach dieser Formel berechnete Tafel zu zeigen, wie sehr die eingeimpften Blattern unschädlicher sind, als die natürlichen. Dazu war es genug, für m und

und γ einen mittleren Werth anzunehmen, und denselben als beständig anzusehen. Hr. B. setzt überhaupt $m = \gamma = 8$.

§. 129.

Indessen scheint weder γ noch m beständig zu seyn. Kinder, die man vom dritten oder vierten Jahr an herumlaufen läßt, sind eben dadurch der Gefahr der Blattern mehr ausgesetzt als jüngere, die man noch wiegt, oder trägt, oder gängelt. Aus dieser Betrachtung scheint $1:\gamma$ mit den Jahren, wenigstens bis in ein gewisses Alter, größer zu werden. Denn γ ist in umgekehrter Verhältniß der Gefahr die Blattern zu kriegen. Mit dem m hat es eine andere Beschaffenheit. Denn $\frac{1}{m}$ stellt das Maaß der Gefahr vor, an den Blattern zu sterben, oder das Maaß der Tödlichkeit der Pocken. Nun richtet sich m so wie auch γ nach den Jahrgängen, weil die Blattern das eine Jahr gefährlicher oder böser und tödlicher sind, als das andere. Wir betrachten aber die beyden Werthe nur in Rücksicht auf das Alter, und da scheint $\frac{1}{m}$ in den ersten Jahren der Kindheit größer zu seyn, als wenn ein Kind bereits mehr Kräfte hat, wiewohl wenn die Kräfte noch größer werden, der Durchbruch der Blattern gehindert, und dadurch die Gefahr vergrössert wird.

§. 130.

§. 130.

Dieses läßt sich in Absicht auf die Werthe von m und γ überhaupt schließen. Die besonderen Bestimmungen müßten aus Erfahrungen gefunden werden. Von solchen Erfahrungen habe ich nur das wenige, was im dritten Bande der Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Zürich befindlich ist. Hr. Doctor Sulzer in Winterthur hat sich 1763 die Mühe genommen, die Kinder zu zählen, die an den natürlichen Blattern daselbst theils gestorben, theils davon gekommen. Von den meisten ist das Alter angegeben, und so habe ich aus seinem Verzeichniß folgendes Täfelchen ziehen können.

Alter. Jahre.	Kinder an Pocken z	starben davan v	kamen davon $z - v$
0	3	1	2
1	10	3	7
2	9	3	6
3	14	3	11
4	12	0	12
5	12	1	11
6	8	1	7
7	1	0	1
8	1	1	0
9	—	—	—
10	2	2	0
Summe	72	15	57

Eine

Eine solche Tafel sollte man nun freylich für mehrere Jahre und eine größere Anzahl von Kindern haben. Inzwischen sehen wir daraus überhaupt, daß unter 3 Jahren das $\frac{1}{3}$, im vierten Jahre $\frac{3}{14}$ an den Pocken gestorben, daß aber die, so das 4te, 5te, 6te Jahr überlebt hatten, meistens davon kamen; so wie hingegen die über 8 Jahr alt waren, meistens an den Pocken starben, so daß also $\frac{1}{m} = \frac{v}{z}$ anfangs $= \frac{1}{3}$ gewesen, nachgehends fast bis auf 0 abgenommen, endlich bis nahe zu 1 wieder angewachsen, demnach der Werth von m sehr veränderlich war. In Ansehung des Werthes von 7 läßt sich aus dieser Tafel unmittelbar nichts bestimmen.

§. 131.

Da aber die Zahlen dieser Tafel wegen der allzugeringen Anzahl von Beobachtungen noch zu viel irregulär sind; so werde ich noch eine andere beyfügen, wodurch besonders die Columne v berichtiget werden kann. Es ist ein Verzeichniß aller, die in Zeit von 15 Jahren im Haag an den Blattern, und zwar in jedem Jahre des Alters gestorben sind, daselbst durch den Druck bekannt gemacht worden. Dieses werde ich in folgender Tafel vorstellen.

Alter	Gestorben	Alter	Gestorben	Alter	Gestorben	Alter	Gestorben	Alter	Gestorben
1	172	11	11	21	3	31	4	41	0
2	170	12	14	22	9	32	0	42	1
3	179	13	9	23	2	33	3	43	0
4	224	14	4	24	4	34	2	44	1
5	160	15	9	25	6	35	1	45	1
6	148	16	4	26	7	36	3	46	0
7	114	17	3	27	2	37	2	47	0
8	78	18	6	28	2	38	1	48	0
9	58	19	3	29	3	39	2	49	2
10	23	20	1	30	0	40	0	+	4
Summa	1326		64		38		18		9

§. 132.

Hier ist nun die Summe von allen 1455 und demnach fast 100 mal größer als die in vorhergehender Tafel. Man sieht auch sogleich, daß die

die Zahlen in sehr ordentlicher Progreßion fortgehen, daß sie bis ins vierte Jahr wiewohl nicht viel zunehmen, von da an aber viel stärker abnehmen. Von den 1455 sind nur 129, die nach dem 10ten Jahr an den Blattern sterben. Nach dem 20sten Jahre sterben nur 65, nach dem 30sten Jahre nur 27, nach dem 40sten nur 9, und nach dem 50sten nur 4.

§. 133.

Setzen wir nun nach Süßmilch, daß die an den Blattern sterbende sich zu den überhaupt sterbenden wie 2 zu 25 verhalten, so müssen auf die 1455 der Tafel, so an den Blattern sterben, 18188 überhaupt sterben, und, wenn alles im Beharrungsstande ist, eben so viele gebohren werden. Demnach von 18188 neugebohrnen, sterben nach und nach 1455 an den Blattern weg, und die Zahlen vorstehender Tafel geben an, wie dieses Jahr für Jahr geschieht. Wie viel nun hingegen von 18188 jährlich überhaupt sterben, und noch überlebend bleiben, läßt sich vermittelst der allgemeinen Tafel der Sterblichkeit (§. 24) leicht finden. Es entsteht daher folgende Tafel.

Alter Jahre x	lebende y	sterben überhaupt	sterben an Blattern	sterben sonst	sterben künftig an den Blattern
0	18188	Δy	v	$\Delta y - v$	1455
1	13441	4747	172	4575	1283
2	12331	1110	170	941	1113
3	11713	618	179	439	934
4	11289	424	224	200	710
5	10982	307	160	147	550
6	10727	255	148	107	402
7	10516	211	114	97	288
8	10341	175	78	97	210
9	10196	145	58	87	152
10	10072	124	23	101	129
20	9319	773	64	709	65
30	8215	1094	38	1056	27
40	6799	1416	18	1398	9
50	5396	1403	5	1398	4
	0	5396	4	5392	0

§. 134.

In dieser Tafel sind nun die drey ersten Columnen nach der allgemeinen Tafel der Sterblichkeit (§. 24.) berechnet. Die vierte v enthält die Zahlen der nächst vorhergehenden Tafel, oder die im Haag angestellten Beobachtungen, wie viel nemlich jedes Jahr an den Blattern gestorben. Zieht man diese von den überhaupt sterbenden Δ y ab, so bleiben die $\Delta y - v$ der fünften Columne, welche jähr-

jährlich an andern Krankheiten sterben. Die sechste Columne enthält die Summen der Zahlen v von unten herauf addirt, und zeigt folglich, wie viele unter den jedesmal lebenden y sind, die künftig an den Blattern sterben werden.

§. 135.

Es fehlen nun bey dieser Tafel noch mehrere Columnen, die leicht würden können hinzugefügt werden, wenn in den Beobachtungen §. 130. auch diejenigen wären abgezählt worden, welche die Blattern in jedem Alter glücklich überstanden haben. Dieses ließ sich zwar nachholen, wenn man mit Hr. Bernoulli annehmen wollte, daß in jedem Alter gegen einen, der an den Blattern stirbt, 7 müssen gerechnet werden, die sie glücklich überstehen. Denn da dürfte man nur die Zahlen der vierten Columne mit $7+1=8$ multipliciren, um zu finden, wie viele jedes Jahr von den Blattern ergriffen werden.

§. 136.

Wir können inzwischen aus der Tafel des §. 132. das Gesetz der Sterblichkeit bestimmen, welches statt finden würde, wenn die Blattern gar nicht, oder wenigstens nicht tödtlich wären. In jedem Alter τ sterben von den y überlebenden in einem Jahre v an den Blattern, und $\Delta y-v$ an andern Krankheiten. Nun ist klar, daß, wenn die v nicht an den Blattern stürben, wenigstens einige davon während dem Jahre an andern Krankheiten sterben würden. Wir können nun hiebey die zween äußersten Fälle betrachten.

I

I. Man setze, daß alle die v gleich im Anfange des τ Jahres an den Pocken sterben; so bleiben in allem $y-v$, und von diesen sterben sodann $\Delta y-v$ an andern Krankheiten.

II. Man setze hingegen, daß die v zu Ende des τ Jahres an den Blattern sterben, so sind von der ganzen Anzahl y die $\Delta y-v$ bereits an andern Krankheiten gestorben. Wir müssen nun zwischen diesen beyden Fällen das Mittel nehmen, und demnach setzen, daß von $y-\frac{1}{2}v$, welche ihr τ Jahr anfangen, $\Delta y-v$ in dem τ Jahre an andern Krankheiten sterben, demnach $y-\frac{1}{2}v-\Delta y+v=y-\Delta y+\frac{1}{2}v$ das $(\tau+1)$te Jahr ihres Alters erreichen. Demnach vermindert sich ihre Anzahl in der Verhältniß von $y-\frac{1}{2}v$ zu $y-\Delta y+\frac{1}{2}v$, das ist, von $y-\frac{1}{2}v$ zu $y'+\frac{1}{2}v$. Denn $y-\Delta y=y'$ ist die Zahl, welche in der Tafel des vorhergehenden §. bey dem Jahr $\tau+1$ steht. Auf diese Art erhält man der Ordnung nach

$$\left(18188-\frac{172}{2}\right):\left(13441+\frac{172}{2}\right)=18188:13591$$

$$\left(13441-\frac{170}{2}\right):\left(12331+\frac{170}{2}\right)=13591:12676$$

$$\left(12331-\frac{179}{2}\right):\left(11713+\frac{179}{2}\right)=12676:12222$$

&c.

 §. 137.

§. 137.

Damit erhält man folgende Tafel, wie die 18188 neugebohrnen jährlich an der Zahl abnehmen, sowohl wenn die Blattern mit eingerechnet werden, als wenn man davon abstrahirt.

τ Jahre	y Lebende	Δy sterben	r leben	Δr sterben	r-y
0	18188		18188		0
1	13441	4747	13591	4597	150
2	12331	1110	12676	915	345
3	11713	618	12222	454	509
4	11289	424	12012	210	723
5	10982	307	11769	243	787
6	10727	255	11577	192	850
7	10516	211	11472	105	956
8	10341	175	11366	106	1025
9	10196	145	11271	95	1075
10	10072	124	11158	113	1086
20	9319	773	10392	766	1073
30	8215	1094	9200	1192	985
40	6799	1416	7633	1567	834
50	5396	1403	6063	1570	667
—	0	5396	0	6063	0

Hier zeigt nun die Columne y die Abnahme der 18188 neugebohrnen im Zustande der Blattern an. Hingegen zeigt die Columne r, wie sie sich der Zahl nach vermindern würden, wenn die Blat-

tern entweder gar nicht, oder wenigstens nicht tödlich wären. Der Vortheil dieses letzteren Zustandes erhellet aus der Columne r − y. Man sieht, daß er bereits im achten Jahr bis auf 10 pro Cent anwächst, und nachgehends noch um etwas größer wird, weil selbst im 50sten Jahre anstatt der 5396 nach dem gemeinen Zustande 6063 bey Leben bleiben würden, wenn die Blattern nicht tödlich wären. Uebrigens ist bey dieser Tafel überhaupt

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta y - \upsilon}{y - \frac{1}{2}\upsilon}$$

§. 138.

Weiter läßt sich nun aus den im Haag angestellten und vorhin angeführten Beobachtungen (§. 130) nicht viel schließen. Denn daß z. E. im 4, 5, 6 und 7ten Jahre des Alters mehr Kinder an den Blattern als an andern Krankheiten sterben, läßt sich aus den Columnen υ und $\Delta y - \upsilon$ der Tafel §. 132. ohne Mühe ersehen. Man würde aber ungleich mehr besondere Umstände bestimmen können, wenn die Werthe von 7 und m, oder wenigstens das Verhältniß zwischen beyden für jedes Alter bekannt wäre. Man weiß aber, wenigstens so viel mir bekannt ist, nur so viel, daß von 7, oder wie es Hr. Bernoulli annimmt von 8, die von den Blattern befallen werden, eines stirbt, und demnach der mittlere Werth von m = 7 oder = 8 ist.

§. 139.

Inzwischen kann man leicht so viel einsehen, daß die Werthe von 7 und m sehr veränderlich sind. Bey vielen Kindern entstehen die Blattern von selbst, bey den meisten aber durch die Mittheilung, weil, wenn die Blattern einmal anfangen, die meisten Kinder, so sie noch nicht gehabt haben, davon ergriffen werden, dafern man nicht alle Sorgfalt gebraucht, dieses zu vermeiden. Der Werth von 7 hängt demnach gewissermaßen von dieser Sorgfalt ab, und in sofern kann derselbe nicht überhaupt bestimmt werden. Indessen ist allerdings eine solche Sorgfalt bey Kindern, die man noch warten muß, leichter und möglicher, als bey andern, die herumlaufen, und sehr oft den Anfall der Blattern mit nach Hause bringen. Der Werth von m hängt sehr viel von der Pflege der Kinder und der Geschicklichkeit des Arztes ab. Beydes scheint in den ersten Jahren des Lebens schwerer zu seyn, als wenn die Kinder bereits mehrere Kräfte haben, und reden können.

§. 140.

Könnte man nun von solchen meistens äusserlichen Umständen, wohin auch die Verschiedenheit der Länder und Lebensarten gehört, abstrahiren, so würde man so ziemlich schließen können, daß je mehr die Blattern die Kinder anfallen, desto mehrere auch daran sterben, und demnach τ zu m ein beständiges Verhältniß habe. Es

Es lassen sich aber bemeldte Umstände nicht wohl bey Seite setzen. Da sie nun sehr veränderlich sind; so lassen sich die Werthe von 7 und m ebenfalls nicht in sehr enge Schranken einschließen.

§. 141.

Dieses macht nun, daß ich, wenigstens in Form eines Beyspieles und um die Methode zu erläutern, das in vorstehenden Tabellen noch mangelnde nachholen werde, so viel es nemlich die 10 ersten Jahre des Alters betrift. Diesemnach setze ich, um die Tafel des §. 130 vollständiger zu machen, folgendes:

T Alter Jahre	Z Kinder, so die Blattern kriegen	V Kinder, so an den Blattern sterben	Z-V Kinder, so sie überstehen
1	460	171	289
2	750	181	569
3	1160	194	966
4	1520	193	1327
5	1690	181	1509
6	1610	157	1453
7	1160	124	1036
8	750	91	659
9	400	62	338
10	190	39	151
&c.	&c.	&c.	&c.
Summe	9690	1393	8297

 §. 142.

§. 142.

Hier ist nun die dritte Columne von den Zahlen, so die Erfahrung (§. 130.) angegeben, nur in sofern verschieden, daß sie regulärer gemacht worden. Die Zahlen der zwoten Columne habe ich verschiedenen Betrachtungen gemäß zu bestimmen gesucht. Die erste war, daß die Summe dieser Zahlen ungefähr siebenmal größer seyn sollte, als die Summe der dritten Columne. Sodann habe ich die Sulzerschen Beobachtungen (§. 129.) zu Rathe gezogen, um die Veränderlichkeit des Werthes von m so viel möglich darnach einzurichten, und bey den Zahlen der zweyten Columne eine etwas reguläre Progreßion zu beobachten. Die Zahlen der vierten Columne sind der Unterschied zwischen den Zahlen der ersten und zweyten, so wie es die Ueberschrift z - v an sich schon anzeigt. Diese Columne hat demnach mit der zweyten gleichen Grad von Willkührlichkeit. Da ich sie aber nur in Form eines Beyspieles gebrauchen werde, so hat in dieser Absicht das Ungewisse oder Unzuverläßige dabey nichts zu sagen, ungeachtet ich die damit vorzunehmende Rechnung lieber machen würde, wenn diese beyden Columnen durchaus und genau nach einer großen Anzahl von Erfahrungen hätten bestimmt werden können. Die Rechnung ist inzwischen folgende.

§. 143.

Erstlich können wir sehen, wie viele von 18188 neugebohrnen Kindern nach jedem Jahre noch leben, die die Blattern noch nicht gehabt haben. Dazu werden wir die Columne (z - v) des §. 140. und die beyden Columnen r, Δr des §. 136. folgendermaßen gebrauchen können. Zu Anfang eines beliebigen Jahres r setze man die Anzahl der noch lebenden Kinder, so die Blattern bereits überstanden, = w. Diese sterben in Zeit von einem Jahre in der Verhältniß von r zu r — Δr weg, so daß zu Ende des Jahres noch

$$w\left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right)$$

bey Leben bleiben.

§. 144.

Es kommen aber in eben dem Jahre noch (z — v) neue hinzu, welche die Blattern in demselben überstehen. Da man nun, um ein Mittel zu treffen, setzen muß, daß diese in der Mitte des Jahres die Blattern überstehen; so wird ihre Anzahl bis zu Ende des Jahres durch andere Krankheiten in der Verhältniß von r zu $\left(r - \frac{\Delta r}{2r}\right)$ vermindert, und ist demnach nur

$$(z - v).\left(1 - \frac{\Delta r}{2r}\right)$$

§. 145.

Werden nun diese beyden Zahlen in eine Sum-

Summe gezogen, so folgt, daß zu Anfang des $(\tau+1)$ Jahres

$$w' = w - w.\frac{\Delta r}{r} + (z - v) - (z - v)\frac{\Delta r}{2r}$$

Kinder nach bereits überstandenen Blattern noch am Leben sind. Auf diese Art läßt sich die Anzahl derer, so in jedem Jahre nach bereits überstandenen Blattern noch leben, von Jahr zu Jahr berechnen. Zieht man sie von den überhaupt noch lebenden y ab, so bleibt $y - w = \eta$, die Anzahl derer, so in jedem Alter die Blattern noch nicht gehabt haben. Zieht man ferner von jeder Zahl η die nächstfolgende ab, so bleiben $\Delta\eta$, und dieser Unterschied zeigt, um wie viele diejenigen, so die Blattern noch nicht hatten, in jedem Jahre, es sey durch den Tod oder dadurch, daß sie die Blattern kriegen, vermindert werden. Zieht man ferner von diesen $\Delta\eta$ alle die ab, so jährlich die Blattern kriegen, sie mögen daran sterben oder nicht; so bleiben die $\Delta\eta - z$, welche vor den Blattern sterben. Werden endlich auch diese von den $\Delta y - v$ abgezogen, so bleiben diejenigen, so jährlich nach bereits überstandenen Blattern sterben, und diese Zahl wird

$$= \left(w + \frac{z - v}{2}\right).\frac{\Delta r}{r}$$

seyn, und mit derjenigen, so man, um die w zu finden, für jedes Jahr bereits hat berechnen müssen, zusammen treffen.

§. 146.

§. 146.

Nach diesen Angaben habe ich nun folgende Tafel berechnet, und dabey, um $\Delta y - v$ zu finden, die im §. 140. angegebenen v gebraucht.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
τ	y	w	$y - w = \eta$	$\Delta\eta$	z	$\Delta\eta - z$	$\Delta y - v$	$\Delta y - v - \Delta\eta + z$	v
Alter	leben in allem	überstehen die Blattern	leben vor den Blattern	sterben ab	kriegen die Blattern	sterben vor den Blattern	sterben an andern Krankheiten überhaupt	sterben nach den Blattern	sterben an den Blattern
0	18188		18188						
1	13441	253	13188	5000	460	4540	4576	36	171
2	12331	792	11539	1649	750	899	929	30	181
3	11713	1712	10001	1538	1160	378	424	46	194
4	11289	2999	8290	1711	1520	191	231	40	193
5	10982	4432	6550	1740	1690	50	126	76	181
6	10727	5801	4926	1624	1610	14	98	84	157
7	10516	6779	3737	1189	1160	29	87	58	124
8	10341	7373	2968	769	750	19	84	65	91
9	10196	7640	2556	412	400	12	83	71	62
10	10072	7713	2359	197	190	7	85	78	39
&c.									

Ich

Ich werde nun nochmals wiederholen, was bereits (§. 141) erinnert worden, daß diese Tafel nur als ein Beyspiel anzusehen ist, wodurch die Berechnungsart derselben erläutert wird. Ich habe sie deswegen auch nicht weiter fortgesetzt. Wer also die zu genaueren Berechnungen erforderlichen Erfahrungen sammeln will, wird leicht im Stande seyn, eine solche Tafel daraus herzuleiten, die die gehörige Zuverläßigkeit haben wird.

§. 147.

Inzwischen bis dieses etwan geschieht, habe ich für die ersten 10 Jahre noch eine solche Tafel berechnet, und dabey, so wie es Hr. D. Bernoulli gethan, $7 = m$ gesetzt. Dieses geschahe um den Unterschied des Erfolges zu sehen. Da ich ferner hiebey die jährlich an den Blattern sterbenden v so annehmen konnte, wie sie in der dritten Columne der Tafel (§. 140) aus der Erfahrung hergeleitet waren, so hatte ich auch nicht nöthig, für 7 und m einen willkührlichen oder mittleren Werth anzunehmen, wie es Hr. B. gethan, sondern alles konnte mittelst der bloßen Voraussetzung $7 = m$ bestimmt werden.

§. 148.

Um dieses zu erläutern, wird es genug seyn, zu zeigen, wie, wenn man η für ein gegebenes Jahr τ weis, der Werth von η für das nächstfolgende Jahr gefunden werden könne. Denn für den Anfang des ersten Jahres ist $\eta = y = 18188$. Und so läßt sich dann η für jede folgende Jahre finden.

§. 149.

§. 149.

Da demnach in jedem Jahre τ die Anzahl der an den Blattern sterbenden $= v$ ist; so findet man die Anzahl derer, so in eben dem Jahre die Blattern kriegen,

$$z = mv$$

und die Anzahl derer, so sie zu Anfang des Jahres noch nicht gehabt haben,

$$\eta = 7z = 7mv = mmv$$

demnach

$$m = \sqrt{(\eta : v)}$$

und

$$z = mv = \sqrt{(\eta v)}$$

so daß also z die mittlere Proportionalzahl zwischen η und v ist, und weil v bekannt ist (§. 140), η aber als bereits aus den vorhergehenden Jahren berechnet anzusehen ist, so kann auch hiedurch z berechnet werden. Da nun ferner $w = y - \eta$ für jedes Jahr auch bekannt ist, so läßt sich w für das nächstfolgende Jahr nach der Formel des §. 144.

$$w' = w + (z - v) - \left(w + \frac{z - v}{2}\right) \cdot \frac{\Delta r}{r}$$

und damit auch

$$\eta' = y' - w'$$

finden.

§. 150.

§. 150.

Auf diese Art entstund nun folgende Tafel, die mit der vorhergehenden einerley Columnen hat.

τ	y	w	y-w=η	Δη	z	Δη—z	Δy—v	Δy—v-Δη+z	v
0	18188		18188						
1	13441	1391	12050	6138	1764	4374	4576	202	171
2	12331	2550	9781	2269	1477	792	929	137	181
3	11713	3621	8092	1689	1378	311	424	113	194
4	11289	4606	6683	1409	1250	159	231	72	193
5	10982	5423	5559	1124	1100	24	126	102	181
6	10727	6105	4622	937	934	3	98	95	157
7	10516	6680	3836	786	757	29	87	58	124
8	10341	7116	3225	611	591	20	84	64	91
9	10196	7440	2756	469	447	22	83	61	62
10	10072	7653	2419	337	328	9	85	76	39

§. 151.

§. 151.

Die Unterschiede dieser Tafel von der vorhergehenden rühren nun fürnehmlich von den Zahlen z her. Diese sind hier gleich anfangs am grösten, anstatt daß sie in vorhergehender Tafel im vierten, fünften und sechsten Jahre des Alters am grösten waren. Dieses macht auch, daß in den ersten Jahren die Zahlen w, η in beyden Tafeln sehr beträchtlich verschieden sind. Indessen kommen sie einander in den folgenden Jahren immer näher, so daß sie im 10ten Jahre wenig mehr verschieden sind. Man kann also nach beyden Rechnungen setzen, daß von allen 10jährigen Kindern der vierte Theil die Blattern noch nicht gehabt hat.

§. 152.

Da nun ferner bey der letzten Tafel

$$\zeta = m = \eta : z$$

ist, so findet sich für

$\tau = 1$	$\zeta = m =$	$\frac{18188}{1764}$	$= 10,\ 3$
2	- - -	$\frac{12050}{1477}$	$= 8,\ 1$
3	- - -	$\frac{9781}{1378}$	$= 7,\ 1$
4	- - -	$\frac{8092}{1250}$	$= 6,\ 5$
5	- - -	$\frac{6683}{1100}$	$= 6,\ 0$

&c.

Diese Verhältnisse kommen nun wenigstens mit den Sulzerschen Erfahrungen (§. 129) nicht sonderlich überein, wo in den ersten drey Jahren von 22 Kindern, die von den Pocken angegriffen sen worden, 7 starben, demnach $m = \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$ war, anstatt daß hier, wenn man von den 3 ersten Werthen des m das Mittel nimmt, $m = 8\frac{1}{2}$ ist. Damit geht es nun allerdings nicht an, durchaus $7 = m$ zu setzen. Dieses findet nur in demjenigen Alter statt, wo die Gefahr von den Blattern befallen zu werden, eben so groß ist, als die Gefahr an denselben zu sterben. Nach der vorhergehenden Tafel geschieht dieses gegen das vierte Jahr, und dieses hat gar keine Unwahrscheinlichkeit. Hinwiederum ist es sehr unwahrscheinlich, daß der letzten Tafel zufolge von 10 Kindern im ersten Jahre 1 an den Blattern darnieder liegen sollte, nach der vorhergehenden Tafel aber viel wahrscheinlicher, daß kaum von 40 eines von den Blattern ergriffen wird. Man glaubt, daß überhaupt die Materie zu den Blattern bey den Kindern vorerst reif werden müsse, wenigstens wenn sie von selbst ausbrechen soll. Dazu sind 1 oder 2 Jahre selten hinreichend. Und gewöhnlich geschieht es erst, wenn das Leben der Kinder durch das Naschen und Herumlaufen unordentlicher wird, als es in den ersten 2 Jahren ist. Daß endlich Kinder, ehe sie herumlaufen können, sorgfältiger vor dem Anstecken bewahret werden, ist bereits angemerkt worden, und an sich leicht zu begreifen. Ich schließe demnach aus allem, daß in den ersten Jahren die vorhergehende Tafel dem Wahren ungleich näher kömmt, als die letztere. Vom 7ten bis ins 10te Jahr sind beyde nicht viel von ein-

einander verschieden. Nehme ich nun noch mit, daß das 4, 5 und 6te Jahr den sich bey den ersten Jahren äußernden Unterschied der zweyten Tafel wieder gut machen mußten; so fällt der Vorzug immer ganz auf die erstere Tafel, wiewohl auch diese noch durch mehrere Erfahrungen ganz zu berichtigen seyn wird.

§. 153.

Ich werde nun noch einen kleinen Beweis nachholen müssen, welcher die Zahlen der nach den Blattern sterbenden betrift. Vorhin merkte ich an, daß diese Zahlen sowohl mittelst der Formel

$$(\Delta y - v) - (\Delta \eta - z)$$

als durch die Formel

$$\left(w + \frac{z - v}{2}\right) \cdot \frac{\Delta r}{r}$$

gefunden werden (§. 145). Dieses erhellet aus der Formel

$$w' = w - w \cdot \frac{\Delta r}{} + (z - v) - (z - v)\frac{\Delta r}{2r}$$

(§. cit.) folgendermaßen. Man verwandle diese letztere Formel durch eine leichte Reduction in

$$w' - w = (z - v) - \left(w + \frac{z - v}{2}\right) \cdot \frac{\Delta r}{r}$$

Da nun $w = y - \eta$

so ist, wenn man die Differenzen nimmt,

$$\Delta w = \Delta y - \Delta \eta$$

Da nun $\Delta w = w' - w$

so folgt, daß auch $w' - w = \Delta y - \Delta \eta$

 dem-

demnach

$$\Delta y - \Delta \eta = (z - v) - \left(w + \frac{z - v}{2}\right) \cdot \frac{\Delta r}{r}$$

sey. Und hieraus folgt durch eine bloße Versetzung

$$-\Delta y - v + \Delta \eta + z = \left(w + \frac{z - v}{2}\right) \cdot \frac{\Delta r}{r}$$

Es sind aber, weil y und η abnehmende Grössen sind, Δy und $\Delta \eta$ verneinend, und demnach muß, wenn man diese Differenzen als bejaht ansehen will, wie es vorhin geschehen, eigentlich

$$\Delta y - v - \Delta \eta + z = \left(w + \frac{z - v}{2}\right) \cdot \frac{\Delta r}{r}$$

genommen werden. Daraus folgt nun übrigens weiter nichts, als daß z durch η und $\Delta \eta$ vermittelst der Zahlen y, Δy, v, r, Δr bestimmt wird, wenn man $y - \eta$ für w setzt. Uebrigens sind auch hier sowohl z als v Differenzen, so daß man

$$z = \Delta \zeta$$
$$v = \Delta u$$

setzen, und damit die Differentialformel

$$\Delta y - \Delta \eta - \Delta v + \Delta \zeta = \left(y - \eta + \frac{\Delta \zeta - \Delta v}{2}\right) \frac{d\,r}{r}$$

erlangen kann. Man kann sie, wenn man wiederum

$$y - \eta = w$$

und

$$\Delta z - \Delta v = \Delta q$$

setzt, in folgende einfachere

$$\Delta w = \Delta q - \left(w + \frac{\Delta q}{2}\right) \frac{\Delta r}{r}$$

ver-

verwandeln. Es ist aber mit dem Integriren nicht viel anzufangen.

§. 154.

In der Tafel (§. 146.) können noch verschiedene Columnen mit einander verglichen werden. So z. E. giebt die dritte Columne an, wie viele in jedem Alter die Blattern bereits überstanden haben, die neunte aber, wie viele von diesen jährlich sterben. Hieraus ließe sich finden, von wie vielen derselben jährlich einer stirbt. Es ist aber zu merken, daß in der dritten Columne die zu Anfang eines jeden Jahres lebende angegeben, in der neunten Columne aber unter den sterbenden auch diejenigen mitgerechnet worden sind, welche in dem Verlaufe des Jahres die Blattern überleben, und noch vor dem Ende des Jahres an andern Krankheiten und Zufällen sterben. Die verlangte Verhältniß muß demnach aus der Tafel des §. 137. berechnet werden, weil sie $= r : \Delta r$ ist.

§. 155.

Hingegen läßt sich in der Tafel des §. 146. die vierte Columne ganz wohl mit der 7ten und 10ten vergleichen. Erstere giebt an, wie viele zu Anfang eines jeden Jahres die Blattern noch nicht gehabt haben. Die 7te zeigt, wie viele davon in dem Verlaufe des Jahres, ohne die Blattern zu kriegen, sterben. Endlich zeigt die 10te Columne, wie viele davon an den Blat-

tern

tern sterben. Solche Vergleichungen geben nun noch folgende Tabelle.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
r	$\frac{y}{\Delta y}$	$\frac{r}{\Delta r}$	$\frac{\eta}{\Delta\eta - z}$	$\frac{\eta}{\upsilon}$	$\frac{\eta}{\Delta\eta - z + \upsilon}$	$\frac{\eta}{z} = 7$	$\frac{z}{\upsilon} = m$
Alter	Ueberhaupt stirbt eines von	Nach den Blattern stirbt eines von	Vor dē Blattern stirbt an andern Zufällen eines von	An den Blattern stirbt eines von	Vor den Blattern stirbt überhaupt eines von	Es kriegt die Blattern eines von	Unter denen, so die Blattern kriegen, stirbt eines von
1	4	4	4	106	4	39	3
2	12	15	15	73	12	18	4
3	20	28	35	60	20	10	6
4	27	58	53	52	26	7	8
5	37	49	166	46	36	5	9
6	43	61	468	42	38	4	10
7	51	110	170	40	32	4	9
8	60	108	197	41	34	5	8
9	71	120	247	48	40	7	7
10	82	99	365	65	56	13	5
&c.							

§. 156.

§. 156.

Diese Tafel, welche ich ebenfalls nur in Form eines Beyspiels hersetze, zeigt nun die Gefahr der Blattern und die Gefahr der Sterblichkeit sowohl überhaupt als besonders in Rücksicht auf die Blattern. Die über jede Columnen gesetzte Ausdrücke zeigen, wie die Zahlen zu verstehen sind. Ich werde sie indessen noch durch das Beyspiel des fünften Jahres erläutern. Demnach von Kindern, die zwischen 4 und 5 Jahr alt sind,

Col. II. stirbt in dem Jahre überhaupt eines von 37.

Col. III. Wenn die Blattern gar nicht, oder wenigstens nicht tödlich wären, so würde 1 von 49 sterben.

Col. IV. Werden nur die Kinder genommen, so die Blattern noch nicht gehabt haben, so stirbt von 166, so ihr viertes Jahr antreten, eines an andern Krankheiten, ohne die Blattern zu kriegen.

Col. V. Von eben denselben aber stirbt von 46 eines an den Blattern.

Col. VI. Hingegen von eben denselben, an Blattern und andern Krankheiten ohne Unterschied, eines von 36.

Col. VII. Von eben denselben wird im vierten Jahre eines von 5 von den Blattern befallen.

Col. VIII. Von diesen aber, so im vierten Jahr die Blattern haben, stirbt von 9 eines an den Blattern.

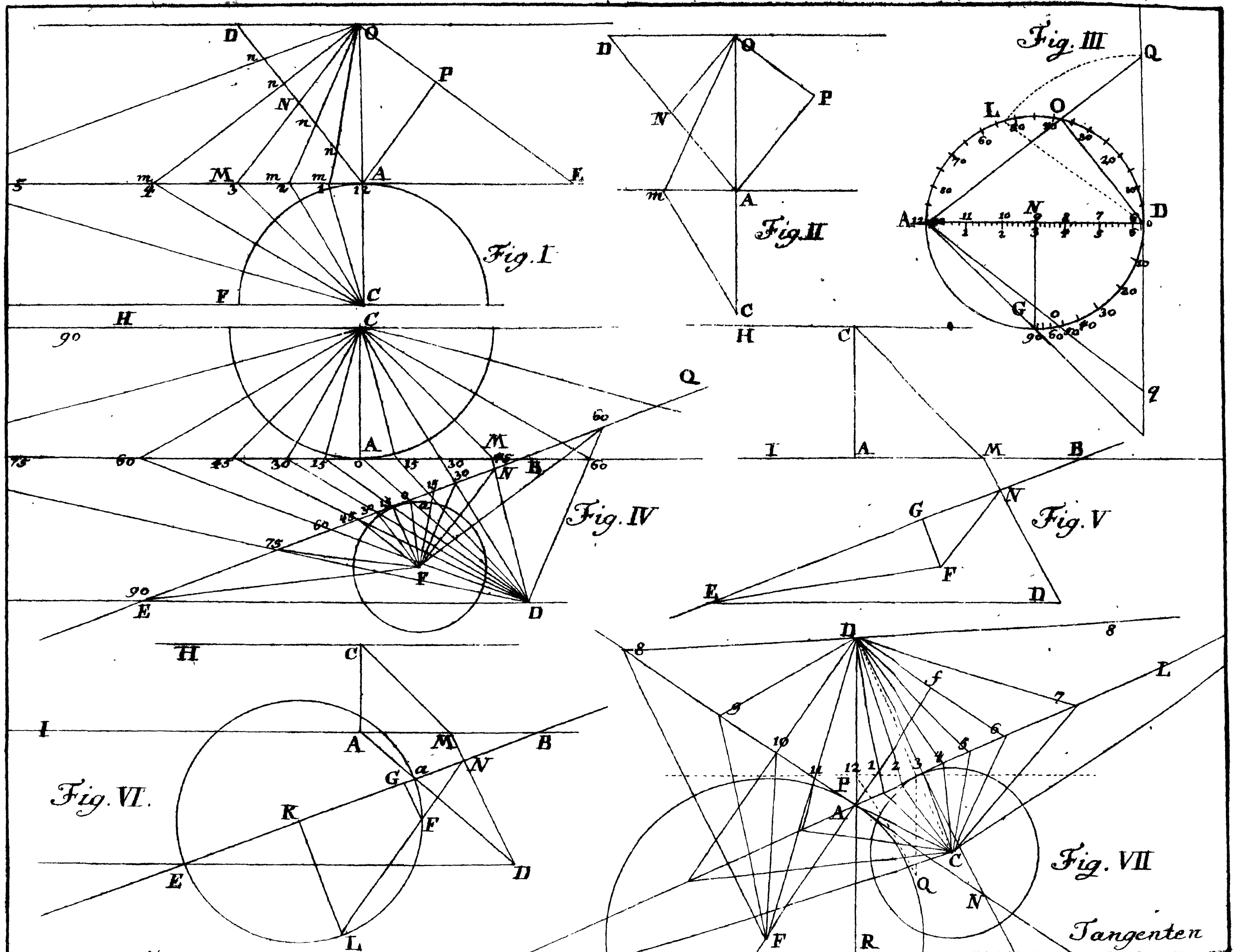
Col. III. Und von denen, so im vierten Jahre die Blattern überstehen, stirbt in eben dem vierten Jahre eines von zweymal 49 oder 98. (§. 147.)

§. 157.

Die Zahlen der Tafel sind durchaus in umgekehrter Verhältniß der Gefahr, oder in gerader Verhältniß der Sicherheit. Aus Vergleichung der dritten und sechsten Columne sieht man, wie viel die Kinder nach überstandenen Blattern vor dem Tode mehr gesichert sind, da die Zahlen der dritten viel schneller anwachsen, als die von der sechsten. Vergleicht man die dritte und fünfte Columne, so findet sichs, daß schon vom vierten Jahre an die Blattern allein tödlicher sind, als nach überstandenen Blattern jede andere Krankheiten zusammengenommen. Aus der vierten Columne erhellet, daß die Gefahr vor den Blattern an andern Krankheiten zu sterben vom ersten Jahre an sehr schnell abnimmt, da die Zahlen dieser Columnen am schnellesten zunehmen. Man sollte daraus schließen, daß überhaupt die Kinder, die in den ersten Lebensjahren die Blattern weder von selbst noch von andern kriegen, eine bessere Natur haben, da sie so wie von den Blattern also auch von andern tödlichen Krankheiten mehr verschont bleiben, und daß hingegen Kinder, welche die Blattern leicht kriegen, mehrentheils auch andern tödlichen Krankheiten mehr unterworfen sind. Denn die Zahlen der dritten Columne sind überhaupt viel kleiner als die von der vierten. Sollten hieran die Blattern selbst schuld seyn, so würde man dabey gewinnen, wenn man die Kinder in den ersten sechs Jahren so viel möglich vor den Blattern zu bewahren suchte, und zugleich würde es sich, wie in vielen andern Absichten, der Mühe lohnen, durch Erfahrungen zu bestimmen, ob der Erfolg in Absicht auf die inoculirte Blattern anders ist. Aus der fünften Columne erhellet, daß vom vierten bis ins neunte Jahr die Gefahr an den Blattern zu sterben ungefehr gleichgroß ist. Uebrigens erwarten alle diese Betrachtungen von umständlicheren und mehreren Erfahrungen ihre genauere Berichtigung, und dienen in dieser Absicht nur zu vorläufigen Anleitung. Aehnliche Erfahrungen und Betrachtungen verdienten auch die Masern. Denn so viel ich aus der letzten dem Süßmilchischen Werke angehängten Tabelle sehe, sind sie 1746 zu Berlin kaum um $\frac{1}{3}$ weniger tödlich gewesen, als die Pocken, da diese 186, jene 119 Kinder ins Grab legten.

Bericht an den Buchbinder.

Die zwo Tafeln zum §. 97. der Landcharten werden so eingetheilt, daß sie die gedruckte Seiten gegen einander kehren, damit man sie beym Lesen zugleich neben einander sehen kann. Die übrigen Tafeln werden bey den auf denselben angezeigten §. §. dergestalt eingeheftet, daß die gedruckte Seite gegen das Ende des Buches gekehrt sey. An den zwo Tafeln, die in Folio sind, kann das überflüßige Papier oben, unten und vornen weggeschnitten werden, so wie auch an der letzten Tafel, so zum §. 24. der Sterblichkeit gehört. Die Kupferplatten kommen sämmtlich am Ende, und werden an weißes Papier geleimt, damit sie herausgeschlagen werden können.



Tangenten
Tab. I

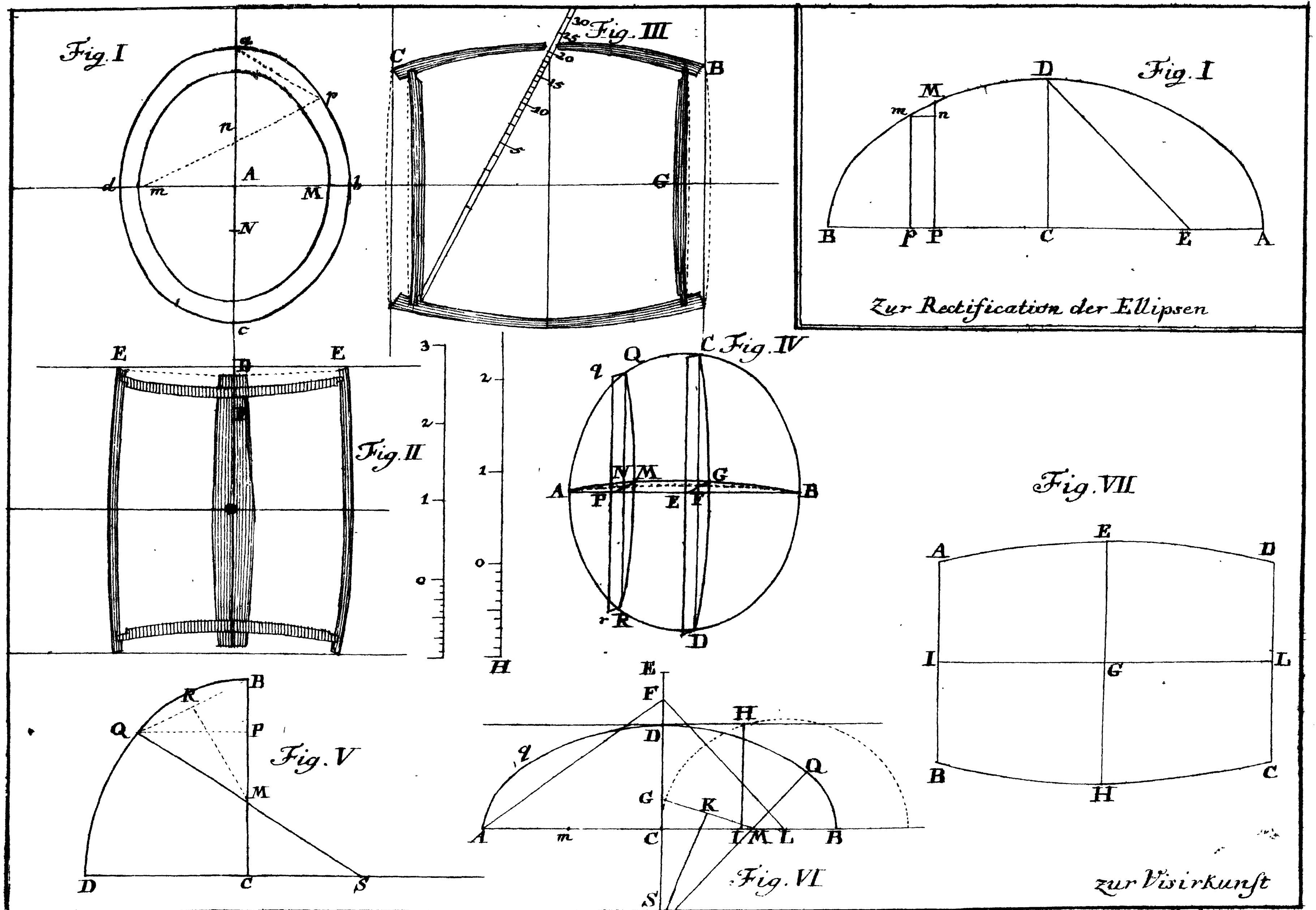


Fig. I
Fig. III
Fig. I
Zur Rectification der Ellipsen
Fig. II
Fig. IV
Fig. VII
Fig. V
Fig. VI
zur Visirkunst

Tab. II

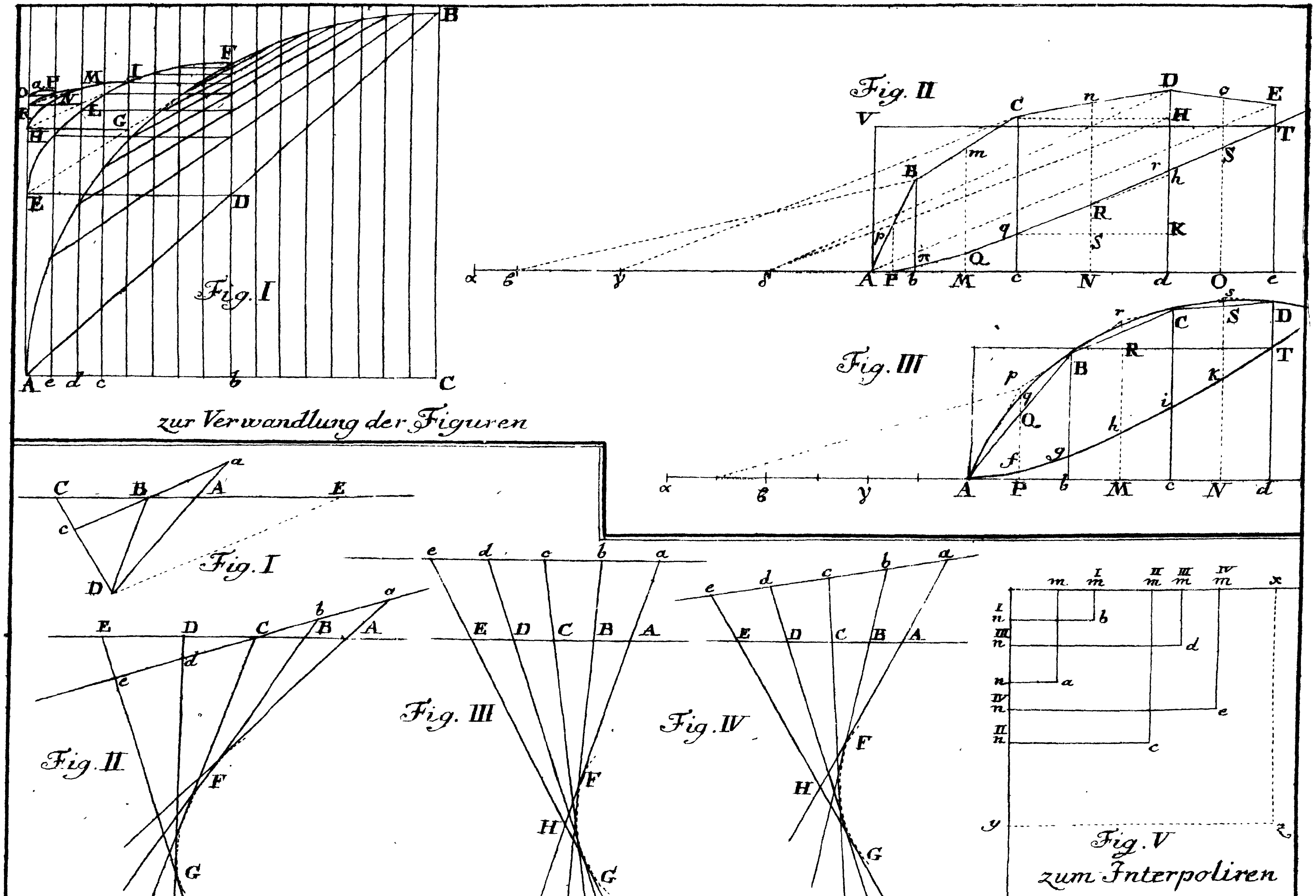


Fig. I
zur Verwandlung der Figuren
Fig. II
Fig. III
Fig. I
Fig. II
Fig. III
Fig. IV
Fig. V
zum Interpoliren

Tab. III

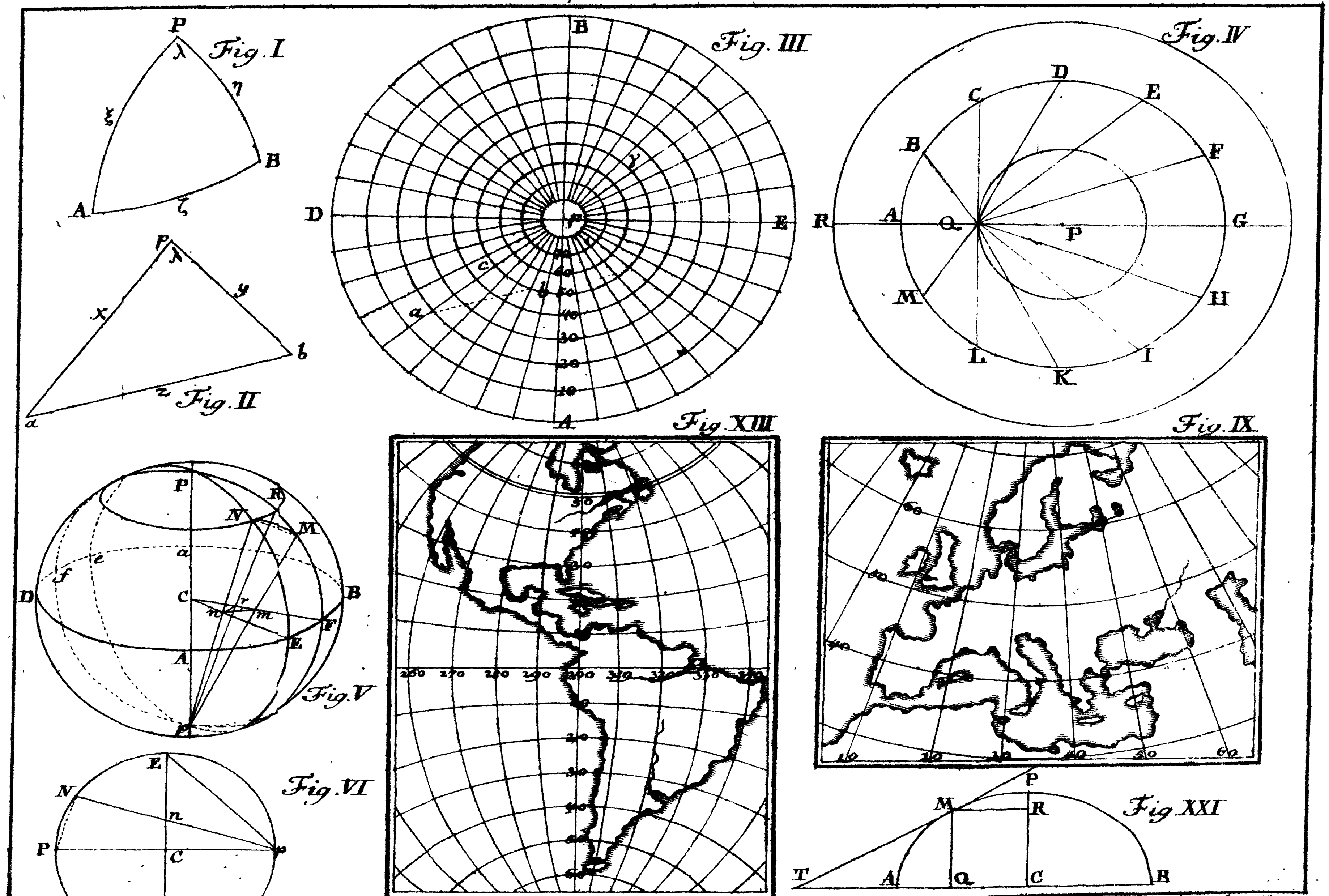


Fig. I
Fig. II
Fig. III
Fig. IV
Fig. V
Fig. VI
Fig. IX
Fig. XIII
Fig. XXI
260 270 280 290 300 310 320 330 340
10 20 30 40 50 60

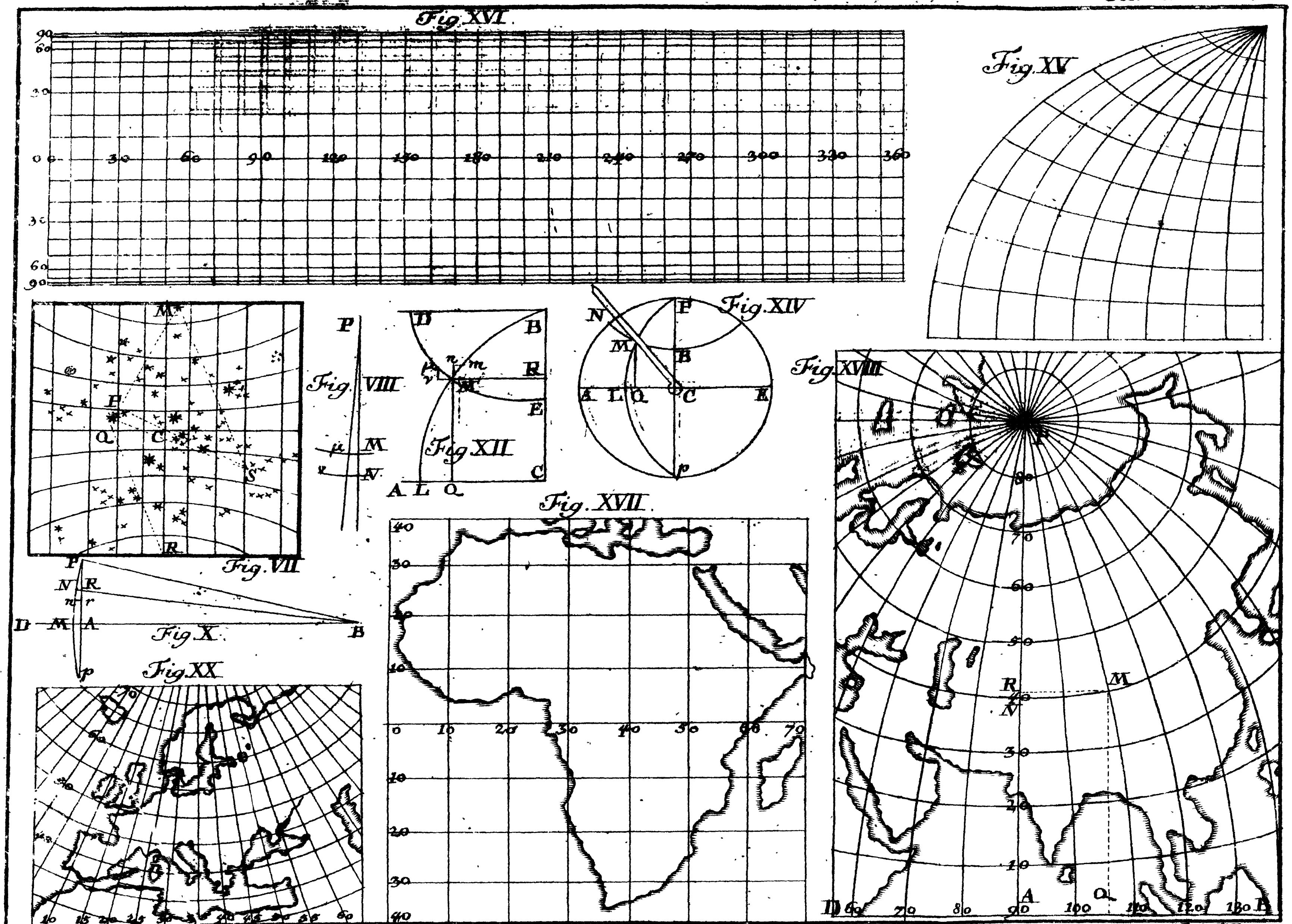


Fig. XVI
90
60
30
0
30
60
90
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
330
360
Fig. XV
Fig. VII
Fig. VIII
Fig. XII
Fig. XIV
Fig. XVIII
Fig. X
Fig. XX
Fig. XVII

Tab. V

Fig XI.

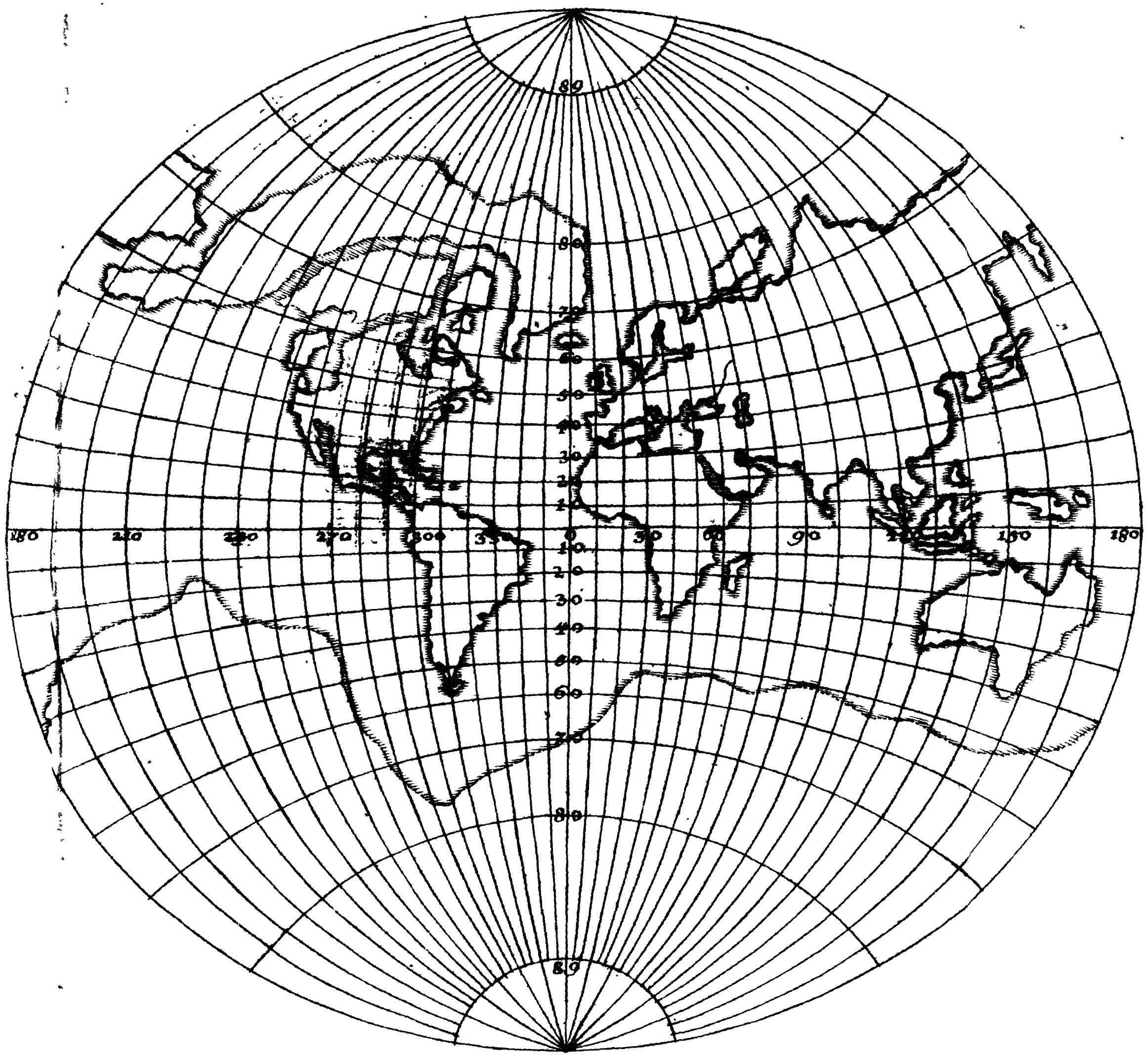
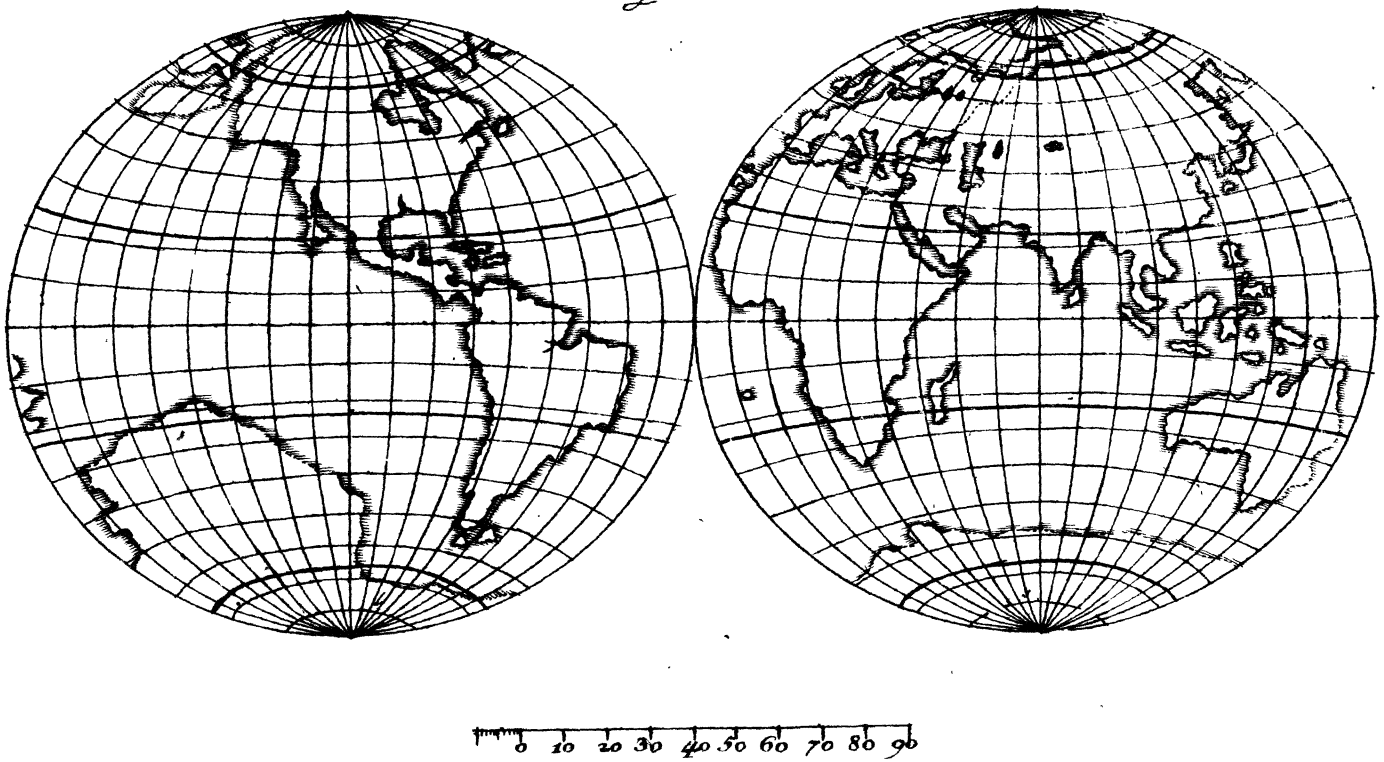

89
80
70
60
50
40
30
20
10
180
210
240
270
300
330
0
30
60
90
120
150
180
10
20
30
40
50
60
70
80
89

Fig. XIX.



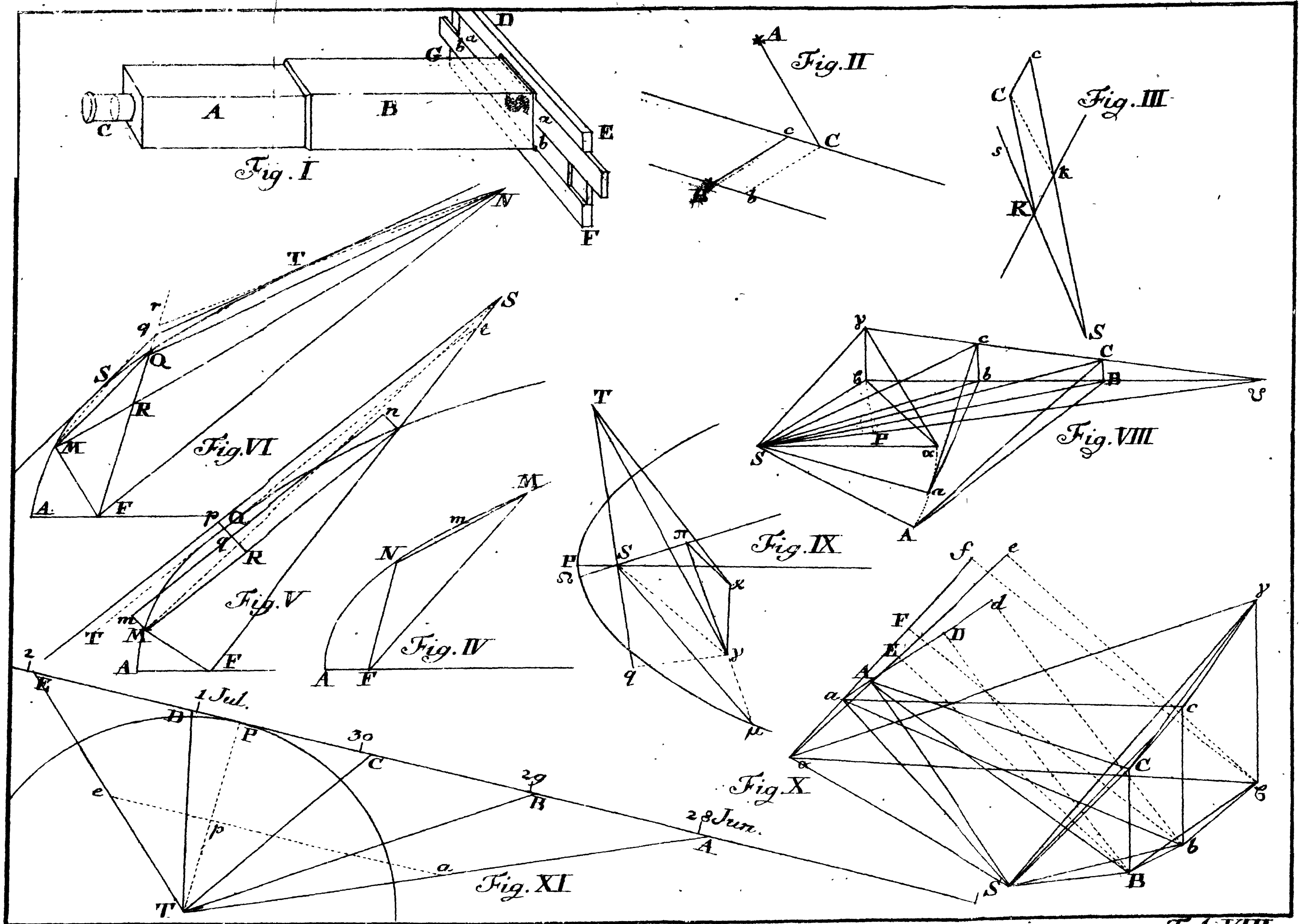


Fig. I
Fig. II
Fig. III
Fig. IV
Fig. V
Fig. VI
Fig. VIII
Fig. IX
Fig. X
Fig. XI
1 Jul.
30
29
28 Jun.

Tab. VIII

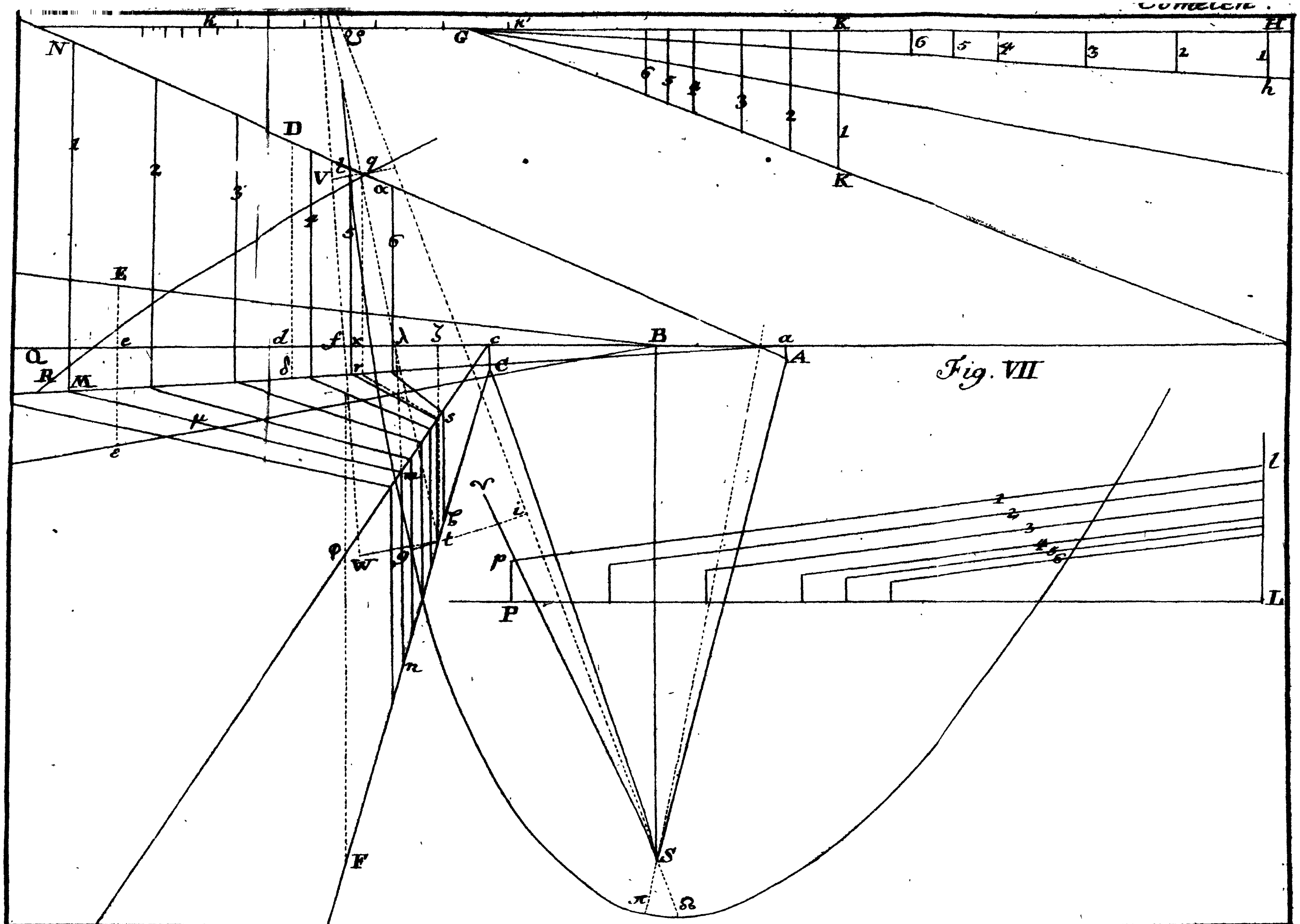


Fig. VII

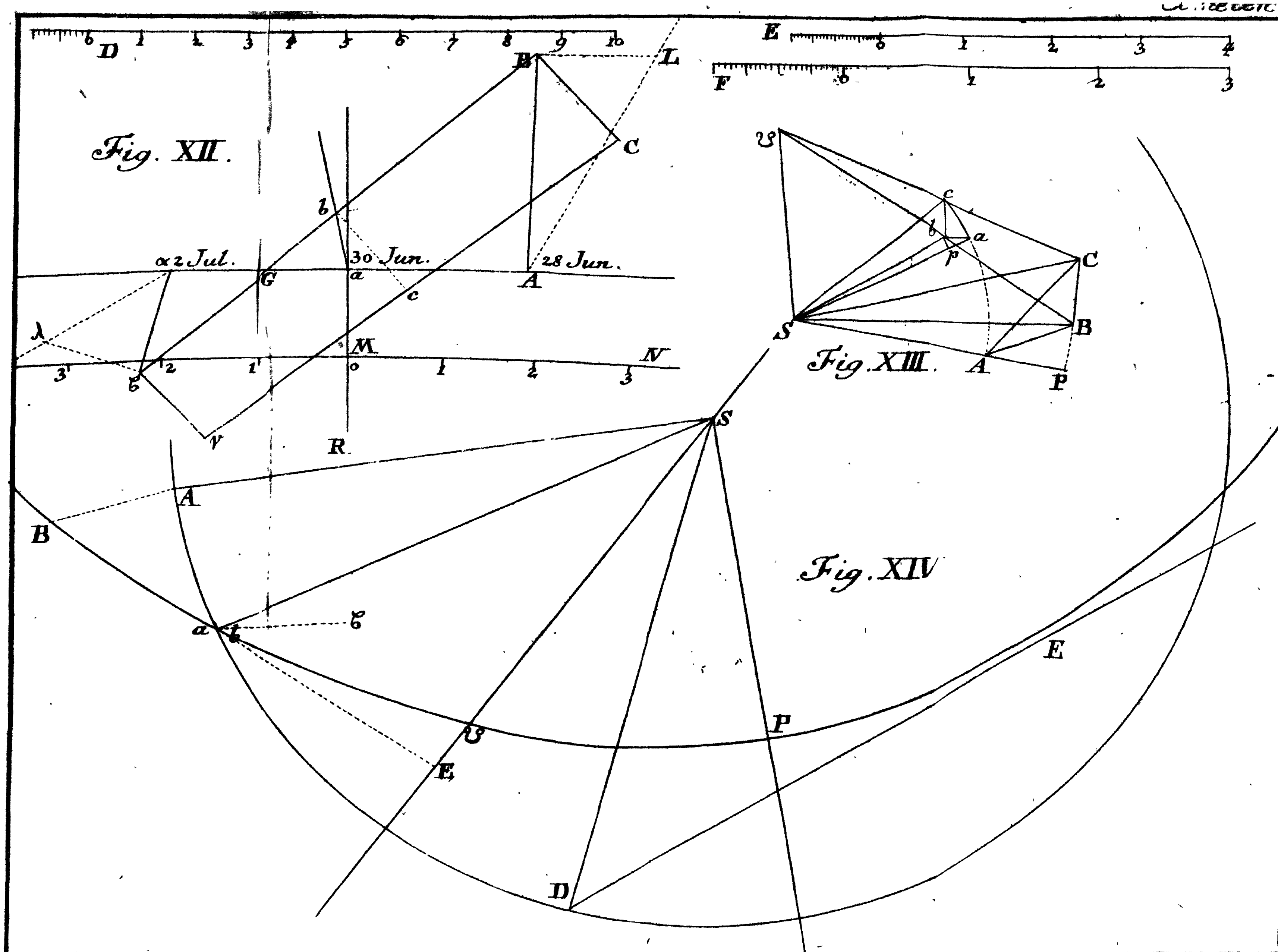


Fig. XII.
α 2 Jul.
30 Jun.
28 Jun.
Fig. XIII.
Fig. XIV

Baukunst.

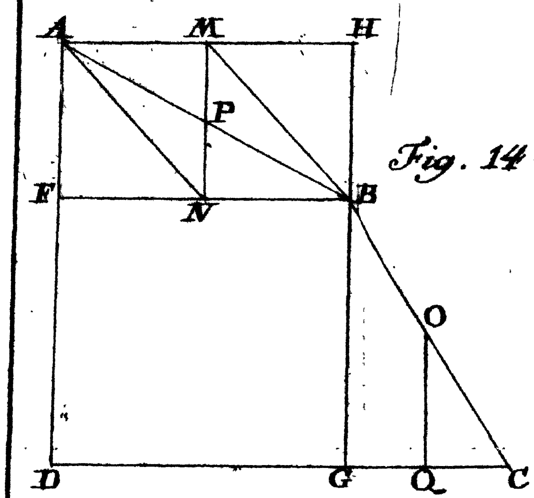


Fig. 14*

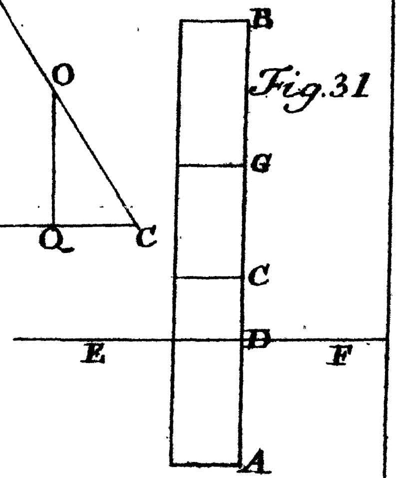


Fig. 31

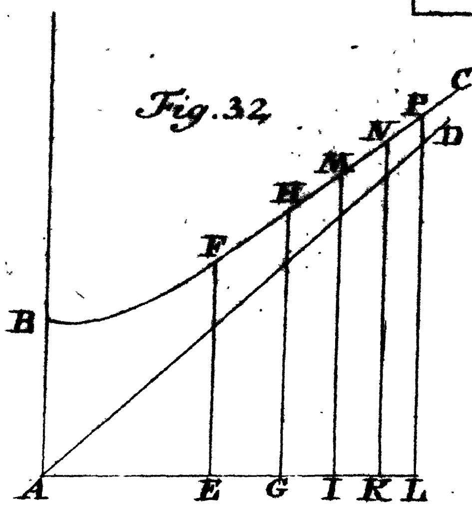
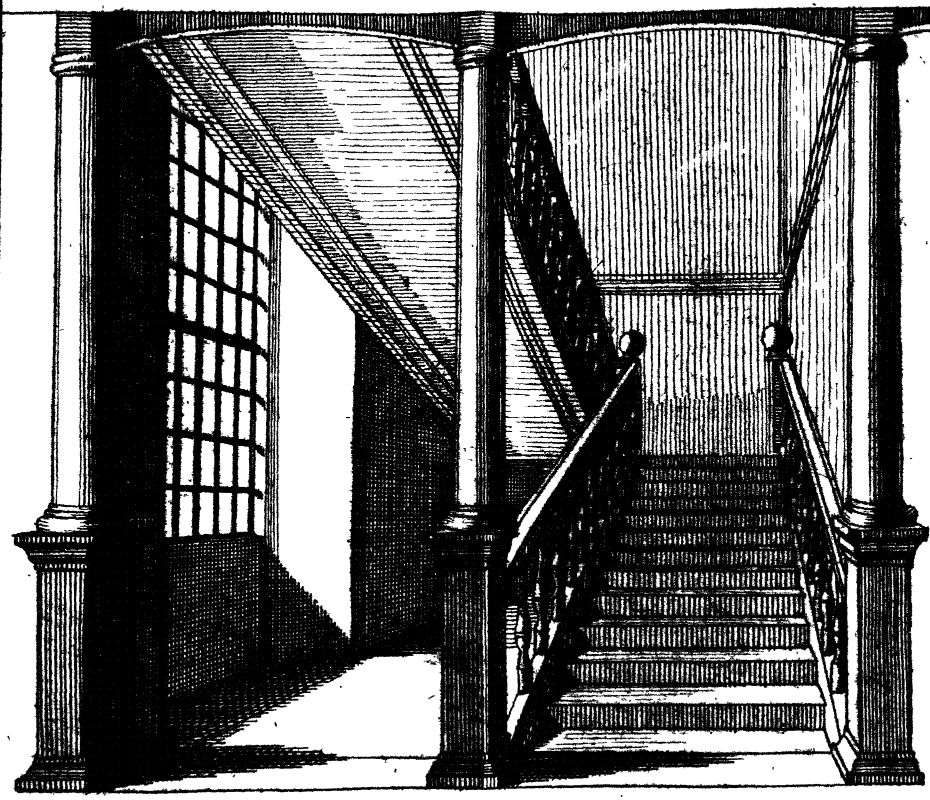


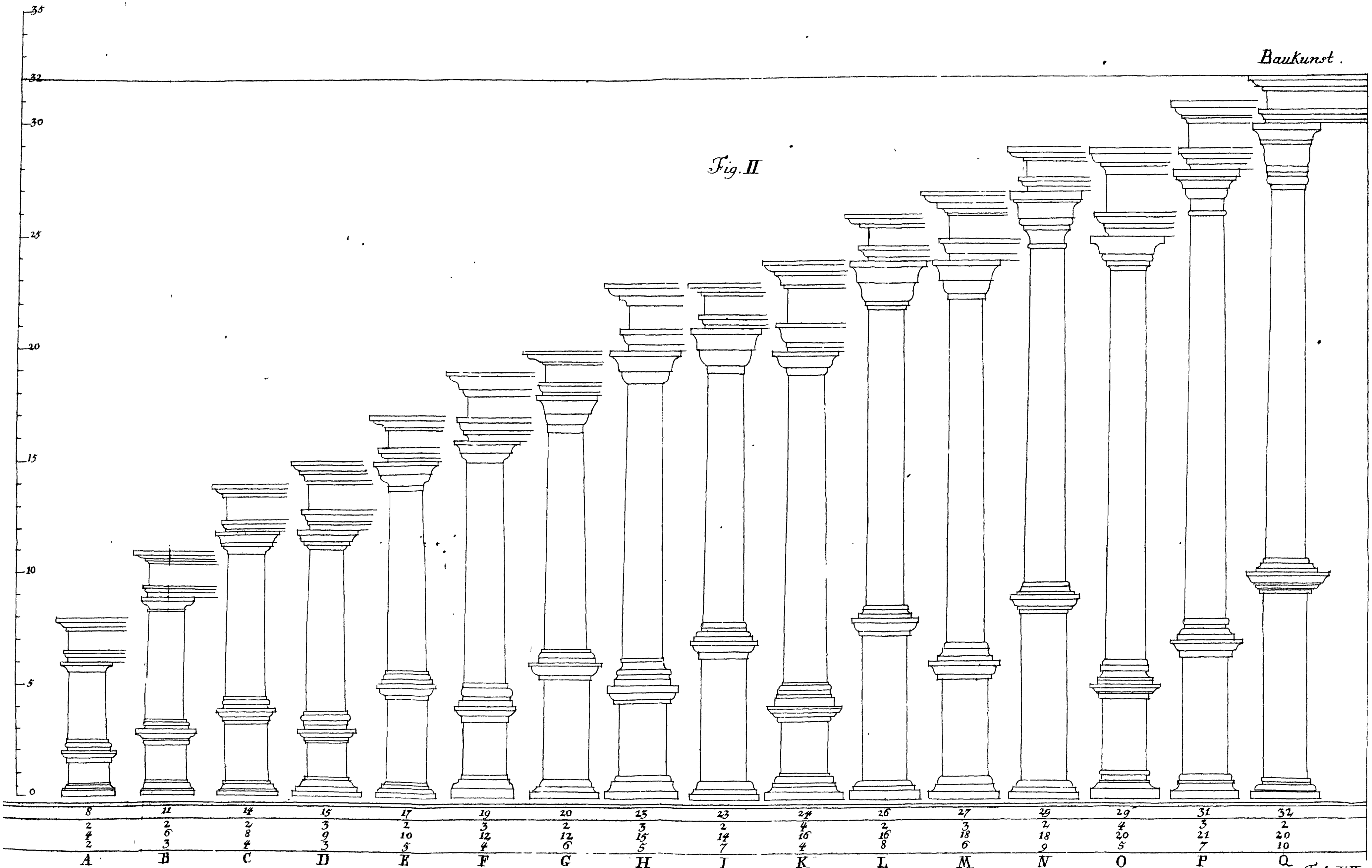
Fig. 32

Fig. I.



Tab. XI.

Fig. II



Tab. XII

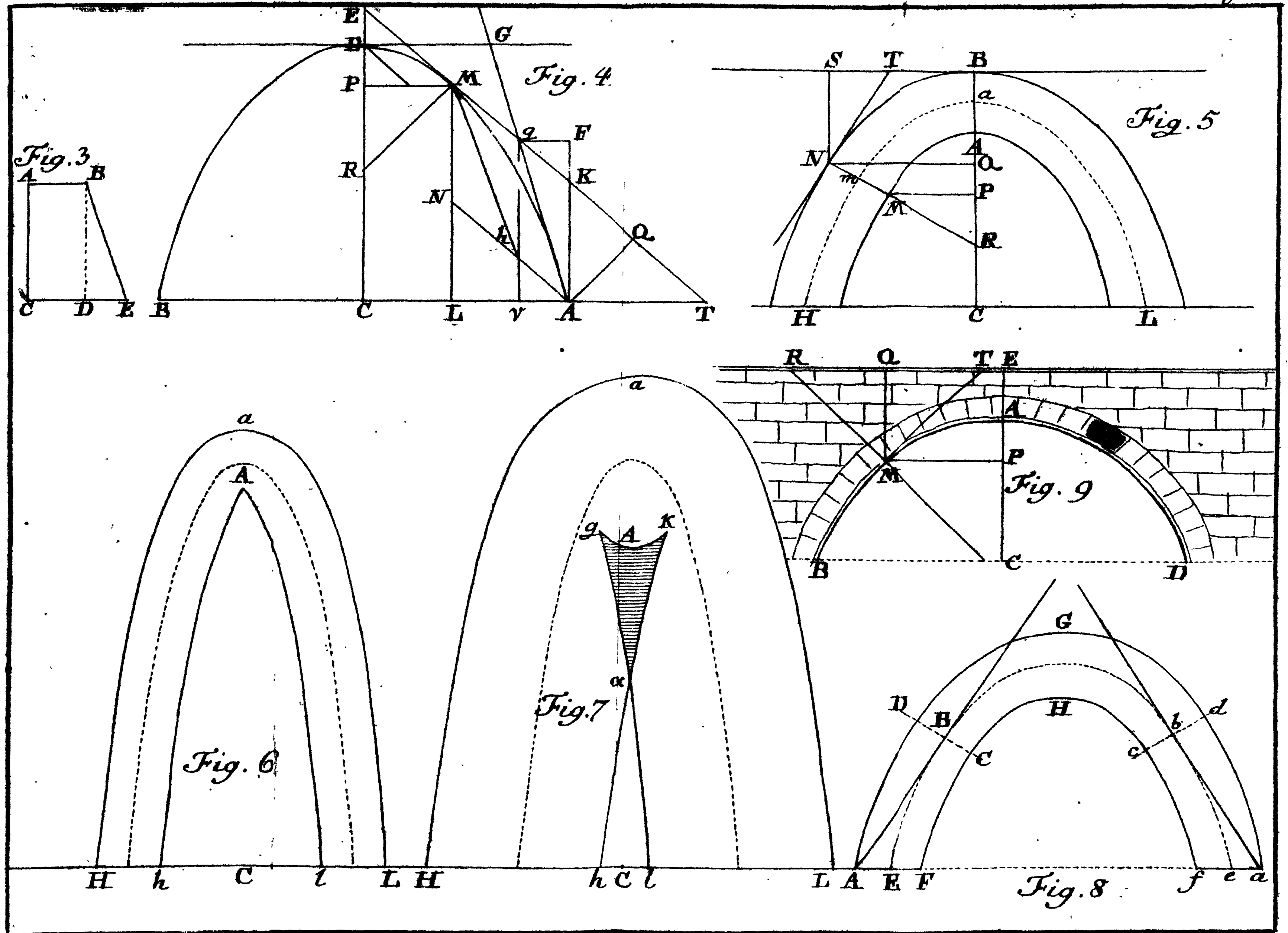


Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9

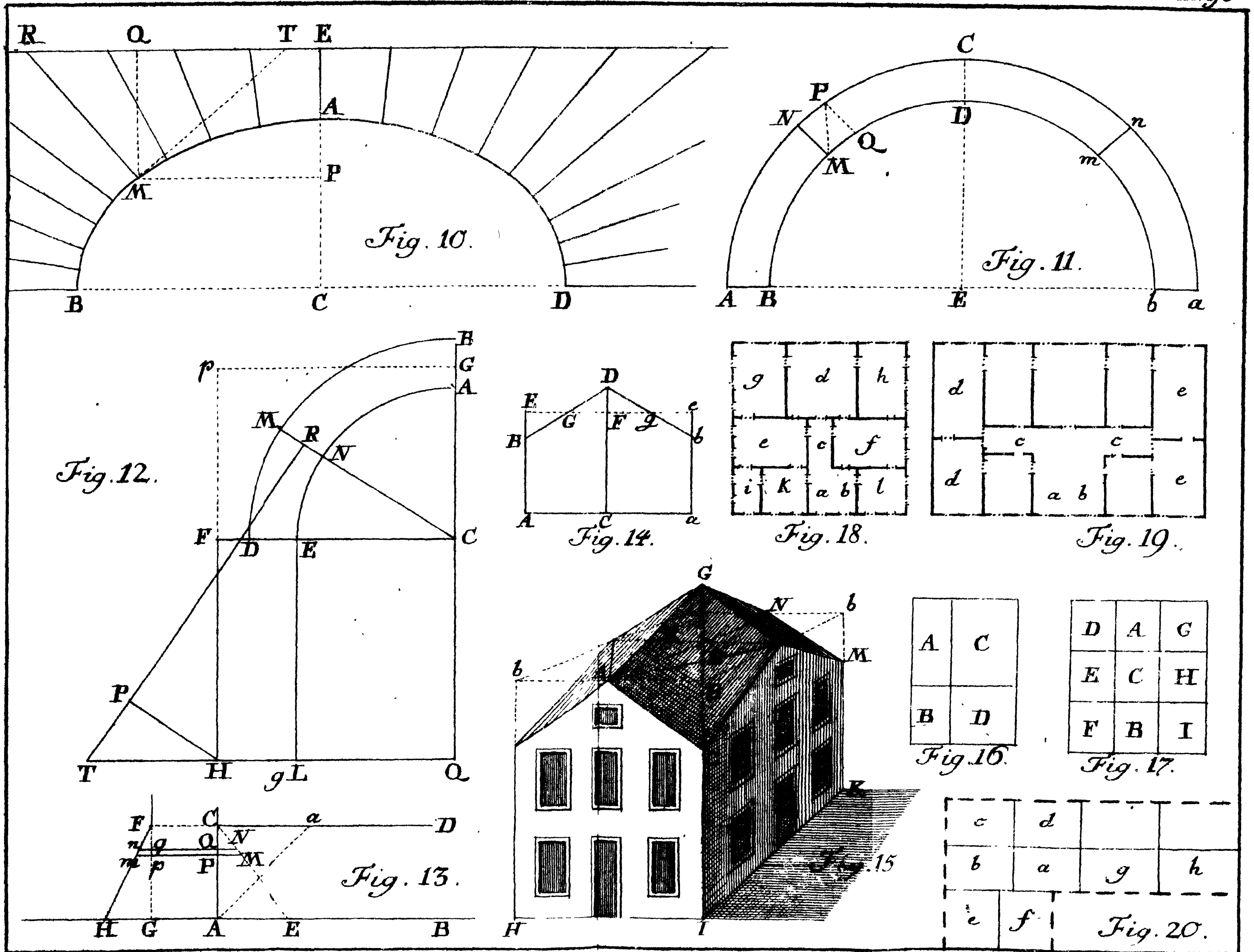


Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.

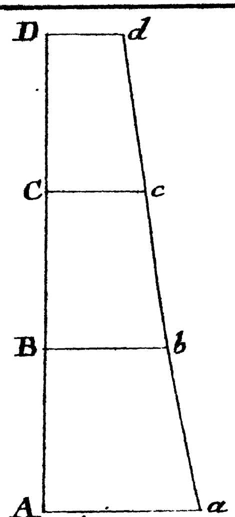


Fig. 21

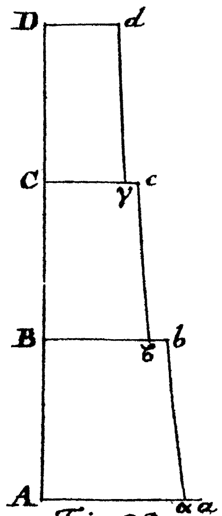


Fig. 22

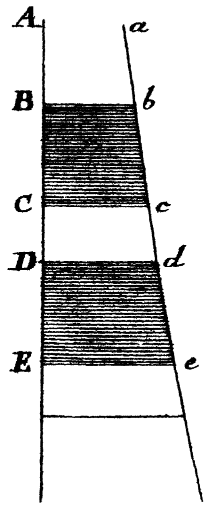


Fig. 23

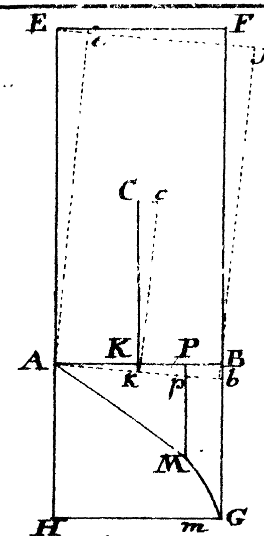


Fig. 24

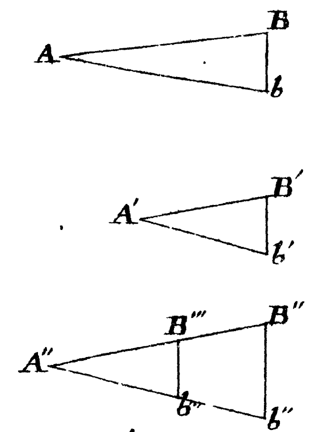


Fig. 25

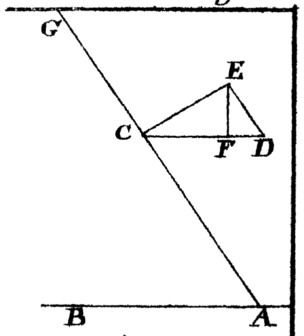


Fig. 28

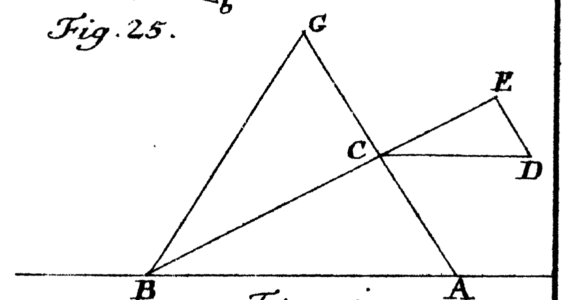


Fig. 29

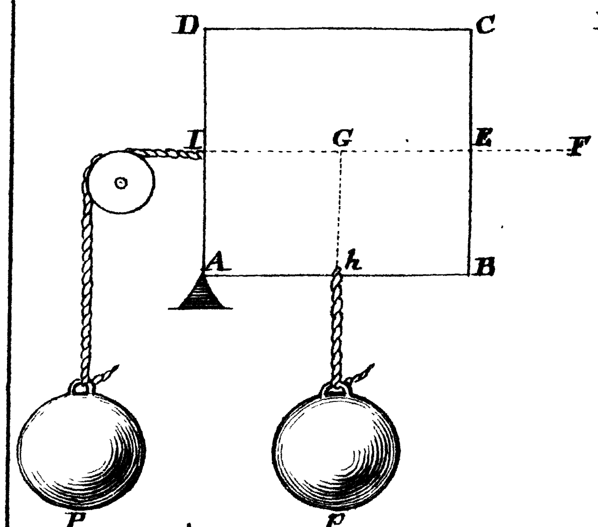


Fig. 26.

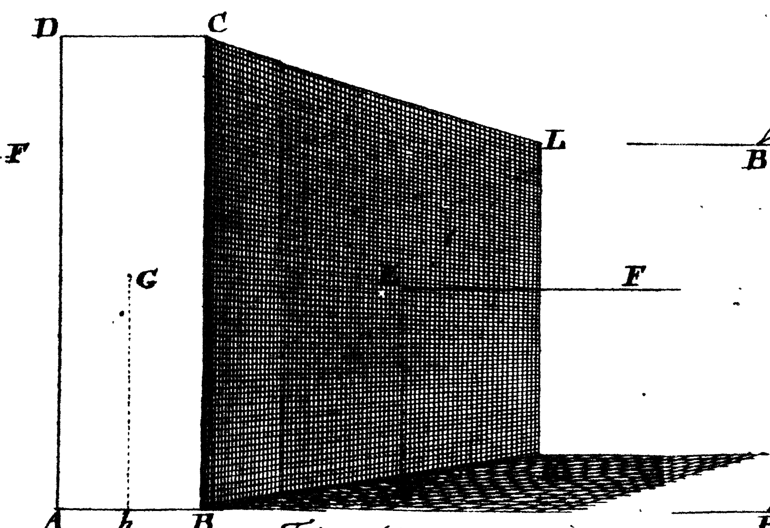


Fig. 27.

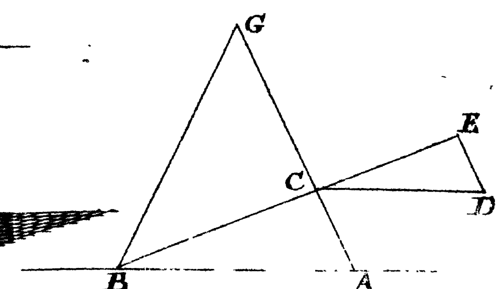


Fig. 30.

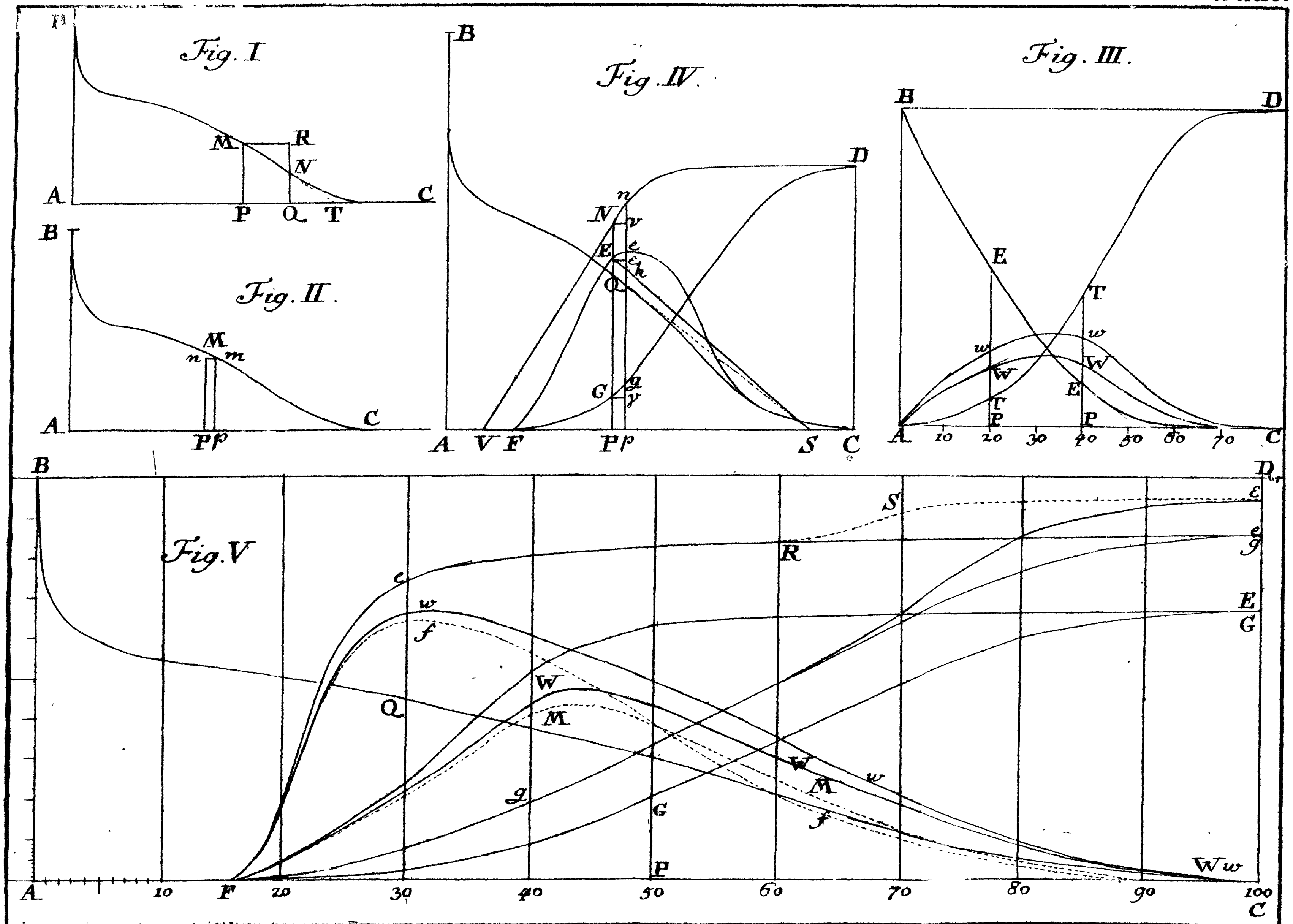


Fig. I
Fig. II
Fig. IV
Fig. III
Fig. V
A
B
C
D
P
Q
T
M
R
N
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100