CAPITEL 3

VON DER SUBTRACTION ALS DER ZWEITEN ARITHMETISCHEN OPERATION

1. *In der Subtraction werden solche Regeln gegeben, vermittelst welcher man von einer gegebenen Zahl eine andere gegebene Zahl abziehen, und die Zahl welche übrig bleibet anzeigen kann. Diese Zahl nun, welche übrig bleibet, wenn von den gegebenen Zahlen eine von der anderen abgezogen wird, pfleget der Rest genennet zu werden.*

Gleichwie in der Addition gelehret wird, wie man zu einer gegebenen Zahl eine andere oder mehr gegebene Zahlen hinzusetzen soll: also wird in der Subtraction gelehret, wie man von einer gegebenen Zahl eine andere gegebene Zahl abziehen oder subtrahiren soll. Durch die Addition wird also eine gegebene Zahl vermehret, indem zu derselben noch eine oder mehr Zahlen hinzugesetzet werden; durch die Subtraction aber wird eine gegebene Zahl vermindert, indem von derselben eine andere Zahl weggenommen oder abgezogen wird. Weilen demnach die Addition eine Zahl vermehret, die Subtraction aber vermindert, so sind diese zwei Operationen einander entgegengesetzet. Und da in der Vermehrung und Verminderung alle Veränderungen der Zahlen bestehen, so können diese zwei Operationen, nämlich die Addition und Subtraction, als die zwei Haupt-Operationen, welche bei den Zahlen stattfinden, gehalten werden: wie denn auch im folgenden wird gezeiget werden, wie die übrigen Operationen aus diesen zweien entspringen und in denselben ihren Grund haben. Was nun die Subtraction an und für sich selbst betrifft, so wird durch dieselbe eine Zahl gefunden, welche übrig bleibt, wenn man von einer gegebenen Zahl eine andere Zahl wegnimmt oder abziehet. Da aber zu deutlicher Erkenntnis einer Zahl erfordert wird, dass man wisse, wie dieselbe aus Unitäten, Decadibus, Centenariis und den folgenden Sorten zusammengesetzet sei; so müssen zur Bewerkstelligung der Subtraction solche Regeln gegeben werden, durch derer Hülfe die gesuchte Zahl, nämlich der Rest, in Unitäten, Decadibus, Centenariis und so fort, gefunden wird; damit dieselbe sogleich geschrieben und nach der gewöhnlichen Art ausgesprochen werden kann. Zu desto grösserer Bequemlichkeit aber müssen die Regeln so beschaffen sein, dass sie gleich die Unitäten, Decades, Centenarios und so fort, geben, aus welchen der Rest bestehet; und derselbe also gleich, wie die Summe in der Addition, könne hingeschrieben werden.

2. *Diejenige Zahl, welche von der anderen abgezogen wird, muss kleiner sein als die andere, von welcher sie abgezogen wird. Es wird demnach in der Subtraction von der grösseren Zahl die kleinere abgezogen und der Rest, oder dasjenige was überbleibt, gefunden; welcher von dieser Eigenschaft sein wird, dass, wenn man zu demselben die kleinere Zahl addiret, die grössere Zahl herausgebracht wird.*

Wenn eine Zahl von der anderen muss weggenommen werden, so muss dieselbe nothwendig kleiner sein; weilen man nicht mehr wegnehmen kann, als würklich vorhanden ist. Wenn nämlich in einem Sacke eine gewisse Anzahl Rubeln befindlich, so kann man nicht mehr daraus nehmen, als darinnen ist; eben so viel aber, oder weniger, kann wohl daraus genommen werden. Die Subtraction lehret also, wie man finden soll, wieviel Rubeln in dem Sacke noch übrig bleiben, wenn aus demselben eine gewisse Summe ausgezählet worden. Hieraus ist nun klar, dass, wenn so viel herausgenommen wird, als darinn ist, nichts im Sacke zurückbleiben werde; wird aber weniger daraus genommen, so muss im Sache noch etwas zurückbleiben, welches der Rest genennet wird. Woraus auch zugleich erhellet, dass dasjenige, was im Sacke zurückbleibt, und dasjenige, welches ist herausgenommen worden, zusammen wieder eben so viel ausmacht, als anfangs in dem Sacke vorhanden gewesen. Das ist also: der Rest und die kleinere Zahl zusammen genommen machen die grössere Zahl. Wenn also zwei Zahlen gegeben sind, so lehret die Subtraction, wie man eine Zahl finden soll, welche mit der kleineren Zahl zusammen die grössere ausmache. Man sieht aus diesem zugleich, dass, wenn man den gefundenen Rest von der grösseren Zahl abziehen sollte, die kleinere Zahl übrig bleiben müsste. Als wenn man von der grösseren Zahl 9 die kleinere 5 abziehet, so ist der Rest 4; und dieser Rest hat diese Eigenschaft, dass derselbe, nämlich 4, und die kleinere Zahl 5 zusammen die grössere Zahl 9 ausmachen. Ingleichem, wenn man den gefundenen Rest 4 von der grösseren Zahl 9 abziehet, so bleibet 5, nämlich die kleinere Zahl, über. Ferner folget hieraus, dass, wenn man von der Summe zweier Zahlen, welche durch die Addition ist gefunden worden, die eine derselben Zahlen abziehet, die andere Zahl nothwendig übrig bleiben müsse. Und hierinn sind diejenigen Proben gegründet, dadurch man zu untersuchen pflegt, ob ein Exempel sowohl von der Addition als Subtraction recht gerechnet worden. Welches unten mit mehrerem ausgeführet werden soll.

3. *Um eine Zahl von der anderen abzuziehen oder zu subtrahiren, wird erfordert, dass man erstlich wisse die Unitäten von den Unitäten, die Decades von den Decadibus, die Centenarios von den Centenariis und so fort, zu subtrahiren. Und da niemals mehr als 9 Stücke von einer Gattung vorkommen, dass man, wenn es die Noth erfordert, wisse, ein Stück von einer höheren Sorte in geringere Sorten zu verwandeln, ohne dass dadurch die ganze Zahl verändert werde.*

Wir setzen voraus, dass diejenigen Zahlen, davon eine von der anderen abgezogen werden soll, auf die gewöhnliche Art durch die Unitäten, Decades, Centenarios und so fort, gegeben sind. Wenn man derohalben die Unitäten der kleineren Zahl von den Unitäten der grösseren Zahl abziehet, gleichergestalt auch die Decades von den Decadibus, die Centenarios von den Centenariis und so fort; so ist klar, dass diese übergebliebenen Unitäten, Decades, Centenarii und so fort zusammen den gesuchten Rest ausmachen müssen. Diese Operation nun ins Werk zu richten, so ist nöthig, dass man wisse, die Unitäten von den Unitäten, die Decades von den Decadibus und so fort, zu subtrahiren; welches deswegen zu erlernen sehr leicht ist, weilen niemals mehr als 9 Stücke von einer Gattung vorkommen. Obgleich aber diejenige Zahl, von welcher die andere subtrahiret werden soll, allezeit grösser sein muss, so kann es doch geschehen, dass in der grösseren Zahl weniger Stücke von Unitäten oder Decadibus oder von einer anderen Sorten vorhanden sind als in der kleineren Zahl; in welchem Fall also diejenige Sorte der kleineren Zahl von eben der Sorte der grösseren Zahl nicht abgezogen werden kann. Dieser Schwierigkeit nun abzuhelfen, muss von der nächstfolgenden höheren Sorte der grösseren Zahl ein Stück weggenommen und zu der kleineren Sorte, derer es 10 Stücke ausmachet, geschlagen werden; auf diese Art bekommt man also 10 Stücke mehr, von derselben Sorte der grösseren Zahl, als vorher vorhanden waren; von welcher Anzahl folglich allezeit eben dieselbe Sorte der kleineren Zahl kann abgezogen werden, weilen in derselben nirgend mehr als 9 Stücke von einer Sorte vorkommen.

4. *Es ist also vor allen Dingen nöthig, dass man lerne, eine jegliche einfache Zahl von anderen Zahlen, welche nicht über 9 grösser sind als dieselbe, abziehen. Dieses ist zwar an sich selbst leicht und kann von einem jeden im Kopfe gethan werden: jedoch kann man sich hiebei einer Tabelle bedienen, welche hier beigefüget wird.*

Indem die Subtraction auf obbeschriebene Art vorgenommen und bei jeder Sorte insbesondere verrichtet wird, so ist die Anzahl der Stücke von jeglicher Sorte der grösseren Zahl entweder kleiner als die Anzahl der Stücke von eben der Sorte in der kleineren Zahl oder nicht. Im letzteren Fall muss also nur eine einfache Zahl von einer einfachen Zahl abgezogen werden. Im ersteren Fall aber wird die Anzahl der Stücke der grösseren Zahl um 10 vermehret, indem ein Stück von der folgenden Sorte weggenommen wird, welches 10 Stücke von der kleineren Sorte betrifft. In diesem Fall muss demnach eine einfache Zahl von einer anderen, welche zwar grösser ist als 9, aber doch kleiner als 20, abgezogen werden. Man hat also nicht mehr nöthig, als die nachfolgende Tabelle zu erlernen, aus welcher man sieht, wie viel übrig bleibt, wenn man eine einfache Zahl von einer einfachen oder auch von einer, so kleiner ist als 20, abzieht.

1	von	1	bleibt	0
1	”	2	”	1
1	”	3	”	2
1	”	4	”	3
1	”	5	”	4
1	”	6	”	5
1	”	7	”	6
1	”	8	”	7
1	”	9	”	8
1	”	10	”	9

2	von	2	bleibt	0
2	”	3	”	1
2	”	4	”	2
2	”	5	”	3
2	”	6	”	4
2	”	7	”	5
2	”	8	”	6
2	”	9	”	7
2	”	10	”	8
2	”	11	”	9

3	von	3	bleibt	0
3	”	4	”	1
3	”	5	”	2
3	”	6	”	3
3	”	7	”	4
3	”	8	”	5
3	”	9	”	6
3	”	10	”	7
3	”	11	”	8
3	”	12	”	9

4	von	4	bleibt	0
4	”	5	”	1
4	”	6	”	2
4	”	7	”	3
4	”	8	”	4
4	”	9	”	5
4	”	10	”	6
4	”	11	”	7
4	”	12	”	8
4	”	13	”	9

5	von	5	bleibt	0
5	”	6	”	1
5	”	7	”	2
5	”	8	”	3
5	”	9	”	4
5	”	10	”	5
5	”	11	”	6
5	”	12	”	7
5	”	13	”	8
5	”	14	”	9

6	von	6	bleibt	0
6	”	7	”	1
6	”	8	”	2
6	”	9	”	3
6	”	10	”	4
6	”	11	”	5
6	”	12	”	6
6	”	13	”	7
6	”	14	”	8
6	”	15	”	9

7	von	7	bleibt	0
7	”	8	”	1
7	”	9	”	2
7	”	10	”	3
7	”	11	”	4
7	”	12	”	5
7	”	13	”	6
7	”	14	”	7
7	”	15	”	8
7	”	16	”	9

8	von	8	bleibt	0
8	”	9	”	1
8	”	10	”	2
8	”	11	”	3
8	”	12	”	4
8	”	13	”	5
8	”	14	”	6
8	”	15	”	7
8	”	16	”	8
8	”	17	”	9

9	von	9	bleibt	0
9	”	10	”	1
9	”	11	”	2
9	”	12	”	3
9	”	13	”	4
9	”	14	”	5
9	”	15	”	6
9	”	16	”	7
9	”	17	”	8
9	”	18	”	9

10	von	10	bleibt	0
10	”	11	”	1
10	”	12	”	2
10	”	13	”	3
10	”	14	”	4
10	”	15	”	5
10	”	16	”	6
10	”	17	”	7
10	”	18	”	8
10	”	19	”	9

Allhier ist derjenige Theil, da 0 oder nichts von einer Zahl soll abgezogen werden, ausgelassen, weilen dadurch keine Zahl vermindert wird, sondern unverändert bleibet. An deren Stelle aber ist die Tabelle von zehn noch hinzugefüget worden, welche zwar noch von keinem Gebrauch zu sein scheinet: allein im folgenden werden einige Schwierigkeiten, welche sich in vorbeschriebener Art zu subtrahiren ereignen, gehoben werden, wozu auch der letzte Theil dieser Tabelle erfordert wird.

5. *Wenn eine kleinere Zahl von einer grösseren abgezogen werden soll, und die Anzahl von einer jeglichen Sorte in der kleineren Zahl kleiner ist, als die Anzahl von eben der Sorte der grösseren Zahl, so werden durch Hülfe der vorigen Tabelle die Unitäten von den Unitäten, die Decades von den Decadibus, die Centenarii von den Centenariis und so weiter, abgezogen. Da denn alles, was bei Abziehung einer jeglichen Sorte herauskommet, zusammen den gesuchten Rest ausmacht.*

Der Grund hievon ist schon im vorigen ausgeführet worden; denn wenn alle Theile, daraus die zwei Zahlen bestehen, von einander abgezogen werden, so machen alle Reste zusammen eben so viel aus, als wenn ein ganzes von dem andern abgezogen wurde. Wenn aber auf diese Art die Subtraction geschieht, so bekommt auch der gesuchte Rest gleich die gewöhnliche Form, welche zur Erkenntnis und Aussprechung der Zahlen angenommen ist. Als wenn von dieser Zahl 56897 diese 21506 soll abgezogen werden, so nehme man erstlich die 6 Unitäten der kleineren Zahl von den 7 Unitäten der grösseren, so bleibet für den Rest 1 Unität. Zweitens: weil in der kleineren Zahl keine Decas vorhanden, welche von den 9 Decaden der grösseren Zahl soll abgezogen werden, so bleiben auch alle 9 übrig im Rest. Drittens: 5 Centenarii, von 8 Centenariis abgezogen, lassen 3 Centenarios übrig. Viertens: 1 Millenarius von 6 Millenariis weggenommen, bleiben 5 übrig. Und endlich fünftens: 2 Decades millenariorum, von 5 dergleichen abgezogen, lassen 3 zurück. Der Rest demnach, welcher nach Abzug der Zahl 21506 von der Zahl 56897 übrig bleibet, ist 3 Decades millenariorum, 5 Millenarii, 3 Centenarii, 9 Decades und 1 Unitas: das ist 35391. Es hätten also gleich diese gefundenen Reste in einer Linie von der rechten nach der linken Hand geschrieben werden können, da dann sofort diese Zahl 35391 würde herausgekommen sein. Zu mehrerer Leichtigkeit pflegen deswegen die gegebenen Zahlen, wie in der Addition, unter einander geschrieben und mit einer Linie unterzogen zu werden, unter welche die Reste von einer jeglichen Sorte in der Ordnung geschrieben werden, wie folget:

$$\begin{array}{c} 56897 \\ 21506 \\ \hline 35391 \end{array}$$

Die Operation aber wird auf folgende Weise verrichtet: 6 von 7 bleibt 1, so unter die Linie unter die Unitäten geschrieben wird. Ferner: nichts von 9 bleiben 9, welche unter die Linie auf die zweite Stelle gesetzet werden. Drittens, auf gleiche Weise: 5 von 8 bleiben 3. Viertens: 1 von 6 bleiben 5 und fünftens: 2 von 5 bleiben 3. Nachdem nun dieses zu Ende gebracht, so wird sich der wahre Rest unter der Linie befinden.

6. *Wenn aber die Anzahl der Stücke von einer Sorte in der unteren oder kleineren Zahl grösser als die Anzahl von eben der Sorte in der grösseren Zahl; und also die Subtraction auf beschriebene Art nicht geschehen kann: so muss ein Stück von der folgenden grösseren Sorte der grösseren Zahl weggenommen und zu der vorhergehenden Sorte, dergleichen es 10 Stücke ausmacht, hinzugethan werden; da dann die Subtraction von statten gehen wird. In der folgenden Subtraction aber ist wohl zu merken, dass die obere Zahl um 1 ist vermindert worden.*

Gleichwie in der Addition, wenn mehr als 9 Stücke von einer Sorte vorgekommen, von denselben je zehn genommen und dafür einzele Stücke zu der folgenden Sorte gesetzet worden: also geschiehet es auch, aber umgekehret, in der Subtraction, dass wenn von einer Sorte nicht genug Stücke vorhanden sind, dass die untere Zahl davon abgezogen werden könnte, so wird ein Stück von der folgenden Sorte genommen, welches 10 in der vorigen betrifft, und diese zehn noch hinzugesetzt. Denn wenn von einer Zahl ein Centenarius zum Exempel weggenommen, hingegen aber wiederum 10 Decades hinzugesetzet werden, so bleibt die Grösse der Zahl unverändert. Eine solche Verwechselung kann demnach sicher gebraucht werden zu Beförderung der Subtraction. Als wenn zum Exempel diese Zahl 5789 soll abgezogen werden von dieser 7364, und dieselben wie gelehret unter einander geschrieben worden, als folget:

	7.3.6.4
	5 7 8 9
der Rest	1 5 7 5

so sollten erstlich die 9 Unitäten der unteren Zahl von den 4 Unitäten der oberen Zahl abgezogen werden, welches aber nicht geschehen kann. Derowegen wird von der folgenden Sorte der oberen Zahl, nämlich den 6 Decadibus, eine Decas weggenommen oder gelehnet, und zu den 4 Unitäten geschlagen, welches also zusammen 14 Unitäten ausmacht. Nun können also von diesen 14 Unitäten die 9 Unitäten abgezogen werden, und bleiben 5 über, welche folglich unter die Linie geschrieben werden. Wobei aber zu merken ist, dass anjetzo in der oberen Zahl nicht mehr 6, sondern nur 5 Decades vorhanden, indem eine davon weggenommen worden; welche Verminderung derowegen mit einem Punkt angedeutet wird. Hierauf sollten demnach 8 Decades von 5 Decadibus abgezogen werden; welches, weil es gleichfalls nicht angeht, so wird von den 3 Centenariis ein Stück weggenommen, so dass nur noch 2 zurückbleiben, welches durch das da zugesetzte Punkt angedeutet wird. Dieser Centenarius macht nun 10 Decades, welche mit den 5 schon vorhandenen 15 Decades ausmachen. Von diesen 15 werden nun die 8 Decades der unteren Zahl abgezogen und bleiben 7 über, welche unter die Linie in die Stelle der Decaden gesetzet werden. Ferner haben wir 7 Centenarios von 2 Centenariis abzuziehen; weswegen gleichergestalt von den 7 Millenariis ein Stück genommen und zu den 2 Centenariis geschlagen wird, so dass 12 Centenarii herauskommen. Von diesen ziehet man nun die 7 Centenarios ab; so bleiben 5 über, so unter die Linie in die dritte Stelle gesetzet werden. Endlich werden die 5 Millenarii von den 6 oberen abgezogen, und der eine, so überbleibet, unter die Linie geschrieben; womit die ganze Operation geendigt ist, und hat also diesen Rest gefunden 1575. Wir haben hier bei einer jeden Operation den Grund und das Fundament derselben beigesetzet, weswegen die ganze Operation ziemlich weitleifig scheinet; allein wenn die blosse Operation beschrieben wird, so wird dieselbe ganz kurz. Also kann man bei eben diesem Exempel auf folgende Weise den gesuchten Rest gleich finden, wenn man sagt: 9 von 4 kann man nicht, deswegen 9 von 14 bleiben 5, und setzt ein Punkt zu 6. Ferner: 8 von 5 kann man nicht, also 8 von 15 bleiben 7, und setzt ein Punkt zu 3. Drittens: 7 von 2 kann man nicht, also 7 von 12 bleiben 5, und setzt ein Punkt zu 7. Endlich: 5 von 6 bleiben 1. Auf diese Art aber die Subtraction anzustellen fällt öfters sehr beschwerlich, wenn in den Stellen der oberen Zahl, davon ein Stück weggenommen werden soll, eine 0 stehet und also nichts vorhanden ist. Derowegen wollen wir im folgenden eine andere Art anzeigen, welche dieser Schwierigkeit nicht unterworfen ist. Damit man aber diese Schwierigkeit besser einsehe, wollen wir davon ein Exempel beisetzen. Als von 1205 sollen 827 abgezogen werden, welche demnach, wie gelehrt worden, also geschrieben werden:

	1 2.0 5
	8 2 7
der Rest	3 7 8

Nun sollen erstlich 7 Unitäten von 5 abgezogen werden, welches, weilen es nicht geschehen kann, sollte von den Decaden der oberen Zahl ein Stück weggenommen und zu den 5 Unitäten gesetzet werden. Allein hier ist keine Decas in der oberen Zahl vorhanden, und kann also die angegebene Regel nicht gebraucht werden. Um demnach abziehen zu können, muß von der zweiten folgenden Sorte, nämlich den Centenariis, ein Stück weggenommen werden, und wenn auch von solchen nichts vorhanden wäre, müsste sogar von den Millenariis ein Stück genommen werden. In diesem Exempel aber haben wir 2 Centenarios, davon ein Stück genommen, welches durch das hinzugesetzte Punkt angedeutet wird, macht 10 Decades. Da wir nun Decades haben, so können wir davon ein Stück nehmen und zu den Unitäten schlagen; da dann noch 9 Decaden zurückbleiben, welche man sich anstatt der 0 auf der zweiten Stelle der oberen Zahl einbilden muß. Auf diese Weise haben wir nun 15 Unitäten; davon die 7 weggenommen, bleiben 8 Unitäten über, so in den Rest auf die Stelle der Unitäten gesetzet werden. Wegen dieser Operation haben wir nun 2 Decades nicht von 0, sondern von 9 Decadibus abzuziehen; bleiben also 7 übrig, so unter die Linie auf die zweite Stelle geschrieben werden. Drittens sind 8 Centenarii von einem Centenario abzuziehen; welches weilen es nicht geschehen kann, wird der eine Millenarius gleich dazu gethan, dass man 11 Centenarios bekommt; davon, so die 8 Centenarii abgezogen werden, 3 zurück bleiben, und folglich dieser Rest 378 herauskommt. Aus diesem Exempel sieht man nun deutlich, dass die obgegebene Regel nicht völlig hinlänglich sei, sondern öfters einen Zusatz vonnöthen haben, wodurch in den Figuren der oberen Zahl grosse Veränderungen entspringen. Diesem soll also durch die nachfolgende Regel abgeholfen werden.

7. *Wenn, wie vorher gesetzet worden, die Anzahl der Stücke von einer Sorte in der unteren oder kleineren Zahl grösser ist als die Anzahl der Stücke von eben der Sorte in der oberen Zahl, so müssen zu diesen Stücken der oberen Zahl noch 10 Stücke im Sinn hinzugesetzet werden, da denn die Subtraction wird geschehen können. So aber dieses geschieht, so muss die Anzahl der Stücke von der folgenden Sorte in der unteren Zahl um ein Stück vermehret werden, welches mit einem Punkt, so man hinzusetzet, angedeutet wird und in der folgenden Subtraction bemerket werden muss.*

Diese Regel entspringt aus der vorhergehenden, hat aber vor derselben diesen Vortheil voraus, dass man allezeit die folgende untere Zahl um ein Stück vermehren kann, dieselbe mag eine Ziffer[1] sein oder nicht. Nach der vorhergehenden Regel aber musste in solchem Fall, wenn eine Figur in der oberen Zahl ist um 10 vermehret worden, die folgende Figur der oberen Zahl um 1 Stück vermindert werden, welches nicht angeht, wenn dieselbe eine Ziffer oder 0 ist. Der Grund aber dieser jetzt gegebenen Regel beruhet auf folgendem Satz. Wenn eine Zahl von einer anderen abgezogen werden soll, so kommt eben der Rest heraus, wenn gleich eine jede Zahl um ein Stück vermehret wird. Als 5 von 8 bleiben 3; eben dieser Rest kommt aber auch heraus, wenn die beiden Zahlen 5 und 8 um eines vermehret werden und 6 von 9 abgezogen wird. Also wenn ich soll 2 von 7 abziehen, so irre ich nicht, wenn ich 3 von 8 abziehe, denn ich bekomme den wahren Rest, nämlich 5. Die Wahrheit dieses Satzes ist nicht nöthig, mit mehr Beweistümeren darzuthun; sondern ein jeder wird durch weniges Nachdenken dieselbe bald einsehen. Lasset uns nun ein Exempel, so nach der ersteren Regel ist berechnet worden, davon wir den Grund schon dargethan, vor die Hand nehmen und uns dabei dieses jetzt gegebenen Grundsatzes bedienen. Nämlich es sollen 38 von 82 abgezogen werden, welche Zahlen also wie folgt zu stehen kommen:

$$\begin{array}{rr} & 8\,2 \\ & 3.8 \\ \cline{2-2} \text{der Rest} & 4\,4 \end{array}$$

Ich sage nämlich: 8 Unitäten von 2 Unitäten können nicht abgezogen werden; nehme derohalben eine Decadem von den 8 Decaden weg, welche 10 Unitäten ausmacht, diese setze ich zu den 2

[1] Ziffer bedeutet Null

Unitäten und bekomme also 12; davon kann ich 8 weggnehmen und bleiben 4 Unitäten übrig, so ich unter die Linie setze. Ferner muß ich 3 Decades nur von 7 Decaden abziehen, weilen von 8 schon eine Decas ist weggenommen und zu den Unitäten geschlagen worden. Wenn ich aber kraft des gegebenen Grundsatzes diese beiden Zahlen 3 und 7 um eines vermehre, so bekomme ich für die obere Zahl wiederum 8, wie dieselbe schon wirklich da steht, anstatt der unteren Zahl 3 aber bekomme ich 4, welche von 8 abgezogen 4 zurücklassen, eben als wenn ich nach der ersten Regel 3 von 7 subtrahiret hätte. Hieraus folget, dass, wenn man eine der oberen Zahlen um 10 vermehret hat, man anstatt die folgende obere Figur um eines zu verminderen, die folgende untere Zahl um eines vermehren könne, welches mit einem hinzugesetzten Punkt angedeutet wird. Um nun die Übereinstimmung dieser Regel mit der vorhergehenden besser zu zeigen, so wollen wir die beiden dort gegebenen Exempel auch auf diese Art allhier ausrechnen:

$$\begin{array}{rr} & 7\;3\;6\;4 \\ & 5.\,7.\,8.\,9 \\ \cline{2-2} \text{Rest} & 1\;5\;7\;5 \end{array}$$

Als da 9 von 4 nicht können abgezogen werden, setze ich 10 zu 4, die folgende untere Figur 8 aber vermehre ich mit einem Stück, so ich durch das beigesetzte Punkt andeute. Sage derohalben: 9 von 14 bleiben 5, welche Zahl ich unter die Linie auf die erste Stelle setze.

Ferner sage ich, wegen dem bei dem 8 stehenden Punkt: 9 von 6 kann ich nicht abziehen, sage deswegen 9 von 16, und setze zu der folgenden unteren Figur, 7, ein Punkt; 9 aber von 16 genommen lassen 7 zurück, welche unter die Linie auf die zweite Stelle schreibe. Drittens sage ich nicht 7, sondern, wegen dem Punkt, 8 von 3 kann ich nicht, also 8 von 13 bleiben 5, diese 5 kommen unter die Linie auf die dritte Stelle, zu der vierten Figur aber der unteren Zahl, nämlich zu 5, setze ich ein Punkt. Endlich sage ich: 6 von 7 bleiben 1, und schreibe also 1 unter die Linie auf die vierte Stelle. Hiemit habe also für den völligen Rest diese Zahl 15705, welche auch vorher durch die daselbst gegebene Regel ist gefunden worden. Das andere dort gegebene Exempel war folgendes:

$$\begin{array}{rr} & 1\,2\,0\,5 \\ & .\;\,8.2.7 \\ \cline{2-2} \text{Rest} & 3\,7\,8 \end{array}$$

Hier sage also wiederum: 7 von 5 kann ich nicht abziehen, setze derohalben ein Punkt zu 2 und sage: 7 von 15 bleiben 8, welche Zahl unter die Linie auf die erste Stelle schreibe. Ferner habe ich 3 von 0 oder nichts abzuziehen; welches, weil es nicht angeht, so setze ich ein Punkt zu dem 8 und sage: 3 von 10 bleiben 7, so ich unter die Linie auf die zweite Stelle setze. Drittens sind 9 von 2 abzuziehen, welches gleichfalls nicht geschehen kann, sollte deswegen ein Punkt zu der folgenden unteren Figur setzen; weil aber keine mehr vorhanden, so kann man sich vorstellen, als wenn eine 0 da stünde, und auf diese Stelle das Punkt setzen. Ich sage also nach der Regel: 9 von 12 bleiben 3, so unter die Linie auf die dritte Stelle zu stehen kommen. Und weil dies Punkt unter dem 1 eines bedeutet, so sage ich: 1 von 1 bleibt nichts oder geht auf, setze aber die 0 nicht unter [die] Linie auf die vierte Stelle, weilen eine 0, so zu Anfang von der linken Hand einer Zahl steht, keine Bedeutung hat. Man kann aber auch bei der dritten Subtraction, da oben wirklich 12 stehet, gleich 9 von den 12 abziehen; da dann die ganze Operation ein Ende hat, dadurch man diesen Rest gefunden 378, welcher auch auf die vorhergegebene Art ist herausgebracht worden. Man sieht aber leicht, dass in diesem Exempel die Operation auf diese Art weit bequemer fällt, als auf die vorhergehende Art. Wir wollen aber noch ein Exempel beifügen, so nach der vorhergehenden Art viel mehr Mühe kosten würde.

$$
\begin{array}{rr}
 & 2\,3\,0\,0\,1\,0\,4 \\
 & .\ 6.7.8\,0.9.5 \\
\hline
\text{Rest} & 1\,6\,2\,2\,0\,0\,9
\end{array}
$$

Nun sage ich: 5 von 4 kann ich nicht, setze also ein Punkt zu der folgenden unteren Figur 9, wodurch dieselbe in 10 verwandelt wird, und sage: 5 von 14 bleiben 9, so unter die Linie auf die erste Stelle kommen. Zweitens sage ich: 10 von 0 oder nichts kann ich nicht, setze also ein Punkt zu der folgenden Figur, nämlich der 0, und sage: 10 von 10 geht auf oder bleibt 0, so in dem Rest auf die zweite Stelle zu stehen kommt. Drittens sage ich, wegen dem Punkt: 1 von 1 geht auf und setze also auch in den Rest auf die dritte Stelle 0. Viertens sage ich: 8 von 0 kann ich nicht und setze deswegen zu dem 7 ein Punkt und sage: 8 von 10 bleiben 2, so ich unter die Linie schreibe. Fünftens habe ich wieder 8 von 0, setze also ein Punkt zu 6 und sage: 8 von 10 bleiben 2, so ich unter die Linie schreibe. Sechstens sage ich: 7 von 3 kann ich nicht, setze also ein Punkt auf die folgende Stelle der unteren Zahl, obgleich keine Figur mehr vorhanden, und bilde mir ein, als wenn dort eine 0 stünde, sage demnach: 7 von 13 bleiben 6, welche Zahl ich unter die Linie schreibe. Endlich hat man 1 von 2 abzuziehen und bleibet 1, welches im Rest auf die folgende Stelle gesetzet wird. Der gesuchte Rest ist folglich diese Zahl 1622009.

8. *Wenn eine kleinere Zahl von einer grösseren abgezogen werden soll, so schreibe man die kleinere so unter die grössere, dass die Unitäten unter die Unitäten, die Decaden unter die Decaden und so fort, zu stehen kommen. Ferner ziehe man unter dieselben eine Linie, unter welche der gesuchte Rest auf folgende Art geschrieben werden soll. Man fange die Operation bei den Unitäten zur rechten Rand an und ziehe die Unitäten von den Unitäten, ferner die Decaden von den Decaden, und so fort die übrigen Sorten, von einander ab, wenn die Anzahl einer jeglichen Sorte in der oberen Zahl grösser ist als in der unteren. Ist aber irgendwo die Anzahl von einer Sorte in der unteren Zahl grösser als in der oberen, so vermehre man nach der vorhergegebenen Regel die obere Zahl mit 10, da denn die Subtraction bewerkstelliget werden kann. In solchem Fall aber muss die folgende Figur zur linken Hand der unteren Zahl mit einem Stück, so durch ein Punkt angedeutet wird, vermehret werden. Auf solche Art stelle man also die Subtraction bei einer jeglichen Sorte an, und setze einen jeglichen Best auf seine gehörige Stelle unter die Linie. Da man denn nach Endigung der ganzen Operation den völligen gesuchten Rest unter der Linie finden wird.*

Die beiden Zahlen werden deswegen auf gemeldete Art unter einander geschrieben, damit die Zahlen von gleichen Sorten, als Unitäten, Decaden und so fort, unter einander zu stehen kommen und also füglicher gegen einander betrachtet werden können. Die grössere Zahl wird aber deswegen jederzeit oben geschrieben, auf dass man sich, wenn man das einmal bemerket, in der Subtraction nicht irren möchte. Wenn eine jegliche Figur der oberen Zahl grösser wäre als die darunter stehende, so könnte man die Operation nach Belieben, sowohl von der rechten als linken Hand, anfangen und würde auch immer einerlei Rest bekommen. Allein da, wenn eine Figur in der unteren Zahl grösser ist als die obstehende, die nach der linken Hand folgende Figur in der unteren Zahl um ein Stück vermehret und also verändert werden muss, so muss in solchem Fall die Operation von der rechten Hand angefangen und nach der linken fortgesetzet werden. Was nun bei Subtrahirung einer jeglichen Sorte überbleibt, wird unter die Linie unter eben diese Sorte gesetzet, damit eine jegliche in der Subtraction gefundene Zahl auf ihre gehörige Stelle zu stehen komme. Wo eine Figur der unteren Zahl der obstehenden gleich ist und also nichts überbleibt, wird eine Ziffer 0 unter die Linie an diese Stelle geschrieben, wofern solches nicht zu Ende der Operation geschieht. Denn in solchem Falle wäre es unnöthig, die 0 zu schreiben, weilen die 0 von der linken Hand anfangs nichts bedeuten und auch auf die Bedeutung der folgenden Zahlen keinen Einfluss haben. Die ganze Operation wird aber am füglichsten durch einige Exempel erläutert werden. Als von 273024 soll abgezogen werden 65372, welche demnach auf folgende Art geschrieben werden:

```
            2 7 3 0 2 4
              6.5.3.7 2
            -----------
Restirt     2 0 7 6 5 2
```

Hierauf sagt man: 2 von 4 bleiben 2, so unter die Linie geschrieben werden, Ferner: 7 von 2 kann man nicht, setzt deswegen zum folgenden 3 ein Punkt und sagt 7 von 12 bleiben 5. Drittens: 4 von 0 kann man nicht, setzt deswegen zum folgenden 5 ein Punkt und sagt 4 von 10 bleiben 6. Viertens: 6 von 3 kann man nicht, setzt also ein Punkt zu der folgenden Figur 6 und sagt 6 von 13 bleiben 7. Fünftens sagt man: 7 von 7 geht auf, schreibet also eine 0 unter die Linie. Endlich, da unter dem letzten 2 der oberen Zahl nichts steht, heisst es: nichts von 2 bleiben 2, so unter die Linie auf die letzte Stelle nach der linken Hand kommt. Weswegen also der gesuchte Rest gefunden wird 207652. Gleichergestalt werden auch folgende Exempel ausgerechnet:

```
  2 5 9 3 2 0 8 2 6 7 9 4 2 1 6 8
  . 7 0.9.6.3 5.4.8 2 3.7 0.6 3.9
---------------------------------
  1 8 8 3 5 7 2 7 8 5 5 7 1 5 2 9

3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
. 8.7.6.5.4.3.2.1.0.9.8.7.6.5.4.3
---------------------------------
2 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 7
```

Dergleichen Exempel kann sich nun ein jeder so viel aufsetzen und ausrechnen, als er zur Übung und zur Erlangung der gehörigen Fertigkeit von nöthen hat. Damit man aber auch wisse, in was für Fällen die Subtraction zustatten komme, und was für in dem gemeinen Leben vorfallende Fragen durch Hilfe der Subtraction können aufgelöset werden, so wollen wir dergleichen etliche Fragen beifügen.

Exempel der Subtraction

I In dem Jahr als man zählte 1734, stund im Kalender, dass das Schiesspulver 354 Jahr vorher erfunden worden sei. Nun ist die Frage, in welchem Jahr nach Christi Geburt das Pulver sei erfunden worden?

Antw.: Diese Jahr–Zahl wird gefunden, wenn man von der Zahl des damals laufenden Jahrs 1734 die Zahl 354 abzieht. Diese Frage gehört demnach zur Subtraction, dadurch man findet, dass das Pulver im Jahr 1380 erfunden worden sei.

II Einer muss von einer Erbschaft von 3672 Rubel, so ihm zugefallen, die Summe von 2837 Rubel wegen Schulden auszahlen. Nun ist die Frage wieviel Rubel ihm noch von dieser Erbschaft zurückbleiben?

Antw.: Weilen er von 3672 Rubel 2837 Rubel auszahlt, so müssen 2837 Rubel von 3672 Rubel abgezogen werden; was übrig bleibt, gibt die Anzahl der Rubel, so ihm noch zurückbleiben. Weswegen er also noch behält 835 Rubel.

III Ein Kaufmann ist seinen Creditoren schuldig 26209 Rubel, bezahlet an diese Schuld 17536 Rubel. Nun fragts sich, wieviel er nachdem noch schuldig bleibe?

Antw.: Weil hiedurch die Schuld um 17536 Rubel vermindert wird, so hat man nur die Zahl 17536 von der ganzen Schuld, 26209, abzuziehen, und der Rest, 8678, weist die noch rückständige Schuld.

IV Einer stirbt im 79sten Jahr seines Alters, nachdem er im Ehestand 37 Jahre gelebet; fraget sich also, in welchem Alter er sich verheiratet?

Antw.: Wenn man 37 von 79 abzieht, so weist der Rest, nämlich 42 Jahr, sein Alter, da er sich verheiratet.

9. *Letztens ist noch zu merken eine genaue Verwandtschaft, welche zwischen diesen zweien ersten Operationen, nämlich der Addition und Subtraction, stattfindet. Denn bei der Addition, wenn von der Summe zweier Zahlen die eine Zahl abgezogen wird, so muss allzeit die andere zurückbleiben. Ferner bei der Subtraction, wenn die kleinere Zahl zum Rest addiret wird, so kommt die grössere Zahl heraus; und wenn man den Rest von der grösseren Zahl subtrahiret, so kommt die kleinere Zahl heraus. Hieraus entspringen nun Proben sowohl für die Addition als die Subtraction. Denn nach dem ersten Satz kann ein jedes Exempel der Addition, darinn zwei Zahlen sind addiret worden, durch die Subtraction probirt werden. Kraft des zweiten Satzes kann ein Exempel der Subtraction durch die Addition, und kraft des dritten Satzes durch die Subtraction selbst probirt werden.*

Dass, wenn in der Subtraction der Rest zu der kleineren Zahl addiret wird, die grössere Zahl herauskomme, ist schon oben Nr. 2 gewiesen worden. Deswegen ist also die Summe des Rests und der kleineren Zahl der grösseren Zahl gleich. Hieraus folget nun von sich selbst, dass, wenn man von der Summe zweier Zahlen die eine Zahl abzieht, die andere übrig bleibe; und folglich auch, wenn man in der Subtraction von der grösseren Zahl, als der Summe des Rests und der kleineren, den Rest abzieht, dass die kleinere Zahl überbleiben müsse. Wenn man zum Exempel die Zahlen 5728 und 3875 zusammen addiret, so findet man diese Summe 9603. Von dieser Summe wenn man also die Zahl 5728 abzieht, so bleibt die Zahl 3875 übrig. Wenn man aber 3875 abzieht von 9603, so bleibt die andere Zahl, 5728, übrig. Wenn man ferner von der Zahl 12304 diese Zahl 8436 abzieht, so findet man diesen Rest 3868. Hatte man aber einen Zweifel, ob man in der Operation nicht gefehlet hätte, so kann man entweder die Zahlen 8436 und 3868 zusammein addiren und sehen, ob 12304 herauskommt. Oder man kann 3868 von 12304 abziehen und sehen, ob die Zahl 8436 zurückbleibt: wodurch man sich von der Richtigkeit der Operation vergewissern kann. Und dieses sind also die Proben, derer man sich bei der Subtraction bedienen kann.