CAPITEL 8

VON DER MULTIPLICATION MIT GEBROCHENEN ZAHLEN

1. *Wann ein Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man nur den Zähler mit der ganzen Zahl und lässt den Nenner unverändert. Gleichergestalt, wann eine ganze Zahl samt einem Bruche durch eine ganze Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man dadurch die ganze Zahl und auch den Bruch insbesondere; da dann diese beiden Producte zusammen das gesuchte Product ausmachen. Bei dem gefundenen Bruche hat man aber ferner zu sehen, ob derselbe mehr als ein Ganzes enthalte, oder auch, ob derselbe verkleinert werden könne, als in welchen Fällen es dienlich ist, den Bruch in der leichtesten Form auszudrücken.*

Der Grund dieses Satzes beruhet auf der Natur der Multiplication, als welche nichts anders ist als eine Addition vieler Zahlen, so einander gleich sind, wie oben bei der Multiplication mit ganzen Zahlen ist dargethan worden. Wann also ein Bruch mit 2 multiplicirt werden soll, so darf man nur denselben Bruch zwei mal setzen und diese beiden Brüche zusammen addiren, welche, weilen sie sowohl gleiche Nenner als gleiche Zähler haben, so wird die Summe oder das Product ein Bruch sein, dessen Zähler zwei mal so gross als der Zähler des gegebenen Bruchs, der Nenner aber dem Nenner des gegebenen Bruchs gleich ist. Wann derowegen ein Bruch mit 2 multiplicirt werden soll, so muss man nur den Zähler mit 2 multipliciren. Also wird das Product von 2 und $\frac{1}{3}$ oder zwei mal $\frac{1}{3}$ sein $\frac{2}{3}$, und 2 mal $\frac{4}{7}$ wird geben $\frac{8}{7}$ oder $1\frac{1}{7}$. Gleichergestalt, wann ein Bruch mit 3 oder 4 oder einer anderen Zahl multiplicirt werden soll, so geschieht diese Multiplication, wann man den gegebenen Bruch drei mal oder vier mal oder so viel mal als der Multiplicator anzeiget, setzt, und diese Brüche zusammen addirt. Weilen nun diese Brüche einander völlig gleich sind, so addirt man nur die Zähler, das ist, man multiplicirt den Zähler des gegebenen Bruchs mit 3, 4 oder einer anderen Zahl, so gegeben ist. Hieraus erhellet nun, dass, wann ein Bruch mit einer gegebenen Zahl multiplicirt werden soll, das Product gefunden werde, wann man nur den Zähler mit der gegebenen Zahl multiplicirt, den Nenner aber unverändert lässt.

Also wird 3 mal $\frac{1}{2}$ machen $\frac{3}{2}$, das ist $1\frac{1}{2}$; und 4 mal $\frac{3}{14}$ wird geben $\frac{12}{14}$, das ist $\frac{6}{7}$; und 15 mal $\frac{2}{5}$ gibt $\frac{30}{5}$ das ist 6 Ganze. Um also einen Bruch mit einer gegebenen Zahl zu multipliciren, hat man diese Regel: man multiplicirt den Zähler des Bruchs mit der gegebenen Zahl, und unter das Product als den Zähler schreibt man den Nenner des gegebenen Bruchs, so hat man das gesuchte Product.

Zu mehrerer Erläuterung können folgende Exempel dienen.

21	mal	$\frac{5}{28}$	macht	$\frac{105}{28}$,	das ist	$3\frac{3}{4}$
144	mal	$\frac{19}{60}$	macht	$\frac{2736}{60}$,	das ist	$45\frac{3}{5}$
250	mal	$\frac{27}{50}$	macht	$\frac{6750}{50}$,	das ist	135

Ob aber gleich diese Regel allhier nur dienet, um einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, so ist dieselbe doch allgemein und enthält zugleich die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruche. Nämlich, wann ein Bruch mit einem Bruche multiplicirt werden soll, so darf man gleichfalls nur den Zähler des einen Bruchs mit dem anderen Bruche multipliciren, um den

Zähler des gesuchten Products zu bekommen, dessen Nenner der vorige Nenner bleibt. Weilen aber auf diese Art gemeiniglich der Zähler des genannten Bruchs selbst ein Bruch wird, so kann man mit einem solchen Product nicht zufrieden sein; als wann $\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{7}$ multiplicirt werden sollte, kommt nach dieser Regel für das Product ein Bruch heraus, dessen Zähler 2 mal $\frac{4}{7}$, das ist $\frac{8}{7}$, und der Nenner 3 ist, woraus man sich aber noch keinen deutlichen Begriff von diesem Product machen kann. Wir werden aber im folgenden aus eben diesem Fundament deutlicher zeigen, wie in solchen Multiplicationen das Product durch einen eigentlichen Bruch, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, ausgedrückt werden könne. Allhier aber brauchen wir diese gegebene Regel nur zu solchen Fällen, da ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, als in welchen Multiplicationen diese Regel keiner Schwierigkeit unterworfen ist. Weilen wir nun durch Hülfe dieser Regel einen jeglichen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren können, so kann auch eine Zahl, so aus einer ganzen und gebrochenen Zahl zusammengesetzt ist, leicht mit einer jeglichen ganzen Zahl multiplicirt werden. Dann da in solchen Fällen der Multiplicator eine ganze Zahl ist, der Multiplicandus aber aus zwei Theilen bestehet, davon einer gleichfalls eine ganze, der andere aber eine gebrochene Zahl ist, so wird das Product gefunden, wann man einen jeglichen Theil des Multiplicandi insbesondere mit dem Multiplicator multiplicirt und die Producte zusammen addirt. Als wann $3\frac{2}{5}$ mit 2 multiplicirt werden sollen, so findet man $6\frac{4}{5}$ dann 2 mal $\frac{2}{5}$ macht $\frac{4}{5}$ und 2 mal 3 macht 6. Item $7\frac{4}{9}$ mit 6 multiplicirt geben $42\frac{24}{9}$, das ist $44\frac{2}{3}$; dann 6 mal $\frac{4}{9}$ gibt $\frac{24}{9}$, das ist $2\frac{2}{3}$, und 6 mal 7 ist 42, wozu die vorigen 2 gethan 44 ausmachen. Man kann aber eben dergleichen Exempel auch auf die vorige Art, obgleich mit grösserer Mühe, ausrechnen, wann man die aus einer ganzen und gebrochenen zusammengesetzte Zahl in einen einzelen Bruch bringet.

Als um $3\frac{2}{5}$ durch 2 zu multipliciren, kann man $\frac{17}{5}$ für $3\frac{2}{5}$ schreiben, welche mit 2 multiplicirt $\frac{34}{5}$, das ist $6\frac{4}{5}$ geben, wie vorher gefunden worden. Gleichergestalt bei dem andern Exempel werden $7\frac{4}{9}$ in $\frac{67}{9}$ verwandelt, welche mit 6 multiplicirt $\frac{402}{9}$ das ist $44\frac{6}{9}$ oder $44\frac{2}{3}$ geben, wie oben. Diese letztere Art kann also zu einem Beweisthum dienen, dass die vorige ihre Richtigkeit hat.

2. *Wann ein Bruch mit einer ganzen Zahl, welche dem Nenner desselben gleich ist, multiplicirt wird, so wird das Product eine ganze Zahl sein, welche dem Zähler desselben Bruchs gleich ist. Oder wann ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt wird, so ist der Zähler desselben das Product, welches herauskommt. Ist aber die ganze Zahl, mit welcher ein Bruch multiplicirt wird, zwei mal so gross als der Nenner, so ist auch das Product zwei mal so gross als der Zähler; und so viel mal dieselbe Zahl, mit welcher ein Bruch multiplicirt wird, grösser ist als der Nenner des Bruchs, eben so viel mal wird auch das Product grösser sein als der Zähler desselben Bruchs.*

Wann also dieser Bruch $\frac{3}{5}$ mit 5, das ist mit seinem Nenner, multiplicirt wird, so muss nach dieser Regel das Product 3, das ist dem Zähler des gegebenen Bruchs, gleich sein. Eben dieses Product aber kommt nach der vorigen Regel, nach welcher wir gelehret haben einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren, heraus; dann wann $\frac{3}{5}$ mit 5 multipliciret wird, so ist das Prodact $\frac{15}{5}$, das ist 3 Ganze. Hieraus erhellet nun der Grund dieser jetztgegebenen Regel; dann lasst uns einen jeglichen Bruch mit seinem Nenner multipliciren nach der vorgegebenen Regel, so wird das Product ein Bruch sein, dessen Zähler ist der vorige Zähler mit dem Nenner multiplicirt, der Nenner aber wird der vorige Nenner sein. In diesem Bruche lässt sich also der Zähler durch den Nenner dividiren, und der Quotus, welcher den Werth des Bruchs ausdrückt, wird der Zähler des gegebenen Bruchs sein. Hieraus ist nun klar, dass, wann ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt wird, der Zähler desselben das Product anzeigen werde. Ob nun gleich in solchen Fällen oben dieses Product auch durch die vorige Regel gefunden wird, so muss doch dabei eine Multiplication und Division gebraucht werden, welche beiden Operationen nach dieser Regel nicht nöthig sind, indem man nur den blossen Zähler für das Product hinschreiben darf. Also, wann dieser Bruch $\frac{17}{28}$ mit 28 multipliciret wird, so ist das Product 17; und $\frac{121}{125}$ mit 125 multiplicirt gibt 121. Diese Regel aber wird uns im folgenden hauptsächlich dazu dienen, dass man wisse, mit was für einer Zahl man einen Bruch multipliciren müsse, damit das Product eine ganze Zahl werde. Nämlich man sieht hieraus, dass man einen Bruch, damit das Product eine ganze Zahl werde, mit seinem Nenner multipliciren müsse, dann da wird das Product dem Zähler desselben Bruchs gleich sein. Es gibt aber ausser dem Nenner eines Bruchs noch unendlich viel andere Zahlen, durch welche, wann derselbe Bruch multipliciret wird, ganze Zahlen gefunden werden. Dann da das Product dem Zähler gleich wird, wann der Multiplicator der Nenner ist, so ist auch aus der Natur der Multiplication bekannt, dass, wann der Multiplicator zwei mal oder drei mal oder mehr mal grösser genommen werde als der vorige, nämlich der Nenner, alsdann auch das Product eben so viel mal grösser sein müsse als vorher, nämlich als der Zähler desselben Bruchs. Derowegen ist klar, dass so viel mal diejenige Zahl, mit welcher ein Bruch multiplicirt werden soll, grösser ist als der Nenner, alsdann das Product eben so viel mal grösser sein werde als der Zähler desselben Bruchs. Also wann $\frac{7}{12}$ mit 24 multipliciret wird, so ist das Product 14; dann weilen hier 24 zwei mal so gross ist als der Nenner 12, so muss das Product, 14, zwei mal so gross sein als der Zähler 7. Gleichergestalt, wann $\frac{2}{3}$ mit 18 multiplicirt werden soll, so sieht man, dass der Multiplicator 18 sechs mal grösser ist als der Nenner 3; deswegen wird das Product auch sechs mal grösser als der Zähler 2, und folglich 12 sein. Ob es aber gleich unendlich viel Zahlen gibt, welche mit einem Bruche multiplicirt ganze Zahlen hervorbringen, so wird dennoch am vorteilhaftesten sein, sich nur allein des Nenners selbst zu bedienen, weilen auf diese Art das kleinste ganze Product herauskommt, und ohne einige Operation gefunden wird.

3. *Wann zwei oder mehr Brüche mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product folgendergestalt gefunden: man multiplicirt die Zähler mit einander, und was herauskommt ist der Zähler des Products; gleichergestalt multiplicirt man auch die Nenner mit einander, und was herauskommt ist der Nenner des gesuchten Products. Das Product zweier oder mehr Brüche wird also ein Bruch sein, dessen Zähler das Product der Zähler, der Nenner aber das Product der Nenner ist.*

Nach dieser Regel ist also sehr leicht, zwei oder mehr Brüche mit einander zu multipliciren, indem diese Operation bloss in der Multiplication der Zähler und Nenner der gegebenen Brüche besteht; weswegen die Multiplication der Brüche weit leichter fällt als die Addition und Subtraction, als zu welchen erfordert wird, die Brüche vorher zu gleichen Nenneren zu bringen, welches bei der Multiplication nicht vonnöthen ist. Der Grund dieser Regel aber beruhet auf den zwei vorhergehenden Sätzen. Dann nach dem ersten wird ein Bruch mit einer jeglichen Zahl multiplicirt, wann man nur den Zähler mit derselben multiplicirt, den Nenner aber unverändert lässt. Ob aber gleich diese Regel nur zu Multiplication der Brüche mit ganzen Zahlen ist gebraucht worden, so gilt dieselbe dennoch auch, wann Brüche mit Brüchen multiplicirt werden sollen, wie wir schon oben angemerket haben. Wann man aber nach dieser Regel den Zähler eines

Bruchs mit einem anderen Bruche multiplicirt, um den Zähler des Products zu bekommen, so fällt man in diese Schwierigkeit, dass der Zähler des Products gemeiniglich eine gebrochene Zahl wird, und folglich von dem Werthe eines solchen Products kein deutlicher Begriff formirt werden kann. Also wann man $\frac{7}{12}$ mit $\frac{5}{9}$ multipliciren soll, so muss man nach dieser Regel den Zähler 7 mit dem Bruche $\frac{5}{9}$ multipliciren, um den Zähler des Products zu bekommen, welcher also $\frac{35}{9}$ sein wird, der Nenner aber des Products bleibt 12. Also ist in diesem Exempel das Product ein Bruch, dessen Zähler $\frac{35}{9}$ und Nenner 12 ist. Weilen wir aber von keinen anderen Brüchen bisher Meldung gethan, als von solchen, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, so müssen wir sehen, ob wir einen solchen uneigentlichen Bruch nicht in einen anderen verwandeln können, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Dieses aber kann durch Hülfe des vorigen Satzes bewerkstelliget werden; dann da ein Bruch seinem Werthe nach unverändert bleibt, wann man beides, Zähler und Nenner, durch eine jegliche beliebige Zahl multiplicirt, so müssen wir hier nur eine solche Zahl suchen, mit welcher, wann Zähler und Nenner multiplicirt werden, ganze Zahlen herauskommen. Wann also der Zähler eines Bruchs selbst eine gebrochene Zahl ist, so darf man nur mit dem Nenner dieser gebrochenen Zahl beides, den Zähler und Nenner des vorgelegten Bruchs, multipliciren. Als im gegebenen Exempel war das Product ein Bruch, dessen Zähler $\frac{35}{9}$ und Nenner 12 ist; um nun diesen Bruch in eine gewöhnliche Form zu bringen, so multiplicire man Zähler und Nenner mit 9; daher wird nun ein anderer Bruch entspringen, dessen Zähler 35 und Nenner 108 sein wird und welcher dem vorigen völlig gleich ist. Wann derohalben $\frac{7}{12}$ mit $\frac{5}{9}$ multipliciret werden soll, so wird das Product $\frac{35}{108}$ sein, welches auch sehr schön mit der gegebenen Regel übereinstimmt; dann hier ist 35 das Product der Zähler 7 und 5, und 108 das Product von den Nennern 12 und 9; woraus der Grund der gegebenen Regel schon einigermassen erhellet. Um aber den Grund vollkommen anzuzeigen, so lasst uns zwei Brüche betrachten, davon der erste durch den anderen multipliciret werden soll; dieses geschieht nun, wann man den Zähler des ersten mit dem anderen Bruche multiplicirt, den Nenner aber unverändert lässt. Also wird das Product ein Bruch sein, dessen Nenner dem Nenner des ersten Bruchs gleich ist, der Zähler aber wird für sich ein Bruch sein, dessen Nenner dem Nenner des anderen gegebenen Bruchs gleich, der Zähler aber das Product aus beiden Zählern ist. Wann also dieses Product in gehörige Form gebracht, und nämlich sowohl der Zähler als Nenner durch den Nenner des anderen Bruchs multipliciret wird, so wird das Product in einen ordentlichen Bruch verwandelt werden, dessen Zähler das Product der Zähler, der Nenner aber das Product der Nenner ist. Dieses ist also eben die Regel, welche wir im Satze angezeiget haben, um zwei Brüche mit einander zu multipliciren; davon wir auch nun das Fundament deutlich genug erkläret haben. Zu mehrerer Erläuterung aber wird erfordert, die Multiplication mit Brüchen an und für sich selbst weitläufiger auszuführen, welches am füglichsten durch etliche Exempel geschehen wird. Wann eine ganze Zahl oder ein Bruch mit $\frac{1}{2}$ multipliciret werden soll, so wird nichts anders gefragt, als dass man die Hälfte derselben Zahl oder desselben Bruchs finden soll. Dann gleich wie das doppelte oder dreifache von einer Zahl finden nichts anders ist, als dieselbe Zahl mit 2 oder mit 3 multipliciren, so ist auch die Hälfte von einer Zahl finden nichts anders, als dieselbe Zahl mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Wann man demnach die Hälfte von $\frac{3}{5}$ fordert, so muss man $\frac{3}{5}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren, da dann nach der gegebenen Regel $\frac{3}{10}$ herauskommt. Gleichergestalt, wann man wissen will, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{9}{10}$ austragen, so muss man diese Brüche mit einander multipliciren, da dann $\frac{18}{30}$ das ist $\frac{3}{5}$, herauskommt. Dergleichen Exempel folgen noch etliche.

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{3}{4} & \text{mit} & \frac{5}{6} & \text{gibt} & \frac{15}{24}, & \text{das ist} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{3} & \text{mit} & \frac{15}{16} & \text{gibt} & \frac{15}{48}, & \text{das ist} & \frac{5}{16} \\ \frac{7}{12} & \text{mit} & \frac{12}{7} & \text{gibt} & \frac{84}{84}, & \text{das ist} & 1 \end{array}$$

Hieraus erhellet, dass, wann man mit einem Bruche multiplicirt, das Product kleiner werde als die Zahl, welche multiplicirt worden, welches einigermassen wider die Natur der Multiplication zu sein scheinet, weilen multipliciren dem Namen nach vermehren bedeutet. Allein dieser Name ist aus der Multiplication mit ganzen Zahlen hergenommen worden und wird allhier, bei den Brüchen, nur in Ansehung der Operation beibehalten. Die ganze Sache verhält sich aber also: wann ich eine Zahl mit einer anderen Zahl multiplicire, so wird dieselbe Zahl um so viel mal grösser, um so viel mal diese Zahl grösser ist als eins; und wann eine Zahl mit 1 multiplicirt wird, so bleibt dieselbe unverändert. Woraus dann von sich selbst folget, dass, wann eine Zahl mit einer Zahl, so kleiner ist als 1, dergleichen die Brüche sind, multipliciret wird, dieselbe nicht nur nicht vermehret, sondern sogar vermindert werden müsse. Dieses ist aber nur allein von Brüchen zu verstehen, welche kleiner sind als ein Ganzes; dann wann eine Zahl mit einem Bruche, der grösser ist als 1, multiplicirt wird, so wird das Product auch grösser als dieselbe Zahl; als wann man 7 mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, so kommt $\frac{21}{2}$, das ist $10\frac{1}{2}$ heraus, und also mehr als 7. Ferner ist hier auch, wie bei der Multiplication mit ganzen Zahlen, zu beobachten, dass, wann zwei Brüche mit einander multiplicirt werden sollen, es gleichviel sei, welcher mit dem anderen multiplicirt werde. Also $\frac{3}{5}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren ist eben so viel als $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{5}$ multipliciren, dann in beiden Fällen ist das Product $\frac{6}{15}$ oder $\frac{2}{5}$. Und gleichergestalt ist die Hälfte von 6 eben so viel als 6 mal $\frac{1}{2}$, das ist 3.

Aus dieser Operation aber, durch welche wir zwei Brüche mit einander multipliciren gelehret, können leicht 3 und auch mehr Brüche mit einander multiplicirt werden. Dann man multiplicirt erstlich zwei Brüche mit einander, und dann ferner dieses Product mit dem dritten Bruch, und was herauskommt mit dem vierten Bruche, und so weiter, bis man mit allen gegebenen Brüchen multiplicirt [hat]. Hieraus sieht man aber leicht, dass das letzt gefundene Product herauskomme, wann man alle Zähler, und dann auch alle Nenner, mit einander multiplicirt. Also wann diese Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, und $\frac{4}{5}$, mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product sein $\frac{24}{120}$, dessen Bruchs Zähler 24 das Product aller Zähler, der Nenner 120 aber das Product aller Nenner ist. Dieses Product $\frac{24}{120}$, oder welches gleichviel ist $\frac{1}{5}$, wird auch gefunden, wann man je nur zwei Brüche mit einander multiplicirt; als $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt gibt $\frac{2}{6}$, das ist $\frac{1}{3}$; ferner dieses Product $\frac{1}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt gibt $\frac{3}{12}$, das ist $\frac{1}{4}$ und dieses Product noch mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt gibt $\frac{4}{20}$, das ist $\frac{1}{5}$ wie vorher; sodass also $\frac{1}{5}$ das Product ist, wann man alle diese Brüche mit einander multiplicirt: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, und $\frac{4}{5}$.

Hieraus können wir nun diese Frage beantworten: es sind vier Personen, die erste hat 560 Rubel, die zweite hat $\frac{3}{4}$ mal so viel als die erste, die dritte hat $\frac{2}{5}$ mal so viel als die zweite, und der vierten Vermögen ist $\frac{5}{7}$ von demjenigen, was die dritte hat. Nun ist die Frage, wieviel die drei letzteren Personen haben.

Weilen die zweite $\frac{3}{4}$ mal so viel hat als die erste, deren Vermögen ist 560 Rubel, so wird das Vermögen der zweiten gefunden, wann man 560 mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, da dann $\frac{1680}{4}$ oder 420 herauskommt. Also hat die zweite Person 420 Rubel; wann man nun die [Geld-]Summe mit $\frac{2}{5}$ multiplicirt, so gibt das Product $\frac{840}{5}$ oder 168 Rubel das Vermögen der dritten Person. Dieses ferner mit $\frac{5}{7}$ multiplicirt gibt $\frac{840}{7}$ oder 120 Rubel für das Vermögen der vierten Person. Wann man aber nur das Vermögen der vierten Person allein zu wissen verlanget hätte, so würde dasselbe daraus gefunden werden, dass dasselbe ist $\frac{5}{7}$ von $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{4}$ von 560 Rubel. Derowegen, um dieses zu finden, muss man diese Brüche $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ mit einander multipliciren und mit dem Product noch 560. Nun aber geben diese Brüche $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ mit einander multiplicirt $\frac{30}{140}$, das ist $\frac{3}{14}$, welches Product mit 560 multiplicirt gibt $\frac{1680}{14}$, das ist 120 Rubel, wie oben.

Aus diesen Exempeln erhellet nun, dass öfters nach der gegebenen Regel ein Product gefunden werde, welches hernach entweder durch eine ganze Zahl, oder durch einen leichteren Bruch, als gefunden worden, könne ausgedrückt werden. Dieses geschieht nämlich, wann sich des für das Product gefundenen Bruchs Zähler und Nenner durch einerlei Zahlen dividiren lassen. In solchen Fällen kommt man nun, nach der gegebenen Regel, unnöthiger Weise auf grosse Zahlen und hat hernach noch die Mühe, den gefundenen Bruch abzukürzen und in kleinere Zahlen zu bringen. Derowegen, um dieser Weitläufigkeit abzuhelfen, so wollen wir im folgenden Satze eine Regel geben, durch deren Hülfe man gleich das Product in den kleinsten Zahlen ausgedrückt bekommt und hernach keiner weiteren Reduction vonnöthen hat, wann man nur vorher die Brüche, die mit einander multiplicirt werden sollen, auf die kleinsten Zahlen gebracht hat.

4. *Damit man, wann zwei oder mehr Brüche mit einander mulliplicirt werden sollen, gleich das gesuchte Product in den kleinsten möglichen Zahlen ausgedrückt bekomme, so muss man sehen, ob irgend ein Zähler mit einem Nenner einen gemeinen Theiler habe, und alsdann beide durch ihren grössten gemeinen Theiler dividiren, und die Quolos an derselben Stelle setzen. Auf diese Art verfährt man mit einem jeglichen Zähler und Nenner, und wann man alle so viel [als] möglich gegen einander aufgehoben, so multiplicirt man nach der vorigen Regel die Zähler und Nenner, oder vielmehr die Zahlen, welche nach geschehener Aufhebung an derselben Stelle gesetzt worden sind, mit einander, und bekommt also auf diese Art das gesuchte Product in den kleinsten möglichen Zahlen ausgedrückt.*

Weilen nach der vorigen Regel zwei und auch mehr Brüche mit einander multiplicirt werden, wann man erstlich alle Zähler und dann auch alle Nenner mit einander multiplicirt, so ist ein jeglicher Zähler ein Factor oder Theiler des Zählers des Products, und gleichergestalt ein jeglicher Nenner ein Factor oder Theiler des Nenners des Products. Wann derohalben irgend ein Zähler mit irgend einem Nenner einen gemeinen Theiler hat, so werden sich auch des Products Zähler und Nenner durch eben denselben Theiler theilen und folglich in kleinere Zahlen bringen lassen. Wann man derohalben noch vor der Multiplication derselben Zähler und Nenner durch ihren gemeinen Theiler theilet und die Quotienten an derselben Stelle setzt, so ist es eben so viel, als wann man nach geschehener Multiplication den Zähler und Nenner des Products durch denselben gemeinen Theiler dividirte. Durch eine solche Aufhebung also, da ein Zähler und Nenner durch einen gemeinen Theiler dividirt werden, erhält man das Product zugleich in kleineren Zahlen ausgedrückt und hat hernach derselben Reduction nicht mehr vonnöthen. Woraus erhellet, dass, wann man vor der Multiplikation einen jegliehen Zähler gegen einen jeglichen Nenner betrachtet und dieselben durch ihren grössten gemeinen Theiler gegen einander aufhebt, alsdann das Product in den kleinsten möglichen Zahlen ausgedrückt gefunden werde. Wann nun zwei oder mehr

Brüche mit einander zu multipliciren vorgegeben werden, sieht man vor allen Dingen, ob man einen Zähler und Nenner antreffe, welche einen gemeinen Theiler haben, und dividirt dieselben durch ihren grössten gemeinen Theiler und setzt die Quotos an derselben Stelle. Hierauf sieht man ferner, ob nicht noch mehr dergleichen Zähler und Nenner vorhanden sind, und verfährt mit denselben auf gleiche Weise. Wann sich endlich kein Zähler mehr gegen einen Nenner aufheben lässt, so schreitet man zu der Multiplication, da man dann anstatt der ausgestrichenen Zähler und Nenner, die an derselben Stelle gesetzten Zahlen multiplicirt.

Dieser Vortheil aber, dessen man sich in der Multiplication der Brüche bedienen kann, kann am besten durch Exempel dargethan werden. Lasst uns also $\frac{5}{9}$ mit $\frac{3}{20}$ multipliciren; hier sieht man nun, dass sich der Zähler 5 gegen den Nenner 20 durch 5 aufheben lasse, da dann 1 anstatt 5, und 4 anstatt 20 kommt. Ferner lassen sich 3 und 9 durch 3 verkleinern, und kommt 3 anstatt 9, und 1 anstatt 3. Diese Aufhebung wird nun auf folgende Weise verrichtet:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{4}{\cancel{20}}} \quad \text{gibt} \quad \frac{1}{12}$$

Hernach werden, wie die Regel erfordert, die Zähler und Nenner, oder vielmehr die an derselben Stelle gesetzten Zahlen, mit einander multiplicirt, und in diesem Exempel $\frac{1}{12}$ für das Product gefunden. Eben dieses Product wäre aber auf die vorige Art herauskommen als:

$$\frac{5}{9} \quad \text{mit} \quad \frac{3}{20} \quad \text{gibt} \quad \frac{15}{180} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{12}$$

Weilen aber hier das Product in grossen Zahlen, nämlich $\frac{15}{180}$ ist gefunden worden, und von denselben noch der grösste gemeine Theiler müsste gesucht werden, ehe man auf $\frac{1}{12}$ hat kommen können, so ist die hier gewiesene Operation weit vortheilhafter. Lasst uns ferner durch Hülfe dieses Vortheils folgende Brüche $\frac{15}{28}$ und $\frac{21}{25}$ mit einander multipliciren, so wird die Operation also zu stehen kommen:

$$\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{28}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} \quad \text{gibt} \quad \frac{9}{20}$$

Nämlich 15 und 25 werden gegen einander mit 5, und 21 und 28 gegen einander mit 7 aufgehebt; da dann das Product $\frac{9}{20}$ gleich in den kleinsten Zahlen ausgedrückt gefunden wird. Wann weiter dieser Bruch $\frac{9}{16}$ mit $\frac{16}{9}$ multiplicirt werden soll, so wird das Product 1 gefunden, wie folget:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{16}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{1}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{9}}} \quad \text{gibt} \quad \frac{1}{1}, \quad \text{das ist} \quad 1.$$

Aus diesem Exempel erhellet, dass, wann in den gegebenen Brüchen je eines Zähler dem Nenner des andern gleich ist, das Product 1 werde. Also gibt $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt 1, und $\frac{5}{6}$ mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt auch 1, und so weiter. Soll eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplicirt werden, so findet der gewiesene Vortheil gleichermassen statt, indem die ganze Zahl als ein Zähler angesehen werden kann, dessen Nenner 1 ist; gleich wie wir schon oben angemerket, dass zum Exempel $\frac{6}{1}$ für

6 geschrieben werden könne. Wann also ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so kann die ganze Zahl auf gemeldete Art in der Form eines Bruchs, dessen Nenner 1, vorgestellet und die Aufhebung wie vor angebracht werden. Also wann 15 mit $\frac{4}{9}$ multiplicirt werden sollen, wird das Product $\frac{20}{3}$ oder $6\frac{2}{3}$ auf folgende Weise gefunden werden:

$$\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{1} \quad \text{mit} \quad \frac{4}{\underset{3}{\cancel{9}}} \quad \text{gibt} \quad \frac{20}{3}, \quad \text{das ist} \quad 6\tfrac{2}{3}.$$

Sollen aber mehr als 2 Brüche mit einander multiplicirt werden, so wird dieser Vortheil gleichergestalt angebracht, wie aus folgenden Exempeln zu sehen:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\underset{\cancel{2}}{\cancel{4}}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\underset{\cancel{5}}{\cancel{15}}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{10}}}{21} \quad \text{gibt} \quad \frac{1}{21}$$

Ferner

$$\frac{\overset{3}{\cancel{33}}}{\underset{1}{\underset{\cancel{5}}{\cancel{35}}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{5}{\cancel{55}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{15}}}{\underset{7}{\cancel{77}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{2}{\cancel{22}}}{\underset{35}{\cancel{105}}} \quad \text{gibt} \quad \frac{12}{1225}$$

Gleichergestalt

$$\frac{\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\underset{\cancel{11}}{\cancel{33}}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{1}{\cancel{11}}}{\underset{7}{\cancel{14}}} \quad \text{gibt} \quad \frac{1}{7}$$

Und also wird in allen dergleichen Exempeln verfahren.

5. *Wann die Zahlen, welche mit einander multiplicirt werden sollten, keine einzelen Brüche, sondern aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzt sind, so kann man entweder dieselben in die Form einzeler Brüche bringen, wie oben ist gelehret worden, und alsdann die Multiplication wie vorher vollziehen. Oder man kann auch ohne diese Reduction einen jeglichen Theil einer Zahl mit einem jeglichen Theil der anderen Zahl multipliciren und alle diese besonderen Producte zusammen addiren, da dann die Summe das gesuchte Product sein wird.*

Diese beiden Arten, Zahlen, welche aus Ganzen und Brüchen bestehen, mit einander zu multipliciren, kommen ihrem Grunde nach vollkommen mit einander überein; sie sind aber der Operation und [dem] Vortheil nach sehr von einander unterschieden. Dann öfter bedient man sich der ersteren mit grösserem Vortheil, öfters aber der anderen, sodass keine der anderen für sich vorgezogen zu werden verdient; weswegen also nöthig ist, sich in beiden zu üben. In welchen Fällen es aber dienlicher ist, sich der einen oder der anderen zu bedienen, wird aus der weiteren Ausführung einer jeglichen erhellen. Die erste Art besteht nun darinn, dass man die aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzten Zahlen in die Form einzeler Brüche bringt, und die Multiplication nebst denen Vortheilen, wie im vorigen Satze gelehret worden, verrichtet.

Wir haben aber schon oben in dem sechsten Capitel gelehret, dass eine aus einer ganzen und gebrochenen zusammengesetzte Zahl in die Form eines einzelen Bruchs gebracht werde, wann man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt, und zum Product den Zähler addirt, als welche Summe der Zähler des einzelen Bruchs sein wird, dessen Nenner dem vorigen Nenner gleich ist. Vermittelst dieser Reduction hat also die Multiplication solcher zusammengesetzten Zahlen nach dieser Art keine weitere Schwierigkeit, weswegen nur noch übrig ist, dieselbe durch einige Exempel zu erläuteren. Wann also $1\frac{1}{3}$ mit $2\frac{1}{2}$ multipliciret werden soll, so wird $\frac{4}{3}$ anstatt $1\frac{1}{3}$ und $\frac{5}{2}$ anstatt $2\frac{1}{2}$ gesetzt, und die Multiplication, wie oben gewiesen worden, folgendergestalt verrichtet:

$$1\tfrac{1}{3} \quad \text{mit} \quad 2\tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3} \quad \text{mit} \quad \frac{5}{\underset{1}{\cancel{2}}} \quad \text{gibt} \quad \tfrac{10}{3}, \quad \text{das ist} \quad 3\tfrac{1}{3}.$$

Gleichergestalt werden $3\frac{3}{4}$ mit $5\frac{1}{3}$ multiplicirt:

$$3\tfrac{3}{4} \quad \text{mit} \quad 5\tfrac{1}{3} \quad \text{oder} \quad \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \quad \text{gibt} \quad \tfrac{20}{1}, \quad \text{das ist} \quad 20.$$

Wann ein einzeler Bruch mit einer zusammengesetzten Zahl multiplicirt werden soll, so geschieht dasselbe auf gleiche Art, indem man nur die zusammengesetzte Zahl nöthig hat, in einen einzelen Bruch zu verwandeln. Als wann $5\frac{7}{12}$ mit $\frac{21}{25}$ multiplicirt werden soll, so wird $\frac{67}{12}$ für $5\frac{7}{12}$ geschrieben, und wie folget, multiplicirt:

$$5\tfrac{7}{12} \quad \text{mit} \quad \tfrac{21}{25} \quad \text{oder} \quad \frac{67}{\underset{4}{\cancel{12}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{25} \quad \text{gibt} \quad \tfrac{469}{100}, \quad \text{das ist} \quad 4\tfrac{69}{100}.$$

Wann mehr als 2 zusammengesetzte Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, so geschieht die Operation nach geschehener Reduction zu einzelen Brüchen, wie im vorigen Satze gelehret worden. Als es sollen $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $5\frac{2}{5}$ mit einander multipliciret werden, so wird das Product folgendergestalt gefunden:

$$2\tfrac{1}{2} \quad \text{mit} \quad 3\tfrac{1}{3} \quad \text{mit} \quad 5\tfrac{2}{5} \quad \text{oder} \quad \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \quad \text{gibt} \quad 45.$$

Diese Art, aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzte Zahlen mit einander zu multipliciren, hat insonderheit statt, wann die ganzen Zahlen nicht allzugross sind, als da die Reduction zu einzelen Brüchen uni so viel leichter geschehen kann. Sind aber die ganzen Zahlen sehr gross, so ist es dienlicher, sich der anderen Art zu multipliciren zu bedienen, in welcher die zusammengesetzte Zahlen nicht nöthig ist, in einzele Brüche zu verwandeln. Nämlich bei dieser Art betrachtet man die Zahlen, welche mit einander multipliciret werden sollen, als zusammengesetzte Zahlen, und multiplicirt einen jeglichen Theil der einen mit einem jeden Theil der andern; da dann diese Producte zusammen addirt das verlangte Product geben. Also, wann eine ganze Zahl nebst einem Bruche mit einer ganzen Zahl samt einem Bruche multiplicirt werden soll, so werden erstlich die ganzen Zahlen mit einander multiplicirt, hernach eine jede ganze Zahl mit dem Bruche der anderen, und endlich auch die Brüche mit einander, welche 4 Producte zusammen addirt das gesuchte Product ausmachen. Als wann $7\frac{1}{2}$ mit $12\frac{2}{3}$ multiplicirt werden soll, so multiplicirt man erstlich 7 mit 12, das gibt 84; hernach multiplicirt man 7 mit $\frac{2}{3}$, das gibt $\frac{14}{3}$. Ferner multiplicirt man 12 mit $\frac{1}{2}$ das gibt oder 6, und endlich $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ gibt $\frac{2}{6}$, das ist $\frac{1}{3}$. Diese Producte zusammen geben 95 für das gesuchte Product; diese Operation aber kommt also zu stehen:

$$
\begin{array}{rrl|llllll}
 & 7\frac{1}{2} & & & & & & & \\
 & 12\frac{2}{3} & & 7 & \text{mit} & 12 & \text{gibt} & 84 & \\
\cline{2-2}
 & 84 & & 7 & \text{mit} & \frac{2}{3} & \text{gibt} & \frac{14}{3}, & \text{das ist } 4\frac{1}{3} \\
 & 4\frac{2}{3} & & 12 & \text{mit} & \frac{1}{2} & \text{gibt} & \frac{12}{2}, & \text{das ist } 6 \\
 & 6 & & \frac{1}{2} & \text{mit} & \frac{2}{3} & \text{gibt} & \frac{2}{6}, & \text{das ist } \frac{1}{3} \\
 & \frac{1}{3} & & & & & & & \\
\cline{2-3}
\text{Product} & 95 & \text{Ganze} & & & & & &
\end{array}
$$

Wann ferner $17\frac{2}{5}$ mit $19\frac{4}{9}$ multiplicirt werden soll, so wird das Product durch folgende Operation gefunden werden:

$$
\begin{array}{rr|l|llllll}
 & 19\,\frac{4}{9} & & & & & & & \\
 & 17\,\frac{2}{5} & & 17 & \text{mal} & 19 & \text{gibt} & 323 & \\
\cline{2-3}
 & 323 & & 19 & \text{mal} & \frac{2}{5} & \text{gibt} & \frac{38}{5}, & \text{das ist } 7\frac{3}{5} \\
 & 7\,\frac{3}{5} & \frac{27}{45} & 17 & \text{mal} & \frac{4}{9} & \text{gibt} & \frac{68}{9}, & \text{das ist } 7\frac{5}{9} \\
 & 7\,\frac{5}{9} & \frac{25}{45} & \frac{4}{9} & \text{mal} & \frac{2}{5} & \text{gibt} & \frac{8}{45} & \\
 & \frac{8}{45} & \frac{8}{45} & & & & & & \\
\cline{2-3}
\end{array}
$$

$$\text{Product} \quad 337\,\frac{60}{45} \quad \text{das ist} \quad 338\,\frac{15}{45}, \quad \text{das ist} \quad 338\,\frac{15}{45}.$$

Aus diesen Exempeln ist nun genugsam zu ersehen, wie sowohl auf die erste als zweite Art Zahlen, welche aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzt sind, mit einander multiplicirt werden, da dann ein jeder bei vorkommenden Fällen leicht wird sehen können, welche Art dienlicher ist; wann man sich nur in beiden Arten genugsam geübet hat. Diese letztere Art ist zwar nur auf die Multiplication zweier Zahlen gerichtet; dieselbe kann aber auch leicht auf mehr Zahlen mit einander zu multipliciren, applicirt werden. Dann man darf erstlich nur zwei Zahlen mit einander multipliciren, und hernach mit diesem Product die dritte, und weiter mit dem was herauskommt die vierte, bis man mit allen Zahlen fertig ist; da dann das letzte Product das gesuchte sein wird.