CAPITEL 4

VON DER MULTIPLICATION ALS DER DRITTEN ARITHMETISCHEN OPERATION

1. *In der Mulliplication wird gelehret, wie man eine Zahl finden soll, welche entweder 2 mal oder 3 mal oder so viel mal als man beliebet grösser sei als eine gegebene Zahl. Diese Operation gibt demnach besondere Regeln an die Hand, durch derer Hülfe man eine gegebene Zahl nach Belieben vervielfältigen und also eine Zahl finden kann, in welcher die gegebene Zahl so viel mal enthalten ist, als man verlanget.*

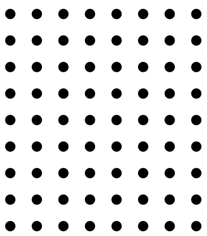
Der erste Begriff, den wir uns von der Arithmetik machen, leitet uns nur auf 2 Operationen, davon die eine in Vermehrung einer Zahl, die andere aber in Verminderung bestehet. Jenes geschiehet, wenn man zu einer Zahl noch eine oder mehr Zahlen hinzusetzt, dieses aber, wenn man von einer Zahl etwas hinwegnimmt: und diese Operationen sind also die Addition und Subtraction, davon in den zweien vorhergehenden Kapiteln ist gehandelt worden. Die übrigen Operationen aber, welche gleichfalls zur Arithmetik gezählet werden, entstehen aus diesen, und geben besondere Regeln für besondere Aufgaben, durch welche dieselben weit geschwinder und leichter aufgelöset werden können, als durch die Addition und Subtraction allein. Solchergestalt ist es mit der Multiplication beschaffen, als darinn gelehret wird, wie man eine sonderbare Art von Fragen, welche zur Addition gehören, weit bequemer auflösen könne, als durch blosse Addition geschehen kann. In der Multiplication wird nämlich gelehret, wie man nur allein die Summe zweier oder mehr Zahlen finden soll, welche einander gleich sind; da sich die Addition auf die Erfindung der Summe von zweien oder mehr gegebenen Zahlen, so einander auch nicht gleich sind, erstrecket. Woraus erhellet, dass alle Fragen, so zur Multiplication gehören, auch durch die Regeln der Addition aufgelöset werden können, wozu aber mehr Zeit und Mühe erfordert wird, als durch die Regeln der Multiplication. Hier ist aber nur die Rede von ganzen Zahlen, indem wir von gebrochenen Zahlen erst im folgenden einen Begriff bekommen werden. Also wenn man fragt, wieviel drei mal 128 ausmache, so ist dieses eine Frage, welche zur Multiplication gehöret; dieselbe kann aber auch durch die Addition aufgelöset werden, wenn man 128 drei mal unter einander schreibt und diese drei Zahlen zusammen addiret, wie folget:

$$\begin{array}{c} 128 \\ 128 \\ 128 \\ \hline 384 \end{array}$$

wodurch denn gefunden wird, dass 128 drei mal genommen 384 ausmache. Dieses Exempel kann zwar leicht durch die Regeln der Addition gerechnet werden; wenn man aber fragen sollte, wieviel 169 mal 1204 ausmache, so müsste man die Zahl 1204 hundertundneunundsechzig mal unter einander schreiben und diese 169 Zahlen zusammen addiren, da denn die Summe die verlangte Zahl geben würde. Dieses aber würde sowohl viel Zeit als Raum erfordern. Weswegen hierzu die Regeln der Multiplication weit vorteilhafter zu gebrauchen sind.

2. *Diejenige Zahl, davon die Frage ist, wieviel dieselbe etliche mal genommen ausmache, wird der Multiplicandus genannt; die Zahl aber, welche anzeigt, wieviel mal dieselbe genommen werden soll, wird der Multiplicator genannt. Da man denn auch zu sagen pflegt, dass jene Zahl durch diese multipliciret werden soll. Die Zahl aber, welche durch die Mulliplication gefunden wird, nennet man das Productum.*

Wenn man die Multiplication auf die Addition reduciren will, so wird darinn, wie vorher gemeldet, die Summe von 2 oder mehr Zahlen gesucht, so einander gleich sind. Hier ist nun erstlich diejenige Zahl zu merken, deren eine jegliche der Zahlen, welche zusammen sollen addiret werden, gleich ist; und diese Zahl wird nach den gewöhnlichen Worten, so zur Multiplication gebraucht werden, der Multiplicandus genannt. Ferner ist zu merken, wieviel mal diese Zahl soll genommen werden, oder wie gross die Anzahl der Zahlen, welche alle dieser gleich sind und zusammen addiret werden sollen. Diese Zahl wird nun der Multiplicator genannt. Die Summe aber, welche aus der Addition so vieler Zahlen, welche alle dem Multiplicando gleich sind, als der Multiplicator anzeiget, herauskommt, wird das Productum genannt. Als wenn man fragt, wie gross die Zahl sei, welche herauskommt, wenn man 128 drei mal nimmt, oder wenn man fragt, wieviel drei mal 128 ausmache, so ist 128 der Multiplicandus, die Zahl 3 aber der Multiplicator und die oben gefundene Summe, nämlich 384, das Productum. Gleichergestalt wenn die Frage ist, wie viel 169 mal 1204 ausmache, so ist 1204 der Multiplicandus, 169 der Multiplicator, und die Summe von 169 Zahlen, derer eine jede gleich ist der Zahl 1204, ist das Productum. Der Multiplicandus also und der Multiplicator sind die zwei gegebenen Zahlen, oder sind bei jedem vorgelegten Exempel bekannt: das Productum aber ist die Zahl, welche gefunden werden soll; wozu die Multiplication die nöthigen Regeln an die Hand gibt. Hiebei ist aber zu beobachten, dass der Multiplicandus und der Multiplicator unter sich verwechselt werden können, oder dass man, ohne einen Fehler zu begehen, den Multiplicator an des Multiplicandi Stelle, den Multiplicandum aber an des Multiplicatoris Stelle setzen könne. Als wenn man fragt, wieviel 8 mal 9 ausmache, oder wieviel herauskomme, wenn man 9 mit 8 multipliciret, so ist zwar 9 der Multiplicandus und 8 der Multiplicator: man kann aber auch 8 für den Multiplicandum annehmen und 9 für den Multiplicator, denn 9 mal 8 oder 8 neun mal genommen macht eben so viel aus, als 8 mal 9 oder 9 acht mal genommen, in beiden Fällen kommt nämlich 72 heraus.



Diese Übereinstimmung kann am füglichsten durch beigesetzte Figur bewiesen werden. In dieser Figur sind in einer jeglichen Reihe von der Linken zur Rechten 8 Punkte, dergleichen Reihen aber sind an der Zahl 9, weswegen die Anzahl aller Punkte ausweist, wieviel 8 neun mal genommen ausmacht, nämlich 72.

Wenn wir aber die Reihen dieser Punkte von oben herab betrachten, so finden wir in jeder Reihe 9 Punkte, und nur 8 solche Reihen, weswegen die Anzahl aller Punkte ausweist, wieviel 9 acht mal genommen ausmache. Da nun in beiden Fällen die Anzahl aller Punkte einerlei ist, nämlich 72, so sieht man hieraus, dass 8 neun mal genommen eben so viel ausmache als 9 acht malgenommen. Welcher Beweis ebenfalls sich auf alle anderen dergleichen Exempel erstrecket, sodass ein jeder die Wahrheit dieses Satzes aus diesem angeführten Exempel leicht einsehen wird. Da man nun nicht nöthig hat, zwischen denen beiden bei einer jeglichen Multiplication gegebenen Zahlen, nämlich dem Multiplicando und dem Multiplicatore, einen Unterschied zu betrachten, so pflegen auch beide mit einerlei Namen beleget, und Factores genennet zu werden: und aus Anleitung dieses Namens wird das Productum auch das Factum genennt. Gleichergestalt, wenn man sagen will, dass zum Exempel 8 neun mal genommen werden soll, so pflegt man auch zu sagen, dass die beiden Zahlen 8 und 9 mit einander sollen multipliciret werden. Hieraus wird nun ein jeder verstehen, wenn man sagt, dass die Multiplication lehre, zwei gegebene Zahlen mit einander multipliciren, indem es gleich viel ist, welche von diesen beiden Zahlen für den Multiplicandum oder Multiplicatorem angenommen wird.

3. *Ehe aber einer die Operation, wozu die Multiplication die Regeln an die Hand gibt, wirklich anstellen kann, so wird erfordert, dass derselbe wisse, alle Zahlen, so kleiner sind als 10, mit einander zu multipliciren, oder von je zweien solchen Zahlen das Productum oder Factum anzuzeigen, welches man entweder durch die Addition finden, oder aus nachfolgender Tabelle ersehen kann. Besser aber ist es, wenn man sich diese Tabelle wohl bekannt macht und dieselbe gar auswendig lernet.*

Die zwei Zahlen, welche mit einander multipliciret werden sollen, mögen so gross sein als man will, so werden solche Regeln gegeben werden, dass man dieselben mit einander multipliciren und das Productum finden kann, wenn man nur je zwei Zahlen, davon eine jede kleiner ist als 10, mit einander multipliciren kann. Dieses wird in der Multiplication ebenso erfordert, als in der Addition ist erfordert worden, dass man wisse, zwei Zahlen, so kleiner sind als 10, zusammen zu setzen oder zu addiren. Man hat aber hierinn diesen Vortheil, dass, wenn man gleich nicht wissen sollte, wie viel zwei solche einfache Zahlen mit einander multipliciret ausmachen, man dasselbe durch die Addition leicht finden kann. Als wenn einer je nicht wissen sollte, wieviel 9 sieben mal genommen ausmacht, so darf er nur 9 sieben mal unter einander schreiben und zusammen addiren, da ihm dann die Summe das gesuchte Product geben wird. Diese Mühe aber einem zu benehmen, so haben wir gewöhnlichermassen diese Tabelle beigefügt, woraus man sogleich das Product, welches durch Multiplicirung zweier einfachen Zahlen mit einander herauskommt, finden kann. Damit aber einer nicht nöthig habe, eine solche Tabelle allzeit bei sich zu führen, so ist nöthig, dass ein jeder, welcher im Rechnen fertig zu sein verlanget, diese Tabelle auswendig lerne, welche folget.

2	mal	2	macht	4
2	”	3	”	6
2	”	4	”	8
2	”	5	”	10
2	”	6	”	12
2	”	7	”	14
2	”	8	”	16
2	”	9	”	18

3	mal	3	macht	9
3	”	4	”	12
3	”	5	”	15
3	”	6	”	18
3	”	7	”	21
3	”	8	”	24
3	”	9	”	27

4	mal	4	macht	16
4	”	5	”	20
4	”	6	”	24
4	”	7	”	28
4	”	8	”	32
4	”	9	”	36

5	mal	5	macht	25
5	”	6	”	30
5	”	7	”	35
5	”	8	”	40
5	”	9	”	45

6	mal	6	macht	36
6	”	7	”	42
6	”	8	”	48
6	”	9	”	54

7	mal	7	macht	49
7	”	8	”	56
7	”	9	”	63

8	mal	8	macht	64
8	”	9	”	72

9	mal	9	macht	81

Diese Tabelle, welche zuerst von dem Pythagoras seinen Schülern soll vorgeleget worden sein, pflegt theils die Pythagorische Tabelle, theils auch das Einmaleins benennet zu werden. Diese letztere Benennung führet die selbe deswegen, weilen man gemeiniglich von ein mal eins ist eins anzufangen pflegt. Da aber eine jede Zahl mit eins multipliciret oder einmal genommen in ihrer Grösse unverändert bleibt, so haben wir die Multiplication der einfachen Zahlen mit eins nicht beigesetzet. Derowegen pflegt man zu sagen, dass eins nicht multiplicire; also ist ein mal 2 zwei, ein mal 3 drei und so fort in allen Zahlen, welche auch grösser sind als 9. Hiebei ist auch ferner zu merken,dass eine jegliche Zahl mit 0 multipliciret nichts ausmache, weilen nichts oder 0, es mag so vielmal genommen werden als man will, immer nichts bleibt. Dieses kann auch durch die obangebrachte Art, die Multiplication durch Punkte vorzustellen, erläutert werden, da die Anzahl der Punkte, so in einer Reihe stehen, den Multiplicandum vorstellet, die Anzahl der Reihen aber den Multiplicatorem: wo dann die Anzahl aller Punkten, so in allen Reihen enthalten sind, das gesuchte Product weiset. Wenn nun der Multiplicator eins ist, so ist nur eine Reihe vorhanden, und folglich das Productum so gross als der Multiplicandus selbst. Wenn aber der Multiplicator nichts ist, so muss gar keine Reihe und folglich auch kein Punkt vorhanden sein, weswegen also das Product nichts sein wird. Um aber den Gebrauch der Tabelle zu weisen, so ist zu beobachten, dass, wenn man von zweien Zahlen, die beide kleiner sind als 10, das Product wissen will, man die kleinere Zahl in der ersten Reihe von oben herab suche, und sehe, wo die andere Zahl in der zweiten Reihe daneben stehe, da denn die Zahl in der dritten Reihe das Product weisen wird.

4. *Wenn eine Zahl, so gross sie auch immer sein mag, durch eine einfache Zahl, welche kleiner ist als 10, multipliciret werden soll, so kann dasselbe durch die vorhergehende Tabelle bewerkstelliget werden, wenn man sowohl die Anzahl der Unitäten als Decaden und Centenariorum und so weiter mit derselben einfachen Zahl multipliciret, indem von keiner dieser verschiedenen Sorten mehr als 9 Stücke vorkommen können, und alle die gefundenen Producta zusammen thut; welche alle zusammen das gesuchte Product ausmachen.*

Aus der vorhergegebenen Tabelle kann man nicht nur finden, wieviel zum Exempel 7 mal 8 Unitäten ausmachen, sondern auch wieviel 7 mal 8 Decades, oder 7 mal 8 Centenarii, und so fort, 7 mal 8 von einer jeglichen Sorte betragen. Denn da man aus derselben Tabelle siehet, dass 7 mal 8 sechsundfünfzig machen, so verstehet man von sich selbst, dass 7 mal 8 Unitäten 56 Unitäten, 7 mal 8 Decades aber 56 Decades, und 7 mal 8 Centenarii 56 Centenarios ausmachen, und so fort bei allen übrigen Sorten. Derohalben kann man durch Hülfe dieser Tabelle die Anzahl der Stücke, so von einer jeglichen Sorte in einer zusammengesetzten Zahl vorhanden sind, mit einer jeglichen einfachen Zahl multipliciren. Wenn aber eine zusammengesetzte Zahl durch eine gegebene Zahl multipliciret werden soll, so wird man das gesuchte Product finden, wenn man einen jeglichen Theil, daraus dieselbe Zahl bestehet, mit dieser vorgegebenen multipliciret und alle diese herausgebrachten Producta zusammen in eine Summe bringet.

Dieses erhellet aus der Addition, als in welcher die Multiplication gegründet ist, in welcher man, um die Summe vieler Zahlen zu finden, alle besonderen Sorten oder Theile, aus welchen dieselben Zahlen bestehen, zusammen thut, da denn alle Summen von allen besonderen Sorten zusammen die ganze Summe ausmachen. Wenn ich zum Exempel die Zahl 237 soll mit 4 multipliciren, und dieses durch die Addition verrichte, indem ich die Zahl 237 vier mal unter einander schreibe und diese 4 Zahlen zusammen addire wie folget:

$$\begin{array}{r} 237 \\ 237 \\ 237 \\ 237 \\ \hline 948 \end{array}$$

so nehme ich in der That: erstlich die 7 Unitäten vier mal, zweitens auch die 3 Decades vier mal, und drittens auch die 2 Centenarios 4 mal, welche 3 besonderen Theile vier mal genommen zusammen die ganze Zahl vier mal genommen ausmachen, nämlich 948. Eben dieses Exempel nun durch die Multiplication auszurechnen, so hat man erstlich zu merken, dass die gegebene Zahl 237 aus folgenden Theilen bestehe, nämlich aus 7 Unitäten, 3 Decaden und 2 Centenariis. Wenn man ferner einen jeglichen Theil mit 4 multipliciret, so wird man finden, dass 4 mal 7 Unitäten 28 Unitäten ausmachen, 4 mal 3 Decades aber 12 Decades und 4 mal 2 Centenarii 8 Centenarios. Woraus erhellet, dass die Zahl 237 vier mal genommen ausmache 28 Unitäten, 12 Decades und 8 Centenarios: das ist 8 Unitäten, 4 Decades und 9 Centenarios oder 948, wie oben gefunden.

5. *Um demnach eine gegebene Zahl mit einer Zahl, welche kleiner ist als 10, zu multipliciren, multiplicire man erstlich die Unitäten mit der einfachen Zahl, als dem Multiplicator, und wenn das Product aus mehr als 9 Unitäten bestehet, so mache man daraus so viel Decades als geschehen kann, welche in der folgenden Operation zu den Decadibus müssen gethan werden, die übrigen Unitäten aber schreibt man in das Product in die erste Stelle nach der rechten Hand. Hierauf multiplicire man die Decades mit der gegebenen Zahl und zum Product setze man diejenige Decades, so in der Multiplication der Unitäten entsprungen, hinzu. Wenn nun dieses Product auch grösser ist als 9, so formire man daraus so viel Centenarios als sein kann und schreibe die übrigen Decades auf die zweite Stelle ins Product. Gleichergestalt verfahre man in der Multiplication der folgenden Sorten, da man denn das gesuchte Product bekommen wird.*

Dass ein jeder Theil oder eine jede Anzahl der Stücke einer jeglichen Sorte, daraus die Zahl, so multipliciret werden soll, bestehet, mit dem Multiplicator müsse multipliciret werden, und alle diese sonderbaren Producte zusammen das ganze gesuchte Product ausmachen, ist schon im vorhergehenden erwiesen worden. Wenn aber durch diese Multiplication mehr als 9 Stücke von einer Sorte herauskommen, so müssen, wie in der Addition gelehret worden, von je 10 solcher Stücke je ein Stück zu der folgenden Sorte geschlagen werden: welche demnach so lange im Sinn behalten, bis die Multiplication mit der folgenden Sorte geschehen, und dann zum Product gethan werden müssen. Diese Operation wird aber durch ein Exempel deutlicher begriffen werden. Als wenn man soll diese Zahl 3596 mit 7 multipliciren, so pflegt man dieselbe zu schreiben wie folgt:

3 5 9 6	Multiplikandus
:: ⁞⁞ :: 7	Multiplicator
2 5 1 7 2	Productum

Die Theile der gegebenen Zahl sind also 6 Unitäten, 9 Decades, 5 Centenarii und 3 Millenarii, derer ein jeder insbesondere mit 7 multipliciret werden muss, wie folget: 7 mal 6 Unitäten macht 42 Unitäten, das ist 4 Decades und 2 Unitäten; diese 2 Unitäten schreibt man unter die Linie auf die Stelle der Unitäten, die 4 Decades aber behält man zur folgenden Operation der Decaden. Alsdenn sagt man, 7 mal 9 Decades macht 63 Decades, wozu die vorher herausgekommenen 4 Decades gethan macht 67 Decades, das ist 6 Centenarii und 7 Decades; diese 7 Decades schreibt man ins Product auf die zweite Stelle, die 6 Centenarios aber behält man zum Product der folgenden Operation, da auch Centenarii herauskommen. Nämlich 7 mal 5 Centenarii machen 35 Centenarios, welche mit den 6 vorhergehenden 41 Centenarios betragen, das ist, 4 Millenarios und 1 Centenarium. Dieser 1 Centenarius wird auf seine gehörige Stelle in das Product geschrieben und die 4 Millenarii zur folgenden Operation aufbehalten. Endlich sagt man, 7 mal 3 Millenarii machen 21 Millenarii, dazu die vorigen 4 Millenarii hinzugethan machen 25 Millenarios, das ist 5 Millenarios, so in die gehörige Stelle ins Product gesetzet werden, und 2 Decades Millenariorum, welche, weilen keine Operation mehr übrig ist, gleichfalls auf ihre gehörige Stelle kommen. Das ganze Product, welches gefunden worden, ist demnach dieses 25172, welche Zahl folglich 7 mal grösser ist als die vorgegebene 3596. Wenn in der Operation, wie sie in diesem Exempel ist gemacht worden, die Namen der Sorten ausgelassen werden, weilen bei einer jeglichen Sorte die Operation einerlei ist, so wird die ganze Operation weit kürzer. Auf solche Art wollen wir derohalben folgendes Exempel ausrechnen:

57203846	Multiplicandus
9	Multiplicator
514834614	Productum

ln diesem Exempel wird nämlich eine Zahl gesucht, welche 9 mal grösser sei als die vorgegebene Zahl 57203846; man fängt demnach die Operation von den Unitäten an und sagt, 9 mal 6 oder 6 mal 9 ist 54, davon schreibt man 4 unter die Linie auf die erste Stelle zur rechten Hand in das Product, und 5 behält man im Sinn. Zweitens sagt man, 9 mal 4 oder 4 mal 9 ist 36, dazu thut man die 5, macht 41, schreibt also 1 unter die Linie auf die zweite Stelle, und behält 4 im Sinn. Drittens sagt man, 9 mal 8 oder 8 mal 9 ist 72, wozu die 4 gethan, macht 76, von dieser Zahl schreibt man 6 unter die Linie und behält 7 im Sinn. Viertens sagt man, 3 mal 9 ist 27, und 7 dazu macht 34, schreibt man also 4 unter die Linie und behält 3 zur folgenden Operation. Fünftens sagt man, 9 mal 0 ist 0, dazu die behaltenen 3 gethan macht 3, welche Zahl also unter die Linie geschrieben wird, und hat nichts nöthig im Sinn zu behalten. Sechstens sagt man, 2 mal 9 ist 18, setzt 8 ins Product und behält 1 im Sinn. Siebentens sagt man, 7 mal 9 ist 63, und 1 dazu ist 64, setzt 4 ins Product und behält 6 im Sinn. Achtens sagt man, 5 mal 9 ist 45 und die im Sinn behaltenen 6 macht 51, welche ganze Zahl, weilen die Multiplication geendigt, ins Product geschrieben wird; und auf diese Art ist das unter der Linie stehende Product gefunden worden. Auf gleiche Weise kann man nachfolgende Exempel auch ausrechnen:

$$\begin{array}{r} 385046 \\ 2 \\ \hline 770092 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7318245 \\ 3 \\ \hline 21954735 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1234567 \\ 4 \\ \hline 4938268 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90705036 \\ 5 \\ \hline 453525180 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10407118 \\ 6 \\ \hline 62442708 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 89123472 \\ 7 \\ \hline 623864304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5214796 \\ 8 \\ \hline 41718368 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 567898765 \\ 9 \\ \hline 5111088885 \end{array}$$

Aus welchen Exemplen genugsam zu ersehen ist, wie man eine jegliche Zahl, so gross dieselbe auch immer sein mag, durch eine einfache Zahl multipliciren und das Product finden soll; und ist von der ganzen Operation der Grund ausführlich erkläret worden. Nun wollen wir also fortfahren zu untersuchen, wie die Multiplication anzustellen ist, wenn der Multiplicator eine zusammengesetzte Zahl oder grösser als 9 ist.

6. *Wenn eine Zahl, so gross dieselbe auch immer ist, mit 10 multipliciret werden soll, so hat man nur nöthig, zu derselben Zahl von der rechten Hand eine 0 hinzuzuschreiben. Soll aber eine Zahl mit 100 multipliciret werden, so hat man zwei Nullen nöthig hinzuzusetzen. Soll man mit 1000 multipliciren, so schreibt man drei Nullen hinzu; mit 10000 vier Nullen, und so fort, immer so viel Nullen als in solchen Multiplicatoren nach der 1 stehen.*

Wenn eine Zahl mit 10 multipliciret werden soll, so muss ein jeglicher Theil derselben Zahl mit 10 multipliciret werden. Multipliciret man aber die Unitäten mit 10, so kommen so viel Decaden heraus, als vorher Unitäten da waren. Die Decaden aber werden in Centenarios, die Centenarii aber in Millenarios, und so fort, verwandelt. Da nun, wann zu derselben Zahl von der rechten Hand eine 0 hinzugesetzet wird, eine jegliche Sorte in die folgende, so zehn mal grösser ist, verwandelt wird, so wird durch Hinzusetzung einer 0 die ganze Zahl 10 mal grösser. Also ist 10 mal 5783 so viel: 57830. Gleichergestalt, wenn zu einer Zahl von der rechten Hand zwei Nullen hinzugeschrieben werden, so werden die Unitäten in Centenarios, die Decaden in Millenarios, die Centenarii in Decadesmillenariorum, und so fort, eine jegliche Sorte in eine andere, so 100 mal grösser ist, verwandelt. Weswegen durch Hinzusetzung zweier Nullen die ganze Zahl mit 100 multipliciret wird; also wenn 328 mit 100 multipliciret werden soll, so kommt 32 800 heraus. Auf gleiche Art sieht man, dass, wenn drei Nullen an eine Zahl gehänget werden, dieselbe 1000 mal grösser wird, und so weiter fort. Wenn man also sollte diese Zahl 5430 mit dieser Zahl 1000000 multipliciren, so würde das Product sein diese Zahl 5430000000. Hieraus sieht man also, wie eine jegliche Zahl multipliciret werden müsse, wenn der Multiplicator eine solche Zahl ist, welche durch ein 1 mit einer gewissen Anzahl Nullen darhinten geschrieben wird. Und dieses ist das Fundament von den Regeln der Multiplication, wenn der Multiplicator eine grosse zusammengesetzte Zahl ist, wie im folgenden weiter wird ausgeführet werden.

7. *Wenn der Multiplicator oder die Zahl, damit eine vorgegebene Zahl multiplicirei werden soll, eine einfache Zahl ist mit einer gewissen daran gehängten Anzahl Nullen, als 60, 300, 4000, 70000 und dergleichen, so findet man das gesuchte Product, wenn man erstlich die vorgegebene Zahl mit der einfachen Zahl multipliciret, und zu dem gefundenen Product so viel Nullen von der rechten Hand hinzusetzet, als in dem Multiplicatore vorhanden sind.*

Wann der Multiplicator, damit eine Zahl multiplicirt werden soll, eine solche Zahl ist, welche aus der Multiplication zweier Zahlen mit einander entsprungen, so bekommt man das wahre Product, wann man die vorgegebene Zahl erstlich mit einer dieser zweien Zahlen multiplicirt, und dann dieses Product noch mit der anderen Zahl. Als wann ich soll 47 mit 6 multipliciren, weilen 6 so viel ist als 2 mal 3, so finde ich das verlangte Product, wann ich erstlich mit 2 multiplicire, da ich dann 94 bekomme, und dann diese 94 noch mit 3 multiplicire, welches gibt 282; und dieses ist die Zahl, welche herauskommt, wann 47 mit 6 multiplicirt wird. Dann weilen 6 so viel ist als 2 mal 3, so ist das gesuchte Product, nämlich 6 mal 47, so viel als 2 mal 3 mal 47, oder 3 mal 2 mal 47. Um nun zu finden, was 3 mal 2 mal 47 ist, so sucht man erstlich, was 2 mal 47 ist, nämlich 94; derowegen ist 3 mal 2 mal 47 so viel als 3 mal 94, und folglich 3 mal 94 so viel als 6 mal 47. Dieses ist also der Grund dieses Satzes, welcher bei allen vorkommenden Exempeln von gleicher Kraft ist. Durch Hülfe dieses Satzes können also viel Exempel der Multiplication ausgerechnet werden, wann gleich der Multiplicator keine einfache Zahl ist. Als wann man 127 mit 63 multipliciren wollte, so kann man, da 63 so viel ist als 7 mal 9, die Zahl 127 erstlich mit 7 multipliciren, welches macht 889. Hernach multiplicire man 889 mit 9, so bekommt man 8001, welches so viel ist als 63 mal 127. Dann 8001 ist so viel als 9 mal 889, nun aber 889 ist so viel als 7 mal 127, derohalben ist 8001 so viel als 9 mal 7 mal 127. Es ist aber 9 mal 7 so viel als 63, derowegen ist 8001 so viel als 63 mal 127, aus welchem Exempel die Wahrheit dieses Satzes noch mehr erhellet. Um aber auf die gegebene Regel selbst zu kommen, so ist zu merken, dass eine jegliche Zahl, welche mit einer einfachen Zahl und einer gewissen Anzahl daran gehängter Nullen geschrieben wird, herauskomme, wann man die einfache Zahl mit 1 nebst eben so viel daran gehängten Nullen multiplicirt. Derohalben wann mit einer solchen Zahl multipliciret werden soll, so multiplicire man erstlich nur mit der einfachen Zahl, und was herausgekommen, dasselbe multiplicire man ferner mit 1 nebst so viel darangehängten Nullen, welches im vorhergehenden Nr. 6 ist gewiesen worden, allwo wir gezeiget, dass, um ein solches Product zu finden, nur nöthig sei, an die Zahl, welche multipliciret werden soll, so viel Nullen hinzuzusetzen, als in solchem Multiplicatore nach dem 1 stehen. Wann derohalben der Multiplicator, wie wir setzen, eine einfache Zahl ist nebst einer gewissen Anzahl darangehängter Nullen, so multiplicire man den Multiplicandum erstlich mit der einfachen Zahl, und zum Product schreibe man zur rechten Hand so viel Nullen, als im Multiplicatore folgen nach der einfachen Zahl. Als wenn man diese Zahl 543 mit 700 multipliciren soll, so multiplicire man erstlich 543 mit 7, da man dann finden wird 3801, dazu zwei Nullen hinzugefügt geben 380100, und dieses ist das gesuchte Product, nämlich 700 mal 543. Da man nun die Multiplication mit der einfachen Zahl von der Rechten gegen der Linken verrichtet, so kann man gleich von der Rechten so viel Nullen schreiben als im Multiplicatore befindlich, und dann die Multiplication mit der einfachen Zahl verrichten. Auf diese Art wird also die Operation des vorigen Exempels sein wie folgt:

$$\begin{array}{rl} 543 & \text{Multiplicandus} \\ 700 & \text{Multiplicator} \\ \hline 380100 & \text{Productum} \end{array}$$

Gleichergestalt wann 2758 mit 500000 multipliciret werden soll, wird die Operation also stehen:

$$\begin{array}{r} 2758 \\ 500000 \\ \hline 1379000000 \end{array}$$

Diese Operation beruhet demnach darauf, dass solche Multiplicatores zwei Factores haben oder durch die Multiplication zweier Zahlen entsprungen sind. Nämlich im erstern Exempel ist der Multiplicator 700 so viel als 7 mal 100, und im letztern ist 500000 so viel als 5 mal 100000; wie aber mit solchen Zahlen eine jegliche Zahl multipliciret werden soll, ist schon im vorhergehenden gewiesen worden.

8. *Wann der Multiplicator eine zusammengesetzte Zahl ist oder aus vielen Figuren bestehet, so muss der Multiplicandus mit einem jeglichen Theil, daraus der Multiplicator besteht, multiplicirt, und darauf alle diese gefundenen Producte zusammen addirt werden, da dann die Summa, welche herauskommt, das verlangte Productum sein wird.*

Wir haben oben gewiesen, dass, wann der Multiplicandus aus etlichen Theilen besteht, ein jeglicher Theil insbesondere mit dem Multiplicator müsse multiplicirt, und diese besonderen Producte zusammengesetzet werden, als deren Summe das gesuchte Product geben muss. Da nun der Multiplicandus und der Multiplicator unter sich verwechselt und einer an des anderen Stelle gesetzet werden kann, so ist eben dieses auch von dem Multiplicator zu verstehen. Derohalben, wann der Multiplicator eine zusammengesetzte Zahl ist oder aus mehr als einer Figur bestehet, so muss der Multiplicandus mit einem jeglichen Theil des Multiplicators multiplicirt und alle diese sonderbaren Producte zusammen addiret werden: da dann derselben Summe das gesuchte Product geben wird. Die Theile aber, daraus eine zusammengesetzte Zahl bestehet, sind die verschiedenen Sorten als Unitäten, Decades, Centenarii und so fort, von deren jeder nicht mehr als 9 Stücke vorhanden sein können. Derobalben muss der Multiplicandus erstlich mit so viel Unitäten und dann mit so viel Decaden, ingleichen mit so viel Centenariis und so weiter, als im Multiplicatore befindlich sind, multipliciret und alle herausgebrachten Producte in eine Summe gebracht werden. Es ist aber im vorhergehenden Satze gewiesen worden, wie eine jegliche Zahl mit einer einfachen Zahl, hinter welcher etliche Nullen stehen, multiplicirt werden soll; und eben dergleichen Zahlen sind alle diese Theile, aus welchen ein zusammengesetzter Multiplicator bestehet, weswegen die Multiplication mit einem solchen zusammengesetzten, oder aus mehr Figuren bestehenden Multiplicator keine Schwierigkeit haben wird. Als wann man 4738 mit 358 multipliciren soll, so sind die Theile des Multiplicatoris erstlich 8, dann 50 und drittens 300. Derowegen multiplicire man erstlich die Zahl 4738 mit 8, welches gibt 87904. Zweitens multiplicire man die Zahl 4738 mit 50, dieses gibt 236900. Drittens multiplicire man die vorgegebene Zahl mit 300, dieses gibt 1421400. Nun diese drei Producta addire man zusammen wie folget:

$$\begin{array}{r} 37904 \\ 236900 \\ 1421400 \\ \hline 1696204 \end{array}$$

so ist diese Summe das verlangte Product. Damit aber die ganze Operation desto bequemer vollzogen werden könne, so pflegt man diese besonderen Producte gleich so unter einander zu schreiben, dass die Unitäten unter die Unitäten und alle gleichen Sorten unter einander zu stehen kommen, damit man dieselben gleich zusammen addiren könne, als wie folget:

$$\begin{array}{rl} 4738 & \text{Multiplicandus} \\ 358 & \text{Multiplicator} \\ \hline 37904 & \\ 236900 & \\ 1421400 & \\ \hline 1696204 & \text{Productum} \end{array}$$

Man schreibt nämlich erstlich den Multiplicator unter den Multiplicandum, und zieht unter dieselben eine Linie. Hierauf multipliciret man den Multiplicandum mit der Anzahl der Unitäten, so im Multiplicatore vorhanden, nämlich mit 8, schreibt das Product unter die Linie, wie oben bei der Multiplication mit einfachen Zahlen ist gelehret worden. Ferner multiplicirt man mit den Decaden des Multiplicators als mit 50, da man dann nach der gegebenen Regel erstlich in die Stelle der Unitäten eine Null setzet, und im übrigen mit 5 multipliciret. Drittens multipliciret man mit den Centenariis oder in diesem Fall mit 300, indem man in die zwei ersten Stellen von der rechten Hand zwei Nullen setzt, und hierauf mit 3 multiplicirt. Wenn man nun die Figuren wohl unter einander schreibt, so kommen auf diese Art in den besonderen Producten alle [gleichen] Sorten unter einander zu stehen, und wird deswegen die Addition um soviel bequemer. Hat man also alle diese besonderen Producte gefunden, so wird darunter eine Linie gezogen und dieselben zusammen addirt, wodurch man das ganze verlangte Product erhält. Man kann auch um der Kürze willen die Nullen, so in den Producten der höheren Sorten gegen der rechten Hand geschrieben werden müssen, auslassen, indem dieselben bei der Addition nichts austragen, wie folget:

$$
\begin{array}{r}
4738 \\
358 \\
\hline
37904 \\
23690 \\
14214 \\
\hline
1696204
\end{array}
$$

Da dann zu merken, dass das Product von einer jeglichen Figur des Multiplicators von der rechten Hand auf eben der Stelle anfange, da die Figur des Multiplicators steht. Nämlich das Product von der ersten Figur gegen der rechten Hand des Multiplicators fängt an auf der ersten Stelle. Das Product von der zweiten Figur fängt an auf der zweiten Stelle, das von der dritten auf der dritten und so fort.

9. *Wenn zwei Zahlen, so gross dieselben auch immer sein mögen, mit einander multipliciret werden sollen, so schreibt man eine, welche man für den Multiplicator annimmt, auf gewöhnliche Art unter die andere, und zieht unter dieselben eine Linie. Hierauf multipliciret man den Multiplicandum mit einer jeglichen Figur des Multiplicators insbesondere und schreibt diese Producte unter einander unter die Linie. Ein jedes aber von diesen Producten muss auf eben derjenigen Stelle von der rechten Hand an zu schreiben angefangen werden, auf welcher die Figur, mit welcher multipliciret wird, steht. Hat man nun auf diese Art alle Producte von allen Figuren des Multiplicators gefunden, und auf beschriebene Art unter einander gesetzet, wird darunter nochmals eine Linie gezogen, und alle diese besonderen Producte zusammen addiret, da dann die Summe das gesuchte Product sein wird.*

Auf diese Weise wird also die Multiplication mit den grössten Zahlen auf Multiplicationen mit einfachen Zahlen, so kleiner sind als 10, reduciret. Und hierinn bestehet hauptsächlich der Vortheil, den die arithmetischen Operationen haben, dass darinn gewiesen wird, wie man Operationen, welche mit den grössten Zahlen sollen verrichtet werden, auf kleine Zahlen bringen könne, mit welchen ein jeder, der auch nicht rechnen gelernet hat, leicht umgehen kann. Also ist es zur Multiplication genug, wenn man nur die einfachen Zahlen mit einander zu multipliciren weisst. Dieses haben wir schon im vorhergehenden genugsam ausgeführet, aus welchem auch der Grund der ganzen Operation, wie wir dieselbe hier beschrieben, deutlich erhellet. Um aber in dieser Operation eine Fertigkeit zu erlangen, so ist das Fürnehmste, dass man sich angewöhne, die Zahlen recht ordentlich zu schreiben, so dass alle, welche zu einer Sorte gehören, schnurgerad in einer Reihe unter einander geschrieben werden, damit man die besonderen Sorten deutlich von einander unterscheiden könne, und keine Konfusion entstehe. Von den zweien vorgegebenen Zahlen, welche mit einander multipliciret werden sollen, ist es nun gleichgültig, welche man für den Multiplicatorem annehmen und unter die andere schreiben will; es ist aber doch bequemer, die kleinere Zahl, welche aus weniger Figuren besteht, unter die andere zu schreiben, weilen man auf diese Art weniger sonderbare Producte bekommt, so zusammen addiret werden müssen. Man bekommt aber allezeit so viel besondere Producte, und folglich so viel Zahlen zusammen zu addiren, als die Anzahl der Figuren ist, aus welchen der Multiplicator bestehet: ausgenommen, wenn eine oder mehr Figuren desselben Nullen oder nichts sind; wovon wir nachgehends einige Erinnerungen geben werden. Nun wollen wir durch einige Exempel die obbeschriebene Operation erläutern. Als es soll diese Zahl 835047 mit dieser Zahl 67894 multipliciret werden, so schreibt man dieselben wie folget:

835047	Multiplicandus
67894	Multiplicator
3340188	Product von 4
7515423	Product von 9
6680376	Product von 8
5845329	Product von 7
5010282	Product von 6
56694681018	Productum

In diesem Exempel multipliciret man nun erstlich den Multiplicandum mit 4 als der ersten Figur des Multiplicators und schreibt das Product so unter die Linie, dass die erste Figur, nämlich 8, unter das 4 zu stehen komme. Zweitens multipliciret man den Multiplicandum mit der zweiten Figur des Multiplicators, und fängt in Schreibung dieses Products von der zweiten Stelle, nämlich unter dem 9, zu schreiben an. Gleichergestalt fängt das Product vom 8 auf der dritten Stelle, nämlich unter dem 8 an, und so fort, wie aus dem Exempel selbst zu ersehen. Endlich addiret man alle diese Producte zusammen, da dann die Summe das gesuchte ganze Product gibt.

Auf gleiche Weise sind auch folgende Exempel ausgerechnet worden:

23578	829357
13	38
70734	6634856
23578	2488071
306514	31515566

156274	734862
295	567
781370	5144034
1406466	4409172
312548	3674310
46100830	416666754

```
        987654321
        123456789
        ---------
       8888888889
      7901234568
     6913580247
    5925925926
   4938271605
  3950617284
 2962962963
1975308642
987654321
------------------
121932631112635269
```

Wann aber in dem Multiplicator irgend eine Figur nichts oder eine Null ist, so würde das ganze Product, so daher entspringt, aus lauter Nullen bestehen und folglich auch nichts sein, dieweil eine jede Zahl mit 0 multipliciret nichts ausmacht. Wann derowegen dieses geschieht, so lässt man der Kürze halber das ganze Product aus, und schreitet gleich zu der Multiplication mit den folgenden Figuren des Multiplicators fort. Da man aber wohl beobachten muss, dass man nichtsdestoweniger ein jegliches Product unter der Zahl des Multiplicators, aus welcher dasselbe entstanden, zu schreiben anfange, als aus folgenden Exempeln zu ersehen:

```
   58346          9348
     201          3007
--------      --------
   58346         65436
116692        28044
--------      --------
11727546      28109436
```

```
        24680135
        10203005
----------------
       123400675
     74040405
   49360270
24680135
----------------
251811540805675
```

Wann aber entweder im Multiplicando oder im Multiplicatore oder in beiden sich zu Ende bei der rechten Hand Nullen befinden, so dienet in solchen Fällen folgende Regel, dadurch man der überflüssigen Nullen überhoben sein kann.

10. *Wann in dem Multiplicatore oder Multiplicando oder in beiden die letzten Figuren nach der rechten Rand Nullen sind, so pflegt man alle diese zu Ende stehenden Nullen abzuschneiden und die*

Multiplication mit den übrigen Zahlen zu vollziehen. Zu dem auf diese Art gefundenen Product aber müssen nach der rechten Hand so viel Nullen hinzugesetzet werden, als von Anfang sind weggeworfen worden.

Wann der Multiplicator eine einfache Zahl mit etlichen angehängten Nullen ist, so multipliciret man nur mit der einfachen Zahl, setzt aber zum gefundenen Product so viel Nullen dazu, als hinter der einfachen Zahl im Multiplicator gestanden. Davon haben wir schon oben Nr. 7 den Grund angezeiget, welcher so beschaffen, dass daraus auch die Wahrheit dieses Satzes dargethan werden kann. Es besteht nämlich das Fundament davon hierinn, dass, wenn ein Multiplicator ein Factum ist von zwei Factoribus oder aus der Multiplication zweier Zahlen mit einander entsprungen, man das wahre Product erhalte, wenn man den Multiplicandum erstlich mit einem Factore des Multiplicators multiplicire, und was herausgekommen, nochmals mit dem andern Factore multiplicire. Ich nenne allhier aber Factores, wie schon oben erinnert worden, die beiden Zahlen, welche, mit einander multipliciret eine Zahl hervorgebracht haben.

¡p¿ Nun aber ist eine jede Zahl, an welche von der Rechten Nullen gehängt sind, ein Factum oder Product aus derselbigen Zahl und 1 mit so viel darhinter stehenden Nullen. Als 230 ist das Product von 23 und 10, oder diese beiden Zahlen sind die Factores von 230. Gleichergestalt ist 478000 so, viel als 478 mal 1000 oder das Product von diesen Zahlen. Wann man derohalben eine vorgegebene Zahl mit 478000 multipliciren soll, so multiplicire man dieselbe erstlich nur mit 478, und was herauskommt noch mit 1000, welches geschieht, wann man von der rechten Hand drei Nullen dazu setzt. Wann sich demnach im Multiplicatore von der rechten Hand Nullen befinden, so kann man erstlich nur die Nullen weglassen, und nur mit der übrigen Zahl multipliciren; zum gefundenen Product aber muss man so viel Nullen von der rechten Hand hinzuschreiben, als man im Multiplicatore weggelassen hat. Als wann man soll 5339 mit 24600 multipliciren, so multipliciret man nur mit 264 welche man also unter die Zahl 5339 schreibt. Damit man aber die Nullen nicht vergesse, kann man dieselben gleichwohl zum Multiplicatore hinzusetzen; bei der Multiplication aber hat man auf dieselben nicht zu sehen, sondern schreibt dieselben nur zum gefundenen Product, wie aus beistehender Operation zu sehen:

```
    5339
     24600
  --------
   32034
  21356
 10678
  --------
 131339400
```

Eine gleiche Beschaffenheit hat es, wann im Multiplicando von der rechten Hand eine oder etliche Nullen stehen; weilen der Multiplicandus mit dem Multiplicator verwechselt, und an desselben Stelle gesetzt werden kann. Als wann man soll 1345000 mit 48 multipliciren, so multiplicire man erstlich 48 mit 1345, und was herauskommt noch mit 1000. Weil es aber gleichviel ist, ob man 48 mit 1345 oder 1345 mit 48 multipliciret, so multipliciret man der Kürze halber 1345 mit 48 und zum gefundenen Product schreibt man die drei Nullen. Man kann auch der Deutlichkeit halber die Nullen gegen der rechten Hand vorschiessend zum Multiplicando setzen, damit man nach geendigter Operation gleich sehe, wieviel Nullen man zum Product zu setzen habe, wie aus folgender Operation zu sehen:

```
   1345000
        48
  --------
  10760
  5380
  --------
  64560000
```

da die drei Nullen zwar bei dem Multiplicando stehen, aber erst nach geendigter Multiplication an das Product gehänget werden. Wann nun sowohl der Multiplicandus als Multiplicator sich mit Nullen endigen, so kann die Operation aus diesen beiden Fällen angestellet werden. Als wann man 1987000 mit 3700 multipliciren sollte, so multiplicire man erstlich 1987000 mit 37, und zum Product schreibe man zwei Nullen. Um aber 1987000 mit 37 zu multipliciren, so multiplicirt man nach der gegebenen Regel 1987 mit 37 und an das Product hängt man drei Nullen. Derowegen, um die beiden vorgegebenen Zahlen mit einander zu multipliciren, so multiplicirt man nur, nachdem man die Nullen beiderseits zu Ende weggeworfen, 1987 mit 37 und schreibt zum gefundenen Product fünf Nullen, nämlich so viel als man weggeworfen. Die Nullen kann man zwar sowohl bei dem Multiplicando als Multiplicatore stehen lassen, ob man gleich auf dieselben nicht sieht, bis die Multiplication geendigt, damit man gleich sehe, wieviel Nullen man an das gefundene Product anzuhängen habe, als aus der Operation dieses Exempels zu sehen:

```
   1987000
      3700
  ----------
  13909
  5961
  ----------
  7351900000
```

Also wann diese Zahl 54032000 mit dieser 2540000 multipliciret werden soll; so findet man das Product auf folgende Art:

```
     54032000
       2540000
  ---------------
     216128
    270160
   108064
  ---------------
   137241280000000
```

Wir beschliessen also dieses Capitel mit einigen Exempeln, damit man den Gebrauch der Multiplication in vielerlei vorfallenden Fällen sehen könne.

Exempel der Multiplication

I Ein grosser Zirkul, so man sich um die Erdkugel herumgezogen vorstellt, pflegt in 360 Grad getheilt zu werden. Man hat aber gefunden, dass 105 Werste einen solchen Grad ausmachen. Derowegen ist die Frage, wieviel Werste der Umkreis der Erde gross sei?

Antw.: Weilen ein Grad 105 Werste hält, der Umkreis der Erde aber 360 Grade, so ist klar, dass der ganze Umkreis der Erde 105 mal 360 Werste enthalte. Diese verlangte Anzahl der Werste wird also durch die Multiplication gefunden, indem man 105 mit 360 multiplicirt; wodurch man also findet 37800 Werste.

- Ein gemeines Jahr von 365 Tagen, wieviel hält dasselbe Stunden?

  Antw.: Da ein Tag 24 Stunden hält, so machen 24 mal 365 Stunden ein Jahr. Weswegen die verlangte Anzahl Stunden durch die Multiplication gefunden wird, indem man 365 mit 24 multipliciret. Dadurch findet man also 8760 Stunden.

- Ein Kriegsheer stehet in einer ablangen gevierten Ordnung, da stehen der Länge nach 156 Mann, nach der Breite aber 97 Mann. Nun ist die Frage, aus wieviel Mann das ganze Kriegsheer bestehe?

  Antw.: Da in der Breite 97 Mann stehen, so sind der Länge nach 97 Reihen, in deren jeder 156 Mann stehen. Derohalben besteht das ganze Heer aus 97 mal 156 Mann, welches multiplicirt macht 15132 Mann.