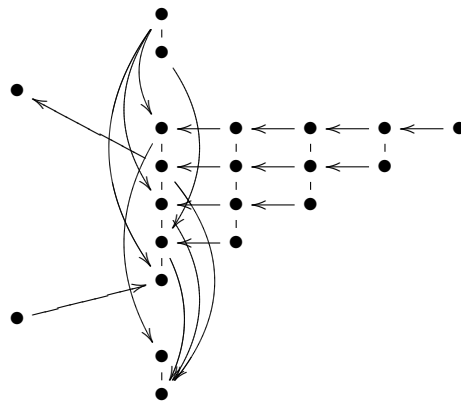


# Kreise in Koeffizientenköchern einiger aufrichtiger Darstellungen

Timo Rosnau

Diplomarbeit vorgelegt an der  
Fakultät für Mathematik  
Universität Bielefeld

14. Mai 2009





## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Existenz induzierter Kreise</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Konstruktion und Eigenschaften der Bielefeldliste</b>	<b>15</b>
3.1	Kürzungsregeln . . . . .	15
3.2	Anwendung der Kürzungsregeln . . . . .	21
3.3	Eigenschaften der Bielefeldliste . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Kreisminimale Koeffizientenköcher</b>	<b>26</b>
<b>5</b>	<b>Anhang</b>	<b>35</b>
5.1	Die Bielefeldliste . . . . .	35
5.2	Koeffizientenköcher zur Bielefeldliste . . . . .	46



---

# 1 Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, die Zahl der Kreise in Koeffizientenköchern aufrichtiger Darstellungen darstellungsgerichteter Algebren zu untersuchen.

Die hier betrachteten Algebren sind immer assoziative, zusammenhängende, endlichdimensionale Basis-Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$ . Moduln sind immer endlich erzeugt.

Um zu charakterisieren, mit welchen Algebren wir uns beschäftigen wollen, sind zunächst einige Definitionen nötig. Eine Algebra  $A$  heißt aufrichtig, falls es einen unzerlegbaren aufrichtigen  $A$ -Modul  $M$  gibt, d.h. einen unzerlegbaren Modul  $M$ , in dessen Kompositionsreihen die Isomorphieklassen jedes einfachen  $A$ -Moduls repräsentiert ist. Äquivalent dazu ist, dass der Dimensionsvektor  $\underline{\dim} M$  von  $M$  nur positive Einträge enthält.  $A$  heißt darstellungsendlich, falls es nur endlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln über  $A$  gibt. Die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher Moduln bezeichnen wir mit  $n(A)$ . Die Algebra heißt darstellungsgerichtet, falls  $A$  darstellungsendlich ist und der Auslander-Reiten-Köcher von  $A$  keine orientierten Kreise enthält.

In [B] hat Bongartz 24 Familien von Algebren angegeben und bewiesen, dass darin alle aufrichtigen darstellungsgerichteten Algebren mit  $n(A) \geq 72$  enthalten sind. Die Abschätzung wurde von Ringel in [R1], 6.3 auf  $n(A) \geq 14$  optimiert. Eine aufrichtige darstellungsgerichtete Algebra heißt regulär, wenn sie zu einer der 24 Familien gehört, die restlichen aufrichtigen darstellungsgerichteten Algebren bezeichnen wir als Ausnahmealgebren. Diese wurden von Dräxler in [Dr] klassifiziert. Rogat und Tesche haben in [RT] eine graphische Aufbereitung der Klassifizierung der Ausnahmealgebren vorgenommen, indem sie eine Liste der Gabriel-Köcher aller aufrichtigen, darstellungsgerichteten Algebren mit  $n(A) < 14$  aufgestellt haben. Zusätzlich haben sie zu jeder Algebra den Dimensionsvektor eines aufrichtigen Moduls maximaler Dimension angegeben. Ausgehend von dieser Liste betrachten wir in dieser Arbeit eine deutlich kürzere Zusammenstellung von Köchern mit Dimensionsvektoren, die wir im Folgenden Bielefeldliste nennen. Sie wurde unter Anleitung von Claus Michael Ringel als Gemeinschaftsarbeit mit Alexandra Bartsch, Björn Hoffmann, Stefan Höppner und Martina Schulz aufgestellt, indem gewisse kombinatorische Kürzungsregeln auf die Rogat-Tesche-Liste angewandt wurden. Die genaue Konstruktion behandeln wir in Abschnitt 3. Ziel dieses Vorgehens ist, zunächst Aussagen über die Algebren der überschaubareren Bielefeldliste zu beweisen, um später gegebenenfalls zu überprüfen, inwieweit sich diese auf die Elemente der Rogat-Tesche-Liste übertragen lassen.

Zu einer Algebra  $A$  betrachten wir den Gabriel-Köcher  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ . Wie üblich bezeichnet dabei  $Q_0$  die Menge der Ecken,  $Q_1$  die Menge der

Pfeile, und für einen Pfeil  $\alpha \in Q_1, \alpha : i \longrightarrow j$  sei  $s(\alpha) = i$  der Ursprung und  $t(\alpha) = j$  das Ziel des Pfeils. In der Wegealgebra  $KQ$  des Köchers gibt es ein zulässiges Ideal  $I$ , das von endlich vielen Relationen erzeugt wird, sodass  $A \cong KQ/I$  gilt, siehe z.B. [ASS], II.3, Theorem 3.7. Die Begriffe Weg, Pfad, (Null-, Kommutativitäts-) Relation und zulässiges Ideal verwenden wir in den Definitionen aus [ASS], II.2. Auch für Pfade und Relationen benutzen wir die Abbildungen  $s$  und  $t$ , um Ursprung und Ziel zu bezeichnen. Zusätzlich sei für eine Relation  $\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$  mit Pfaden  $w_i$  durch  $Q_\rho$  die Menge aller von den Pfaden der Relation durchlaufenen Ecken und Pfeile definiert.

Ein Köcher mit Relationen  $(Q, I)$  heißt darstellungsendlich beziehungsweise darstellungsgerichtet wenn die Algebra  $KQ/I$  die entsprechende Eigenschaft besitzt. Für  $(Q, I)$  definieren wir Darstellungen  $V = (V_i, V_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  wie in [ASS], III.1. Die Kategorie  $\text{mod } A$  der endlich erzeugten  $A$ -Moduln ist äquivalent zur Kategorie  $\text{rep}(Q, I)$  der endlichdimensionalen Darstellungen über  $(Q, I)$ , siehe [ASS], III.1, Theorem 1.6. Daher bezeichnen wir für einen Modul  $M$  die entsprechende Darstellung über  $(Q, I)$  ebenfalls mit  $M = (M_i, M_\alpha)$ . Weiterhin sei  $m_i := \dim M_i$  für alle  $i \in Q_0$ .

Zu einer Darstellung betrachten wir Koeffizientenköcher, wie sie von Ringel in [R2] eingeführt wurden. Die folgenden Definitionen stammen aus dieser Arbeit. Für eine gegebene Darstellung  $M = (M_i, M_\alpha)$  heißt eine Teilmenge  $\mathcal{B}$  der disjunkten Vereinigung der  $K$ -Vektorräume  $M_i$  Basis von  $M$ , falls für alle  $i \in Q_0$  die Menge  $\mathcal{B}_i := \mathcal{B} \cap M_i$  eine Basis des Vektorraums  $M_i$  ist. Nach Wahl einer Basis  $\mathcal{B}$  können wir jeder linearen Abbildung  $M_\alpha$  eines Pfeils  $\alpha : i \longrightarrow j$  eindeutig eine Darstellungsmatrix  $M_{\alpha, \mathcal{B}}$  zuordnen. Es gilt  $M_{\alpha, \mathcal{B}} \in M(m_j \times m_i, K)$ . Wir indizieren die Zeilen der Matrix über  $\mathcal{B}_j$ , die Spalten über  $\mathcal{B}_i$ . Ist also  $b \in \mathcal{B}_i$  und  $b' \in \mathcal{B}_j$ , so sei  $M_{\alpha, \mathcal{B}}(b, b')$  der entsprechende Matrixeintrag. Diese Einträge können durch die Gleichungen  $M_\alpha(b) = \sum_{b' \in \mathcal{B}_j} M_{\alpha, \mathcal{B}}(b, b')b'$  für alle  $b \in \mathcal{B}_i$  bestimmt werden. Der Koeffizientenköcher  $\Gamma(M, \mathcal{B})$  einer Darstellung  $M$  bezüglich einer Basis  $\mathcal{B}$  ist durch folgende Daten gegeben:

1. Die Menge der Ecken ist  $\mathcal{B}$ .
2. Für  $b \in M_i, b' \in M_j$  gibt es genau dann einen Pfeil  $(\alpha, b, b') : b \longrightarrow b'$ , wenn es einen Pfeil  $\alpha : i \longrightarrow j$  in  $Q$  gibt, für den  $M_{\alpha, \mathcal{B}}(b, b') \neq 0$  gilt.

Die Menge der Ecken und Pfeile eines Weges der Länge  $\geq 3$  nennen wir Kreis, falls jede Ecke Ursprung oder Ziel von genau zwei Pfeilen des Weges ist. Die Anzahl der Ecken eines Koeffizientenköchers ist offenbar durch den Dimensionsvektor eindeutig festgelegt. Um einen möglichst einfachen Koeffizientenköcher zu erhalten, kann man also lediglich versuchen, durch eine geeignete Basiswahl die Anzahl der Pfeile zu minimieren. Insbesondere ist man

---

bestrebt, Kreise zu vermeiden. Diesem Bemühen entspricht auf der Ebene der Darstellungen die Suche nach möglichst dünn besetzten Darstellungsmatrizen der linearen Abbildungen, das heißt nach Matrizen, die möglichst wenige von Null verschiedene Einträge besitzen.

In Abschnitt 2 werden wir zunächst den Zusammenhang zwischen Kommutativitätsrelationen und Kreisen in Koeffizientenköchern untersuchen und  $\sum_{i=1}^r \min\{m_j \mid j \in Q_{\varrho_i} \cap Q_0\}$  als eine untere Schranke für die Anzahl der Kreise etablieren. Hierbei sei  $r$  die Zahl der erzeugenden Kommutativitätsrelationen.

Im Anschluss daran wird in Abschnitt 3 näher darauf eingegangen, wie die Bielefeldliste konstruiert wurde und welche Eigenschaften die in ihr enthaltenen Köcher gemeinsam haben.

Im Hauptteil der Arbeit (Abschnitt 4, Anhang) soll dann für möglichst viele darstellungsgerichtete Algebren die Existenz von Koeffizientenköchern mit genau  $\sum_{i=1}^r \min\{m_j \mid j \in Q_{\varrho_i} \cap Q_0\}$  Kreisen nachgewiesen werden. Man kann also in diesen Fällen alle Kreise vermeiden, deren Existenz nicht gemäß den Ergebnissen aus Abschnitt 2 durch Kommutativitätsrelationen bedingt wird. Dazu wird zu jedem Eintrag der Bielefeldliste eine Orientierung gewählt und ein Koeffizientenköcher angegeben, der eine unzerlegbare Darstellung mit dem gegebenen Dimensionsvektor definiert.

Ich danke Claus Michael Ringel für die Betreuung dieser Diplomarbeit und die Einführung in die Forschungsarbeit im Bereich der Darstellungstheorie. Ich danke Nils Mahrt für viele hilfreiche Gespräche während der Erstellung dieser Arbeit. Desweiteren möchte ich meinen Eltern, Elfi und Heinrich Rosnau, für die Unterstützung während meines Studiums danken.

## 2 Existenz induzierter Kreise

In diesem Abschnitt berechnen wir eine untere Schranke für die Anzahl sogenannter induzierter Kreise in Koeffizientenköchern unzerlegbarer Darstellungen darstellungsgerichteter Algebren.

**Definition 2.1.** Sei  $w = (a_0 \mid \alpha_1, \dots, \alpha_r \mid a_r)$  ein nichttrivialer Pfad in einem Köcher  $Q$  von  $a_0$  nach  $a_r$  mit Pfeilen  $\alpha_i : a_{i-1} \rightarrow a_i$ . Sei  $M = (M_i, M_\alpha)$  eine Darstellung von  $Q$ . Die lineare Abbildung  $M_w := M_{\alpha_r} \circ \dots \circ M_{\alpha_1}$  bezeichnen wir als Auswertung von  $M$  entlang des Pfades  $w$ .

Dem trivialen Pfad  $\varepsilon_a = (a \parallel a)$  ordnen wir die Identität  $M_{\varepsilon_a} := \text{id}_{M_a}$  zu.

**Lemma 2.2.** *Seien  $w$  und  $M$  wie in Definition 2.1 gegeben. Sei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $M$  und  $b_0 \in \mathcal{B}_{a_0}$ . Dann ist*

$$M_w(b_0) = \sum_{(b_1, \dots, b_r) \in \mathcal{B}_{a_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{a_r}} \left( \prod_{j=1}^r M_{\alpha_j, \mathcal{B}}(b_{j-1}, b_j) \right) b_r.$$

*Beweis.* Wir verwenden Induktion nach der Pfadlänge  $r$ . Der Fall  $r = 1$  folgt aus der Definition des Koeffizientenköchers. Sei nun  $r > 1$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} & M_w(b_0) \\ &= M_{\alpha_r} \circ M_{\alpha_{r-1}} \circ \dots \circ M_{\alpha_1}(b_0) \\ &= M_{\alpha_r} \left( \sum_{(b_1, \dots, b_{r-1}) \in \mathcal{B}_{a_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{a_{r-1}}} \left( \prod_{j=1}^{r-1} M_{\alpha_j, \mathcal{B}}(b_{j-1}, b_j) \right) b_{r-1} \right) \\ &= \sum_{(b_1, \dots, b_{r-1}) \in \mathcal{B}_{a_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{a_{r-1}}} \left( \prod_{j=1}^{r-1} M_{\alpha_j, \mathcal{B}}(b_{j-1}, b_j) \right) M_{\alpha_r}(b_{r-1}) \\ &= \sum_{(b_1, \dots, b_{r-1}) \in \mathcal{B}_{a_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{a_{r-1}}} \left( \prod_{j=1}^{r-1} M_{\alpha_j, \mathcal{B}}(b_{j-1}, b_j) \right) \sum_{b_r \in \mathcal{B}_{a_r}} M_{\alpha_r, \mathcal{B}}(b_{r-1}, b_r) b_r \\ &= \sum_{(b_1, \dots, b_r) \in \mathcal{B}_{a_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{a_r}} \left( \prod_{j=1}^r M_{\alpha_j, \mathcal{B}}(b_{j-1}, b_j) \right) b_r. \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.3.** *Sei  $(Q, I)$  ein Köcher mit Relationen und  $KQ/I$  eine darstellungsgerichtete Algebra. Sei  $M = (M_i, M_\alpha)$  eine unzerlegbare Darstellung von  $(Q, I)$ . Sei  $w = (a_0 \mid \alpha_1, \dots, \alpha_r \mid a_r)$  ein Pfad in  $Q$  mit  $w \notin I$ . Dann ist  $M_w : M_{a_0} \rightarrow M_{a_r}$  ein Monomorphismus oder ein Epimorphismus.*



---

Einen Beweis dieses Lemmas findet man in [R1], 2.4, S.77.

**Definition 2.4.** Sei  $c$  ein Kreis eines Köchers  $Q$  mit Pfeilmenge  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ . Ein Kreis  $\bar{c}$  in einem Koeffizientenköcher  $\Gamma(M, \mathcal{B})$  einer Darstellung  $M$  von  $Q$  heißt von  $c$  induziert, falls die Pfeilmenge des Kreises  $\bar{c}$  sich schreiben lässt als  $\{(\alpha_1, s_1, t_1), \dots, (\alpha_r, s_r, t_r)\}$ , wobei  $s_i \in \mathcal{B}_{s(\alpha_i)}$  und  $t_i \in \mathcal{B}_{t(\alpha_i)}$  für  $i = 1, \dots, r$  gilt.

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun den Zusammenhang einer Kommutativitätsrelation und der von ihr bedingten Kreise in einem Koeffizientenköcher herausarbeiten.

**Lemma 2.5.** Sei  $(Q, I)$  ein darstellungsgerichteter Köcher mit Relationen und  $M = (M_i, M_\alpha)$  eine unzerlegbare aufrichtige Darstellung von  $(Q, I)$ . Seien  $w \notin I$  und  $u \notin I$  zwei Pfade in  $Q$  von  $x$  nach  $y$  derart, dass  $\rho := w - u \in I$  eine Kommutativitätsrelation und  $Q_\rho$  ein Kreis ist. Für jede Wahl einer Basis  $\mathcal{B}$  besitzt der zugehörige Koeffizientenköcher  $\Gamma(M, \mathcal{B})$  von  $M$  mindestens  $\min\{m_i \mid i \in Q_\rho \cap Q_0\}$  von  $Q_\rho$  induzierte Kreise.

*Beweis.* Seien  $w = (x = a_0 \mid \alpha_1, \dots, \alpha_r \mid y = a_r)$  und  $u = (x = c_0 \mid \gamma_1, \dots, \gamma_s \mid y = c_s)$  mit Pfeilen  $\alpha_i : a_{i-1} \rightarrow a_i$  und  $\gamma_i : c_{i-1} \rightarrow c_i$ . Ohne Einschränkung werde die minimale Dimension an der Ecke  $c_j$  angenommen, es sei also  $\min\{m_i \mid i \in Q_\rho \cap Q_0\} = m_{c_j} =: n$ . Definiere  $u_1 := (x \mid \gamma_1, \dots, \gamma_j \mid c_j)$  und  $u_2 := (c_j \mid \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_s \mid c_s)$ . Es gilt  $u_1, u_2 \notin I$ , da sonst  $u \in I$  folgen würde. Lemma 2.3 und die Minimalität von  $m_{c_j} = \dim M_{c_j}$  implizieren, dass  $M_{u_1}$  Epimorphismus und  $M_{u_2}$  Monomorphismus ist. Das bedeutet insbesondere  $\text{Ker}(M_{u_2} \circ M_{u_1}) = \text{Ker } M_{u_1}$  und insgesamt

$$\begin{aligned}
\dim \text{Ker } M_w &= \dim \text{Ker } M_u \\
&= \dim \text{Ker}(M_{u_2} \circ M_{u_1}) \\
&= \dim \text{Ker } M_{u_1} \\
&= \dim M_x - \dim M_{c_j} \\
&= m_x - n.
\end{aligned}$$

Für jede Basis  $\mathcal{B}$  gibt es also mindestens  $n$  Basisvektoren  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{B}_x$  mit  $v_1, \dots, v_n \notin \text{Ker } M_w = \text{Ker } M_u$ . Für einen solchen Vektor  $b_x \in \{v_1, \dots, v_n\}$

gilt nach Lemma 2.2

$$\begin{aligned}
 & \sum_{b_r \in \mathcal{B}_{a_r}} \left( \sum_{(b_1, \dots, b_{r-1}) \in \mathcal{B}_{a_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{a_{r-1}}} \left( \prod_{j=1}^r M_{\alpha_j, \mathcal{B}}(b_{j-1}, b_j) \right) \right) b_r \\
 &= \sum_{(b_1, \dots, b_r) \in \mathcal{B}_{a_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{a_r}} \left( \prod_{j=1}^r M_{\alpha_j, \mathcal{B}}(b_{j-1}, b_j) \right) b_r \\
 &= M_w(b_x) \\
 &= M_u(b_x) \\
 &= \sum_{(d_1, \dots, d_s) \in \mathcal{B}_{c_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{c_s}} \left( \prod_{j=1}^s M_{\gamma_j, \mathcal{B}}(d_{j-1}, d_j) \right) d_s \\
 &= \sum_{d_s \in \mathcal{B}_{c_s}} \left( \sum_{(d_1, \dots, d_{s-1}) \in \mathcal{B}_{c_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{c_{s-1}}} \left( \prod_{j=1}^s M_{\gamma_j, \mathcal{B}}(d_{j-1}, d_j) \right) \right) d_s,
 \end{aligned}$$

wenn wir  $b_0 := d_0 := b_x$  setzen. Da  $\mathcal{B}_{a_r} = \mathcal{B}_{c_s} = \mathcal{B}_y$  eine Basis von  $M_y$  ist, sind die Koeffizienten vor den  $b_r$  beziehungsweise  $d_s$  eindeutig bestimmt. Wegen  $b_x \notin \text{Ker } M_u$  können wir ein  $b_y = b_r = d_s \in \mathcal{B}_y$  mit

$$\begin{aligned}
 0 &\neq \sum_{(b_1, \dots, b_{r-1}) \in \mathcal{B}_{a_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{a_{r-1}}} \left( \prod_{j=1}^r M_{\alpha_j, \mathcal{B}}(b_{j-1}, b_j) \right) \\
 &= \sum_{(d_1, \dots, d_{s-1}) \in \mathcal{B}_{c_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{c_{s-1}}} \left( \prod_{j=1}^s M_{\gamma_j, \mathcal{B}}(d_{j-1}, d_j) \right)
 \end{aligned}$$

finden. Insbesondere gibt es daher  $(b_1, \dots, b_{r-1}) \in \mathcal{B}_{a_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{a_{r-1}}$  und  $(d_1, \dots, d_{s-1}) \in \mathcal{B}_{c_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{c_{s-1}}$  so, dass

$$\prod_{j=1}^r M_{\alpha_j, \mathcal{B}}(b_{j-1}, b_j) \neq 0 \neq \prod_{j=1}^s M_{\gamma_j, \mathcal{B}}(d_{j-1}, d_j)$$

gilt. Die Definition des Koeffizientenköchers impliziert nun die Existenz von Pfaden

$$(b_x \mid (\alpha_1, b_x, b_1), (\alpha_2, b_1, b_2) \dots, (\alpha_r, b_{r-1}, b_y) \mid b_y)$$

und

$$(b_x \mid (\gamma_1, b_x, d_1), (\gamma_2, d_1, d_2) \dots, (\gamma_s, d_{s-1}, b_y) \mid b_y),$$

deren Pfeile und Ecken zusammen einen von  $Q_\rho$  induzierten Kreis in  $\Gamma(M, \mathcal{B})$  bilden. Da die Wahl von  $b_x \in \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Ecke des Kreises bestimmt

---

und  $v_j \neq b_x$  keine Ecke desselben induzierten Kreises sein kann, gibt es mindestens  $n$  paarweise verschiedene Kreise.  $\square$

Die Voraussetzungen an die Kommutativitätsrelation in Lemma 2.5 legen nahe, folgende Mengen von erzeugenden Relationen zu betrachten.

**Definition 2.6.** Sei  $I$  ein zulässiges Ideal in der Wegealgebra  $KQ$  eines Köchers  $Q$ . Seien  $\varrho_1, \dots, \varrho_r \in I$  Kommutativitäts- und  $\sigma_1, \dots, \sigma_s \in I$  Nullrelationen. Wir bezeichnen  $\varrho_1, \dots, \varrho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s$  als Standarderzeuger von  $I$ , falls gilt:

1. Die Relationen erzeugen das Ideal, also  $I = \langle \varrho_1, \dots, \varrho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle$ .
2. Die Menge der Relationen ist minimal mit dieser Eigenschaft, das heißt  $\langle \varrho_1, \dots, \hat{\varrho}_i, \dots, \varrho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle \neq I \neq \langle \varrho_1, \dots, \varrho_r, \sigma_1, \dots, \hat{\sigma}_j, \dots, \sigma_s \rangle$  für alle  $1 \leq i \leq r$  und  $1 \leq j \leq s$ .
3. Ist  $\rho \in \{\varrho_1, \dots, \varrho_r\}$  und  $\rho = \omega_1 - \omega_2$  für zwei Pfade  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , so folgt  $\omega_1, \omega_2 \notin I$ .
4.  $Q_{\varrho_i}$  ist ein Kreis für alle  $1 \leq i \leq r$ .

**Bemerkung 2.7.** Sowohl in der Liste der regulären aufrichtigen darstellungsgerichteten Algebren von Bongartz als auch in der Rogat-Tesche-Liste der Ausnahmealgebren sind die Relationen stets durch Standarderzeuger angegeben.

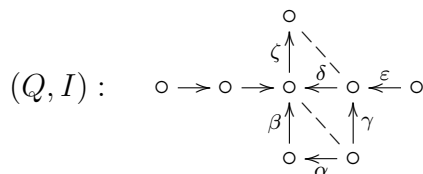
Mit Definition 2.6 und Lemma 2.5 erhält man nun den folgenden Satz.

**Satz 2.8.** Sei  $(Q, I)$  ein darstellungsgerichteter Köcher mit Relationen. Seien  $\varrho_1, \dots, \varrho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s$  Standarderzeuger von  $I$  und  $M$  eine unzerlegbare aufrichtige Darstellung von  $(Q, I)$ . Jeder Koeffizientenköcher  $\Gamma(M, \mathcal{B})$  enthält mindestens  $\sum_{i=1}^r \min\{m_j \mid j \in Q_{\varrho_i} \cap Q_0\}$  induzierte Kreise.

*Beweis.* Jede Kommutativitätsrelation  $\varrho_i$  unter den Standarderzeugern induziert nach Lemma 2.5 mindestens  $\min\{m_j \mid j \in Q_{\varrho_i} \cap Q_0\}$  paarweise verschiedene Kreise in  $\Gamma(M, \mathcal{B})$ . Für zwei verschiedene Kommutativitätsrelationen  $\varrho_i \neq \varrho_j$  unterscheiden sich die Kreise  $Q_{\varrho_i}$  und  $Q_{\varrho_j}$  in mindestens einem Pfeil, nach Definition 2.4 gilt dies also auch für zwei von  $Q_{\varrho_i}$  und  $Q_{\varrho_j}$  induzierte Kreise im Koeffizientenköcher.  $\square$

In dem folgenden Beispiel wird deutlich, wie die Basiswahl sowohl die Zahl der induzierten Kreise als auch die Zahl der nicht induzierten Kreise im Koeffizientenköcher beeinflusst.

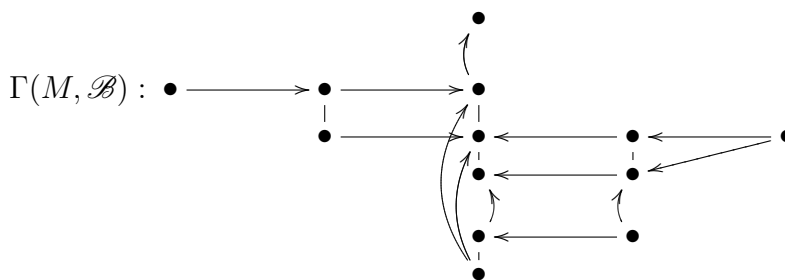
**Beispiel 2.9.** Über dem Köcher mit Relationen (Köcher 31.1 aus der Bielefeldliste 5.1)



betrachten wir die unzerlegbare Darstellung

$$M : \begin{array}{ccccccc} & & & K & & & \\ & & & \uparrow [100] & & & \\ & & & K^3 & \xleftarrow{[1]} & K^2 & \xleftarrow{[1]} & K \\ & & & \uparrow \begin{bmatrix} 10 \\ 01 \\ 00 \end{bmatrix} & & & & \\ K & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 10 \\ 01 \\ 00 \end{bmatrix}} & & & & \\ & & & \uparrow \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \\ 10 \end{bmatrix} & & & & \\ & & & K^2 & \xleftarrow{[1]} & K & & \\ & & & \uparrow [0] & & & & \\ & & & & & & & \end{array} .$$

Wie immer sind die  $I$  erzeugenden Relationen durch gestrichelte Linien angegeben. Es ist also  $I = \langle \rho, \delta\zeta \rangle$ , mit  $\rho := \alpha\beta - \gamma\delta$ . Die linearen Transformationen der Darstellung  $M$  sind durch ihre Darstellungsmatrizen für die Standardbasen der Vektorräume  $K^n$  gegeben. Diese Basisvektoren bilden zusammen auch eine Basis  $\mathcal{B}$  der Darstellung, bezüglich derer  $M$  den Koeffizientenköcher

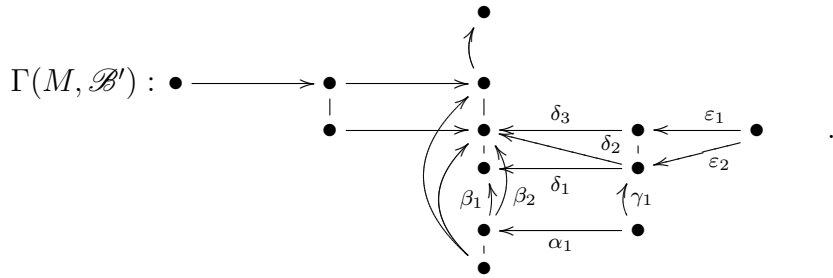


besitzt. Senkrechte unorientierte Linien verbinden hier die Basisvektoren eines Vektorraumes der Darstellung  $M$ . Die eingezeichneten Pfeile sind die Pfeile des Koeffizientenköchers. Die Basiswahl ist bestmöglich für eine geringe Anzahl von Kreisen, da  $\Gamma(M, \mathcal{B})$  lediglich einen von  $\rho$  induzierten Kreis und keine nicht induzierten Kreise enthält. Die Existenz eines von  $\rho$  induzierten Kreises ist wegen  $\min\{m_j \mid j \in Q_\rho \cap Q_0\} = \min\{\dim K, \dim K^2, \dim K^3\} = 1$  nach Satz 2.8 notwendig.

Sei  $e_1, e_2, e_3$  die Standardbasis des  $K^3$ . Wir betrachten nun dieselbe Darstellung  $M$ , ändern aber die Basis in  $K^3$ , indem wir  $e_3$  durch  $e_2 + e_3$  ersetzen. Die entsprechend modifizierte Basis der Darstellung bezeichnen wir mit  $\mathcal{B}'$ . Dadurch erhalten wir die Darstellungsmatrizen

$$M : \begin{array}{ccccccc} & & & K & & & \\ & & & \uparrow [100] & & & \\ & & & K^3 & \xleftarrow{[1]} & K^2 & \xleftarrow{[1]} & K \\ & & & \uparrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & & \\ & & & K^2 & \xleftarrow{[1]} & K & & \\ & & & \uparrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & & & \\ & & & K^2 & \xrightarrow{[0]} & K & & \\ & & & \uparrow \begin{bmatrix} 10 \\ 01 \\ 00 \end{bmatrix} & & & & \\ & & & K^2 & & & & \\ & & & \uparrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & & & & \\ & & & K & & & & \end{array}$$

sowie den Koeffizientenköcher



Er enthält zwei von  $\rho$  induzierte Kreise,  $\alpha_1\beta_1\delta_1^{-1}\gamma_1^{-1}$  und  $\alpha_1\beta_2\delta_2^{-1}\gamma_1^{-1}$ , ist also nicht optimal bezüglich der Vermeidung induzierter Kreise. Daneben gibt es vier nicht induzierte Kreise,  $\beta_1\delta_1^{-1}\delta_2\beta_2^{-1}$ ,  $\varepsilon_1\delta_3\delta_2^{-1}\varepsilon_2^{-1}$ ,  $\varepsilon_1\delta_3\beta_2^{-1}\beta_1\delta_1^{-1}\varepsilon_2^{-1}$  und  $\varepsilon_1\delta_3\beta_2^{-1}\alpha_1^{-1}\gamma_1\varepsilon_2^{-1}$ .

Die Kreise eines Koeffizientenköchers lassen sich in induzierte und nicht induzierte unterteilen. Bei den induzierten Kreisen unterscheiden wir weiterhin diejenigen, die von Kreisen der Form  $Q_\rho$  für eine erzeugende Kommutativitätsrelation  $\rho$  induziert werden, von denjenigen, bei denen dies nicht der Fall ist.

**Definition 2.10.** Für einen Koeffizientenköcher  $\Gamma = \Gamma(M, \mathcal{B})$  setzen wir

$$\begin{aligned} c_0(\Gamma) &:= \#\{c \text{ Kreis in } \Gamma \mid c \text{ ist nicht induziert.}\} \\ c_1(\Gamma) &:= \#\{c \text{ induzierter Kreis in } \Gamma \mid \exists i \in \{1, \dots, r\} : c = \overline{Q_{\varrho_i}}\} \\ c_2(\Gamma) &:= \#\{c \text{ induzierter Kreis in } \Gamma \mid \nexists i \in \{1, \dots, r\} : c = \overline{Q_{\varrho_i}}\}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Gleichung

$$\#\{c \mid c \text{ ist Kreis in } \Gamma\} = c_0(\Gamma) + c_1(\Gamma) + c_2(\Gamma).$$

Aus dem Beweis zu Satz 2.8 folgt, dass  $\sum_{i=1}^r \min\{m_j \mid j \in Q_{\varrho_i} \cap Q_0\}$  sogar eine untere Schranke für  $c_1(\Gamma(M, \mathcal{B}))$  ist. Um möglichst einfache Koeffizientenköcher zu erhalten, versucht man, nicht induzierte Kreise zu vermeiden und die Zahl der induzierten Kreise auf die in Satz 2.8 angegebene untere Grenze zu beschränken. Wir werden jedoch später sehen, dass dies nicht immer möglich ist, da sich induzierte Kreise, die nicht zu erzeugenden Kommutativitätsrelationen gehören, im Allgemeinen nicht vermeiden lassen (siehe Bemerkung 4.7).

Es scheint aber für unzerlegbare Darstellungen von darstellungsgerichteten Köchern mit Relationen stets einen Koeffizientenköcher zu geben, der  $c_1(\Gamma(M, \mathcal{B})) = \sum_{i=1}^r \min\{m_j \mid j \in Q_{\varrho_i} \cap Q_0\}$  erfüllt.

Weiterhin vermuten wir, dass die Zahl  $\sum_{i=1}^r \min\{m_j \mid j \in Q_{\varrho_i} \cap Q_0\}$  unabhängig von der Menge der Standarderzeuger ist, also nur von dem Köcher mit Relationen  $(Q, I)$  und dem gegebenen Dimensionsvektor  $m$  abhängt.

---

### 3 Konstruktion und Eigenschaften der Bielefeldliste

In diesem Abschnitt wird erläutert, nach welchen Regeln die Bielefeldliste ausgehend von der Rogat-Tesche-Liste aufgestellt wurde. Anschließend werden einige Eigenschaften der Bielefeldliste gesammelt.

In [RT] geben Rogat und Tesche die Köcher mit Relationen aller aufrichtigen darstellungsgerichteten Algebren mit  $n(A) \leq 13$  an. Sie fassen dabei alle Algebren, deren Gabriel-Köcher denselben zugrundeliegenden Graphen besitzen, zusammen, indem sie die Orientierung der Pfeile weglassen. Eine Menge von Standarderzeugern des Ideals der Relationen geben sie durch gestrichelte Linien an. Weiterhin beschriften sie die Ecken des Graphen einer solchen Algebrenmenge mit den Einträgen des Dimensionsvektors  $\underline{\dim} M = (m_i)_{i \in Q_0}$  eines maximal unzerlegbaren aufrichtigen Moduls eines Repräsentanten. (Algebren mit demselben zugrundeliegenden Graphen besitzen maximal unzerlegbare aufrichtige Moduln mit demselben Dimensionsvektor, da dieser einer maximalen positiven Wurzel der quadratischen Form des Köchers entspricht, welche unabhängig von der gewählten Orientierung ist.)

Auch in dieser Arbeit verwenden wir Kanten statt Pfeile, wenn die Orientierung frei gewählt werden kann. Bei dieser Wahl ist jedoch immer so zu verfahren, dass die gegebenen Relationen erfüllt werden können.

#### 3.1 Kürzungsregeln

Sei  $(Q, I = \langle \varrho_1, \dots, \varrho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle)$  ein darstellungsgerichteter Köcher mit Relationen und  $m = (m_i)_{i \in Q_0}$  ein Dimensionsvektor einer aufrichtigen Darstellung. Insbesondere gibt es dann keine Schlaufen, also Pfeile mit demselben Ursprung und Ziel, sowie höchstens einen Pfeil zwischen zwei fixierten Ecken in  $Q$ . Wir betrachten die folgenden Kürzungsregeln:

##### 1. Zusammenziehen von Isomorphismen

Seien  $i, j \in Q_0$  Ecken derselben Dimension, und es gebe eine Kante, aber keine erzeugende Relation zwischen  $i$  und  $j$ . Wir setzen also die Existenz eines  $\alpha \in Q_1$  mit  $\{s(\alpha), t(\alpha)\} = \{i, j\}$  und das Nichtvorhandensein eines  $\rho \in \{\varrho_1, \dots, \varrho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s\}$  mit  $\{s(\rho), t(\rho)\} = \{i, j\}$  sowie  $m_i = m_j$  voraus. In dieser Situation identifizieren wir die beiden Ecken  $i$  und  $j$  vermöge der Abbildung

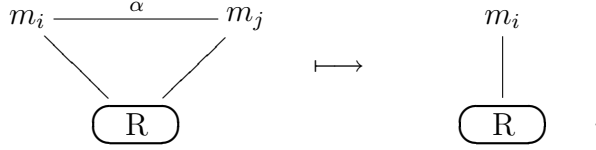
$$F_{i,j} : ((Q, I), m) \mapsto ((Q', I'), m'),$$

### 3 KONSTRUKTION UND EIGENSCHAFTEN DER BIELEFELDLISTE

die durch

$$\begin{aligned}
 Q'_0 &:= Q_0 \setminus \{j\} \\
 Q'_1 &:= \{\beta' \mid \beta \in Q_1, \beta \neq \alpha\} \\
 \beta' &:= \begin{cases} \beta' : i \rightarrow k, \text{ falls } s(\beta) = j, t(\beta) = k \\ \beta' : k \rightarrow i, \text{ falls } s(\beta) = k, t(\beta) = j \\ \beta' = \beta, \text{ falls } j \notin \{s(\beta), t(\beta)\} \end{cases} \\
 I' &:= \langle \varrho'_1, \dots, \varrho'_r, \sigma'_1, \dots, \sigma'_s \rangle \\
 \varrho'_i &:= \begin{cases} \pm(\tau_1\tau_2 - \omega), \text{ falls } \varrho_i = \pm(\tau_1\alpha\tau_2 - \omega) \\ \varrho_i, \text{ sonst} \end{cases} \quad \text{für } i = 1, \dots, r \\
 \sigma'_j &:= \begin{cases} \tau_1\tau_2, \text{ falls } \sigma_j = \tau_1\alpha\tau_2 \\ \sigma_j, \text{ sonst} \end{cases} \quad \text{für } j = 1, \dots, s \\
 m' &:= (m_i)_{i \in Q'_0}
 \end{aligned}$$

definiert wird. Hierbei sind die  $\tau_i$  beliebige, möglicherweise auch stationäre Pfade. Graphisch lässt sich die Abbildung folgendermaßen darstellen:



Dabei steht  $\textcircled{R}$  für den restlichen Koecker. Die Verbindungslinie einer Ecke zum Restkoecker kann für eine, mehrere oder auch keine Kante stehen. Da in einem darstellungsgerichteten Koecker alle Kreise aus mindestens vier Kanten bestehen, kann es jedoch nicht vorkommen, dass eine Ecke des Restkoechers durch Kanten mit  $i$  und  $j$  zugleich verbunden ist. Auch  $Q'$  besitzt daher keine parallelen Kanten.

Es kann aber in der obigen Definition der Fall eintreten, dass eine erzeugende Kommutativitätsrelation  $\varrho'_i$  einen Pfad  $\tau_1\tau_2$  der Länge eins enthält, also keine Relation im eigentlichen Sinne mehr ist. Insbesondere ist  $I'$  dann kein zulässiges Ideal. Für diesen Fall benötigen wir die untenstehende zweite Zuordnung.

Für die entstehenden Nullrelationen  $\sigma'_j$  tritt dieses Problem nicht auf, denn nach der Definition von Relationen haben alle Pfade in  $I$  mindestens die Länge zwei. Ein Pfeil  $\alpha$  zwischen zwei Ecken derselben Dimension bedingt nach Lemma 2.3 also stets einen Isomorphismus  $M_\alpha$  in der Darstellung  $M$ . Hat nun die Komposition  $\tau_1\tau_2$  die Länge eins, so ist einer der Pfade stationär, der andere besteht aus einem Pfeil. Sei etwa  $\tau_1\tau_2 = \tau_1$ . Für die ursprüngliche Nullrelation erhalten wir damit  $\sigma_j = \tau_1\alpha$  sowie  $0 = M_\sigma = M_\alpha \circ M_{\tau_1}$ .



Da  $M_\alpha$  ein Isomorphismus ist und keine Vektorräume der Dimension Null auftreten, gilt  $M_{\tau_1} = 0$ . Diese Abbildung muss jedoch nach Lemma 2.3 Monomorphismus oder Epimorphismus sein. Dieses ergibt einen Widerspruch zu der Tatsache, dass  $M$  aufrichtig ist.

Dem Entfernen von  $\alpha$  entspricht gewissermaßen in  $\text{rep}(Q, I)$  die Einschränkung auf die volle Unterkategorie der Darstellungen, die für  $M_\alpha$  die Identität als Isomorphismus besitzen.

## 2. Eliminierung uneigentlicher Relationen

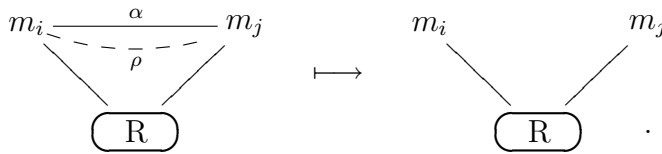
Die folgende Abbildung definieren wir auf der Menge der Bilder der ersten Abbildung, insbesondere sind die Voraussetzungen gerade nicht erfüllt, wenn wir einen darstellungsgerichteten Köcher betrachten. Seien  $i, j \in Q_0$  Ecken, die sowohl durch eine Kante  $\alpha$  als auch eine (uneigentliche) erzeugende Kommutativitätsrelation, die  $\alpha$  als Pfad enthält, verbunden sind. Es gibt also  $\alpha \in Q_1$  mit  $\{s(\alpha), t(\alpha)\} = \{i, j\}$  und  $\rho \in \{\varrho_1, \dots, \varrho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s\}$  mit  $\rho = \pm(\alpha - \nu)$  für einen Pfad  $\nu$  mit  $\{s(\nu), t(\nu)\} = \{i, j\}$ . In diesem Fall lassen wir Kante und Relation weg. Wir wenden hier dementsprechend die Abbildung

$$G_{i,j} : ((Q, I), m) \mapsto ((Q', I'), m)$$

an, definiert durch

$$\begin{aligned} Q'_0 &:= Q_0 \\ Q'_1 &:= Q_1 \setminus \{\alpha\} \\ I' &:= \langle \varrho'_1, \dots, \varrho'_r, \sigma'_1, \dots, \sigma'_s \rangle \\ \varrho'_i &:= \begin{cases} \pm(\tau_1 \nu \tau_2 - \omega), & \text{falls } \varrho_i = \pm(\tau_1 \alpha \tau_2 - \omega) \\ \varrho_i, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } i = 1, \dots, r \\ \sigma'_j &:= \begin{cases} \tau_1 \nu \tau_2, & \text{falls } \sigma_j = \tau_1 \alpha \tau_2 \\ \sigma_j, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } j = 1, \dots, s \quad . \end{aligned}$$

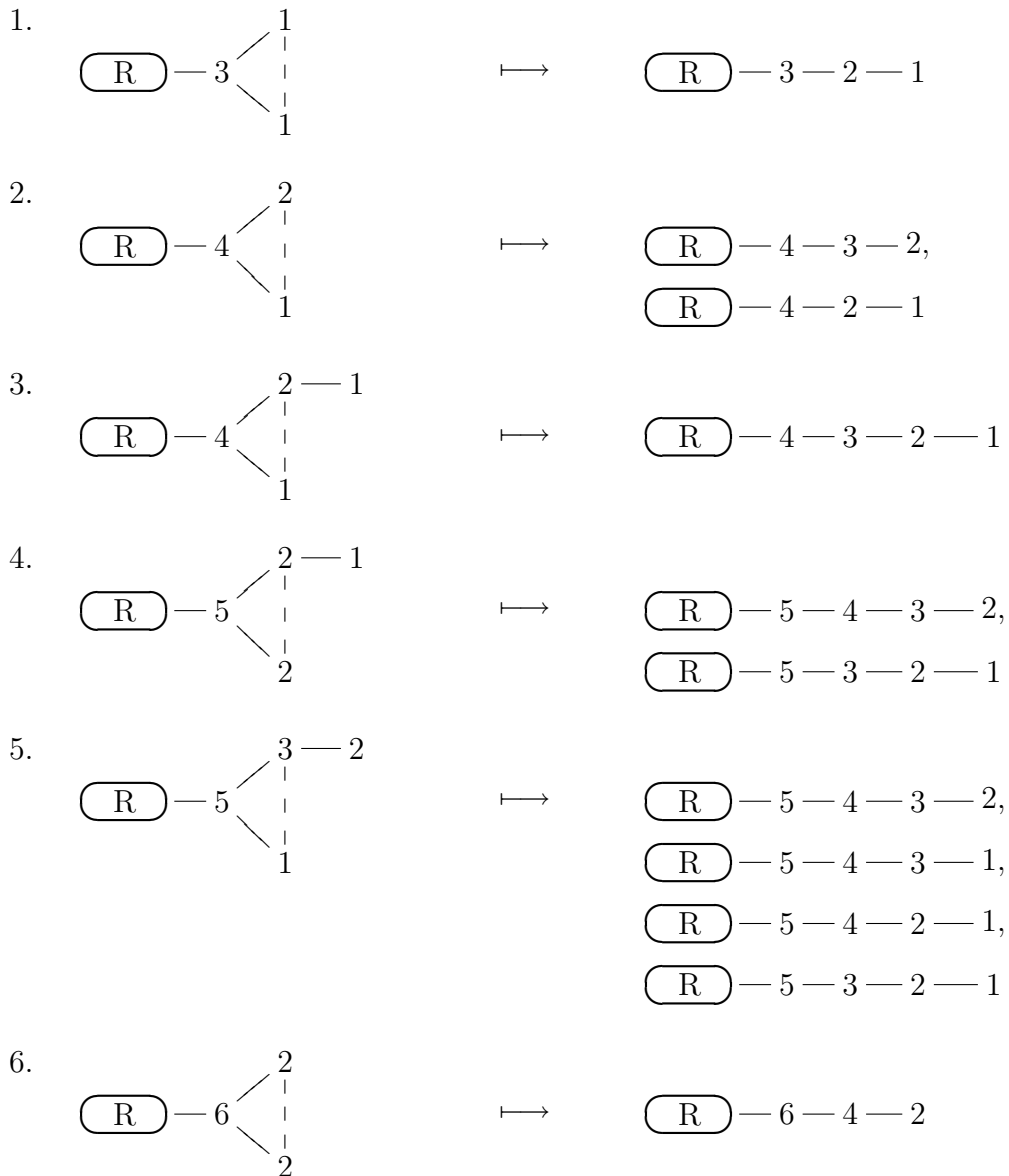
Als zugehöriges Schaubild erhalten wir



Zur Motivation dieser Zuordnung bemerken wir noch, dass die in der zugehörigen linearen Abbildung  $M_\alpha$  gespeicherte Information auf Grund der Relation schon vollständig in der Auswertung des Pfades  $\nu$  enthalten ist.

### 3. Normierung freier Arme

Die folgende Familie von Zuordnungen geben wir lediglich durch ihre Schaubilder an, da die auftretenden Dimensionen durch konkrete Zahlen gegeben sind. In einigen Fällen handelt es sich nicht um Abbildungen, da einem Objekt der Rogat-Tesche-Liste mehrere der Bielefeldliste zugeordnet werden. Dies begründet sich in einer Abhängigkeit der gewünschten Zuordnung von der noch nicht gewählten Orientierung. Wir verdeutlichen dies anschließend an einem Beispiel.



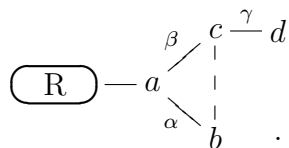
$$\begin{array}{ccc}
 7. & \begin{array}{c} \textcircled{\text{R}} - 6 \begin{array}{l} \nearrow 3 - 2 \\ | \\ \searrow 2 - 1 \end{array} & \mapsto & \begin{array}{l} \textcircled{\text{R}} - 6 - 5 - 4 - 3 - 2, \\ \textcircled{\text{R}} - 6 - 5 - 4 - 3 - 1, \\ \textcircled{\text{R}} - 6 - 5 - 3 - 2 - 1, \\ \textcircled{\text{R}} - 6 - 4 - 3 - 2 - 1 \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 8. & \begin{array}{c} \textcircled{\text{R}} - 6 \begin{array}{l} \nearrow 4 - 2 - 1 \\ | \\ \searrow 1 \end{array} & \mapsto & \begin{array}{l} \textcircled{\text{R}} - 6 - 5 - 4 - 3 - 2, \\ \textcircled{\text{R}} - 6 - 5 - 4 - 2 - 1, \\ \textcircled{\text{R}} - 6 - 4 - 3 - 2 - 1 \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 9. & \begin{array}{c} \textcircled{\text{R}} - 6 \begin{array}{l} \nearrow 4 - 3 - 2 \\ | \\ \searrow 1 \end{array} & \mapsto & \begin{array}{l} \textcircled{\text{R}} - 6 - 5 - 4 - 3 - 2, \\ \textcircled{\text{R}} - 6 - 5 - 4 - 3 - 1, \\ \textcircled{\text{R}} - 6 - 5 - 4 - 2 - 1, \\ \textcircled{\text{R}} - 6 - 5 - 3 - 2 - 1, \\ \textcircled{\text{R}} - 6 - 4 - 3 - 2 - 1 \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

Diese Zuordnungen sind dadurch motiviert, dass man alle in den linken Darstellungen kodierten Informationen durch eine Kette von ineinander enthaltenen Untervektorräumen des Vektorraums mit maximaler Dimension darstellen möchte. Die dazu nötigen Dimensionen der Untervektorräume hängen von der links gewählten Orientierung ab. Wir betrachten als Beispiel alle möglichen Orientierungen bei der vierten Zuordnung.

**Beispiel 3.1.** Zunächst seien Ecken und Kanten wie folgt benannt:



Mit diesen Definitionen ist  $m = (m_a, m_b, m_c, m_d) = (5, 2, 2, 1)$  der Dimensionsvektor des betrachteten Teilköchers.

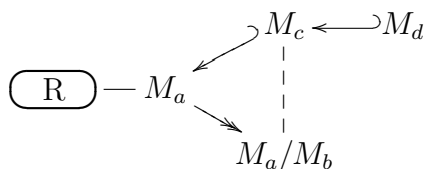


ergibt dies  $\text{Im } \alpha \subset \text{Ker } \beta \subset \beta^{-1}(\text{Ker } \gamma) \subset M_a$ , und wegen  $\dim \beta^{-1}(\text{Ker } \gamma) = 4$  resultiert daraus derselbe Teilköcher wie für die vorherige Orientierung.

Beide auftretenden Dimensionsvektoren zusammen ergeben dann das Bild der Zuordnung in der Bielefeldliste. Dass dieses Vorgehen sinnvoll ist, kann man auch daran sehen, dass die ursprüngliche Darstellung aus derjenigen des Köchers

$$\textcircled{\text{R}} - a \leftarrow b \leftarrow c \leftarrow d$$

zurückgewonnen werden kann. Für die Inklusionskette  $M_a \supset M_b \supset M_c \supset M_d$  mit Dimensionsvektor  $(m_a, m_b, m_c, m_d) = (5, 3, 2, 1)$  etwa liefert



mit den kanonischen Inklusionen und Projektionen als Abbildungen eine Darstellung für die zuerst gewählte Orientierung.

Die anderen Zuordnungen ergeben sich analog zu diesem Beispiel, indem man jeweils für alle möglichen Orientierungen die Dimensionen der entsprechenden Inklusionsketten berechnet.

**Definition 3.2.** Eine Ecke eines Köchers heißt Verzweigungspunkt, wenn sie durch Kanten mit mindestens drei anderen Ecken verbunden ist. Sie heißt Endpunkt, falls sie mit genau einer anderen Ecke verbunden ist. Ein Arm ist ein Teilköcher der Form  $A_n$ , bestehend aus den Ecken und Kanten eines Weges, welcher in einem Verzweigungspunkt beginnt, in einem Endpunkt endet und keine weiteren Verzweigungspunkte enthält. Die Länge des Arms ist die Länge des Weges. Einen Arm bezeichnen wir als frei, falls seine Pfeile zu keiner Relation gehören.

Der einer Inklusionskette entsprechende Teilköcher ist nach dieser Definition also stets ein freier Arm.

### 3.2 Anwendung der Kürzungsregeln

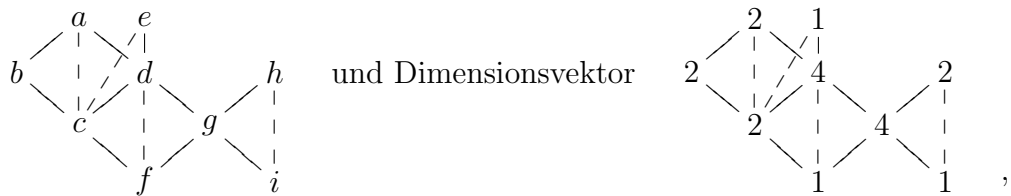
Zur Konstruktion der Bielefeldliste wenden wir auf jedes Objekt der Rogat-Tesche-Liste eine Hintereinanderschaltung der Kürzungsregeln an. Die Hintereinanderschaltung soll dabei in der Weise maximal sein, dass auf das Ergebnis keine Zuordnung mehr anwendbar ist. Das Verfahren bricht ab, da

### 3 KONSTRUKTION UND EIGENSCHAFTEN DER BIELEFELDLISTE

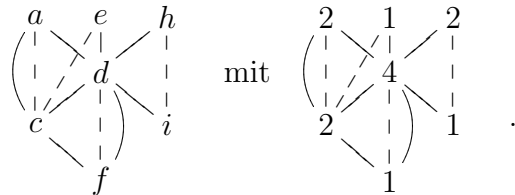
ein Köcher in dieser Arbeit nur endlich viele Ecken, Kanten und erzeugende Relationen besitzt und jede Zuordnung keine dieser Mengen vergrößert und mindestens eine verkleinert. Wir vermuten, dass das Ergebnis unabhängig von der Auswahl der konkreten Komposition von Zuordnungen ist, die Bielefeldliste also durch die Kürzungsregeln und die Rogat-Tesche-Liste eindeutig bestimmt ist.

Wir erläutern das Verfahren nun noch abschließend an einem Beispiel.

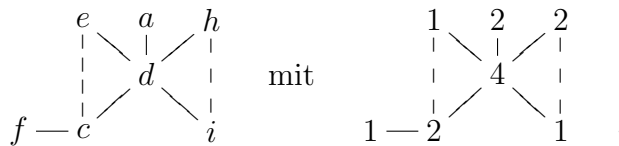
**Beispiel 3.3.** Wir starten mit dem Köcher mit Relationen



der in [RT] die Nummer (5,2,1) 673 hat. Durch Anwendung von  $F_{a,b}$  und  $F_{d,g}$  erhält man



Die Abbildungen  $G_{a,c}$  und  $G_{d,f}$  ergeben nun den Köcher



Die zweite und dritte Zuordnung zur Normierung freier Arme liefern schließlich das Dynkindiagramm  $E_7$  mit den Wurzeln

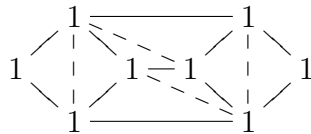


Dieser Köcher trägt in der Bielefeldliste die Nummer 40.



### 3 KONSTRUKTION UND EIGENSCHAFTEN DER BIELEFELDLISTE

zweimal angenommen, bei den Köchern 33.1 und 48.1. Die Anzahl der Kreise in diesen Köchern ist jeweils drei. Bei allen anderen Köchern entspricht die zyklomatische Zahl trivialerweise der Anzahl der Kreise. In der Rogat-Tesche-Liste treten Köcher mit deutlich mehr Kreisen auf. Die maximale zyklomatische Zahl ist dort vier, die größte Zahl von Kreisen in einem Köcher ist 14. Beide Maxima werden zum Beispiel in  $(3,2,2)$  18 angenommen:



In beiden Listen ist die zyklomatische Zahl zugleich die Anzahl der Kommutativitätsrelationen in der gegebenen Menge von Standarderzeugern. In der Rogat-Tesche-Liste gibt es höchstens zwei Kommutativitätsrelationen oder eine Nullrelation, die zwei gegebene Ecken als Ursprung und Ziel besitzen, wohingegen in der Bielefeldliste höchstens eine Relation zwischen zwei Ecken auftritt.

7. Auf die Köcher 50.9, 51.9.1, 51.9.2, 52.9, 53.9, 54.9, 55.9 und 56.9 kann noch die erste Zuordnung zur Normierung freier Arme angewandt werden. Diese Köcher sind also eigentlich aus der Liste zu entfernen, da die Hintereinanderschaltung von Kürzungsregeln bei ihrer Konstruktion nicht maximal ist. Wendet man die Zuordnung an, so wird 50.9 zu 50.7, 51.9.1 zu 51.7.1, 51.9.2 zu 51.7.2, 52.9 zu 52.7, etc., das eigentliche Ergebnis des Kürzungsverfahrens ist also schon in der Bielefeldliste enthalten. Wir verzichten auf das Entfernen dieser Köcher, da sich dann diejenigen Köcher, deren maximaler Eintrag eines zugehörigen Dimensionsvektors fünf ist, wie folgt strukturieren lassen:

- (a) Wir haben zunächst die Köcher 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58 mit jeweils vier Dimensionsvektoren, die sich jedoch nur auf dem stets vorhandenen freien Arm der Länge drei unterscheiden:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{R} & - 5 - 4 - 3 - 2, \\
 \textcircled{R} & - 5 - 4 - 3 - 1, \\
 \textcircled{R} & - 5 - 4 - 2 - 1, \\
 \textcircled{R} & - 5 - 3 - 2 - 1.
 \end{aligned}$$





## 4 Kreisminimale Koeffizientenköcher

In diesem Abschnitt geben wir als wesentliches Ergebnis der Arbeit eine Anleitung zur Konstruktion von unzerlegbaren Darstellungen über den Köchern der Bielefeldliste, die einerseits die gegebenen Dimensionsvektoren haben und andererseits bei kanonischer Basiswahl Koeffizientenköcher mit minimaler Anzahl von Kreisen besitzen.

Für einen Köcher und eine Zerlegung seiner Eckenmenge mit gewissen Eigenschaften definieren wir nun eine Darstellung, die diesen Köcher als Koeffizientenköcher besitzt.

**Definition 4.1.** Gegeben sei ein Köcher  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$  sowie eine Zerlegung  $\Gamma_0 = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  von  $\Gamma_0$  in paarweise disjunkte Mengen, sodass es keinen Pfeil gibt, der in derselben Zerlegungsmenge beginnt und endet, es gelte also  $i \neq j$ , falls es ein  $\gamma \in \Gamma_1$  mit  $s(\gamma) \in A_i$  und  $t(\gamma) \in A_j$  gibt.

Die kanonische Darstellung mit Koeffizientenköcher  $\Gamma$  bezeichnen wir mit  $M_\Gamma$ . Sie wird folgendermaßen konstruiert: Wir setzen  $Q_0 := \{1, \dots, n\}$  und fügen  $Q_1$  einen Pfeil  $\alpha$  von  $i$  nach  $j$  hinzu, falls es in  $\Gamma_1$  mindestens einen Pfeil  $\gamma$  mit  $s(\gamma) \in A_i$  und  $t(\gamma) \in A_j$  gibt. Weiter definieren wir  $M_i := K^{A_i}$  und setzen  $\mathcal{B}_i := A_i$ . Die linearen Abbildungen legen wir für  $x \in \mathcal{B}_i$  und  $y \in \mathcal{B}_j$  durch

$$M_{\alpha, \mathcal{B}}(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls es einen Pfeil } \gamma : x \rightarrow y \text{ gibt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

fest. Damit gilt offenbar  $\Gamma = \Gamma(M_\Gamma, \mathcal{B})$ .

**Lemma 4.2.** *Gilt  $\text{End}(M) \cong K$  für eine Darstellung  $M$ , so ist  $M$  unzerlegbar.*

**Beweis.** Sei  $\text{End}(M) \cong K$ . Angenommen es gäbe eine nichttriviale Zerlegung  $M = L \oplus N$ , dann können wir Endomorphismen  $f := \text{Id}_L$  und  $g := 0_N$  definieren. Es ist  $[f, g] \in \text{End}(L \oplus N) = \text{End}(M)$  und offenbar gilt  $[f, g] \neq \lambda \cdot \text{Id}_M$  für alle  $\lambda \in K$ , ein Widerspruch zu  $\text{End}(M) \cong K$ .

**Satz 4.3.** *Sei  $((Q, I), m)$  ein Paar aus Köcher mit Relationen und Dimensionsvektor aus der Bielefeldliste. Seien weiterhin  $\varrho_1, \dots, \varrho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s$  die gegebenen Standarderzeuger von  $I$ . Zu mindestens einer Orientierung von  $Q$  gibt es eine unzerlegbare Darstellung  $M$  mit  $\underline{\dim} M = m$  und eine Basis  $\mathcal{B}$ , sodass für den Koeffizientenköcher  $\Gamma(M, \mathcal{B})$*

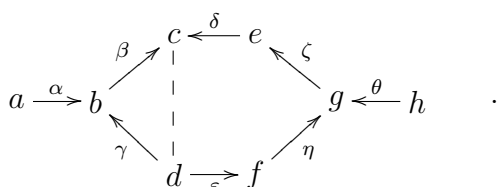
$$c_0(\Gamma(M, \mathcal{B})) = 0 \text{ und } c_1(\Gamma(M, \mathcal{B})) = \sum_{i=1}^r \min\{m_j \mid j \in Q_{\varrho_i} \cap Q_0\}$$

*gilt.*

Hier sind  $c_0$  und  $c_1$  die in Definition 2.10 eingeführten Kreisanzahlen.

*Beweis.* Für ein Element der Bielefeldliste betrachten wir den zugehörigen Köcher  $\Gamma$  aus der Liste 5.2 der Koeffizientenköcher im Anhang. Dieser erfüllt jeweils die beiden Gleichungen des Satzes. Es bleibt zu zeigen, dass die kanonische Darstellung mit Koeffizientenköcher  $\Gamma$  unzerlegbar und eine Darstellung des Köchers mit Relationen ist. Zum Nachweis der Unzerlegbarkeit berechnet man die Endomorphismenalgebra  $\text{End}(M)$  und wendet Lemma 4.2 an. Dass die Darstellung die Relationen erfüllt, sieht man, indem man die Auswertungen der beteiligten Pfade berechnet. Für das folgende Beispiel geben wir zur Verdeutlichung des Vorgehens einen ausführlichen Beweis an.  $\square$

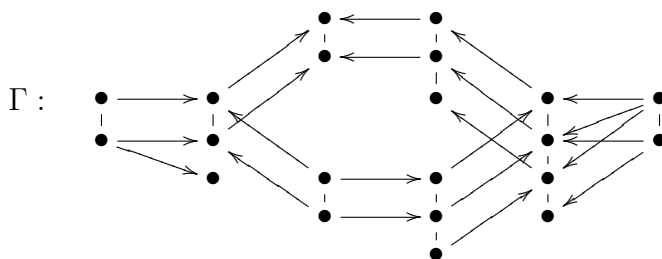
**Beispiel 4.4.** Für den Köcher 45 aus der Bielefeldliste benennen wir die Ecken und Kanten und wählen eine Orientierung wie folgt:



Der zugehörige Dimensionsvektor aus unserer Liste ist

$$\begin{array}{c}
 2-3 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 2-3 \quad \quad \quad 4-2 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 2-3
 \end{array}
 , \text{ also } (m_a, \dots, m_h) = (2, 3, 2, 2, 3, 3, 4, 2).$$

Als einzigen Erzeuger des Ideals  $I$  haben wir  $\rho := \gamma\beta - \varepsilon\eta\zeta\delta$ . Die Summe aus Satz 4.3 besteht daher nur aus einem Summanden und hat den Wert zwei. Dies ist zugleich die Anzahl der von  $\rho$  induzierten Kreise in dem Koeffizientenköcher  $\Gamma$  mit der Nummer 45 aus der Liste 5.2.



Man beachte, dass dieser Köcher keine nicht induzierten Kreise besitzt, also auch die zweite Gleichung aus Satz 4.3 erfüllt ist. Wir müssen noch zeigen,

#### 4 KREISMINIMALE KOEFFIZIENTENKÖCHER

---

dass die kanonische Darstellung mit Koeffizientenköcher  $\Gamma$  unzerlegbar über dem Köcher  $(Q, I)$  ist, also einem unzerlegbaren Modul über der Algebra  $KQ / \langle \rho \rangle$  entspricht. Hierbei verbinden die senkrechten Striche jeweils die Punkte einer Zerlegungsmenge  $A_i$ . Die linearen Abbildungen der Darstellung sind also durch

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_\beta = M_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_\gamma = M_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

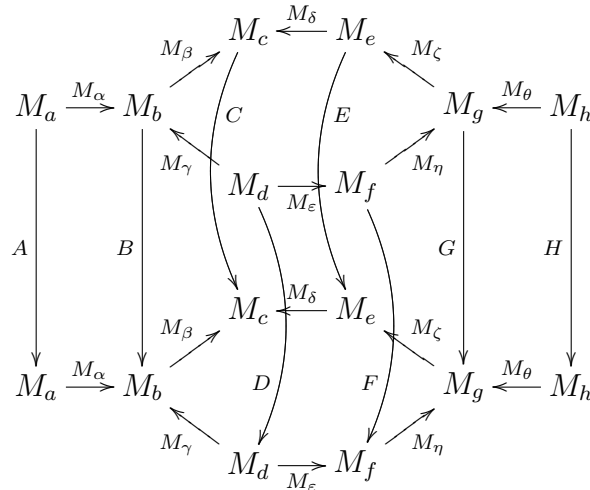
$$M_\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Gleichung

$$M_\beta M_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_\delta M_\zeta M_\eta M_\varepsilon$$

zeigt, dass  $M$  eine Darstellung des Köchers mit Relationen ist, da die Auswertungen der beiden Pfade der erzeugenden Kommutativitätsrelation dieselbe lineare Abbildung ergeben. (Für eine Nullrelation wäre zu zeigen, dass die Auswertung des zugehörigen Pfades die Nullabbildung ist.)

Wir zeigen nun, dass die Darstellung  $M$  unzerlegbar ist. Sei dazu  $\mathcal{F}$  ein Endomorphismus von  $M$ , etwa  $\mathcal{F} = (A, B, \dots, H)$ , mit  $A = (a_{ij}) \in \text{End}(M_a), \dots, H = (h_{ij}) \in \text{End}(M_h)$ . In dem folgenden Diagramm sind also alle Vierecke kommutativ.



Dies liefert für jeden Pfeil des Köchers eine Matrixgleichung. Alle derartigen Matrixgleichungen bilden, da die Darstellungsmatrizen der Abbildungen in

---

$M$  bekannt sind, ein lineares Gleichungssystem in den  $\sum_{i \in Q_0} m_i^2 = 59$  unbekanntem Einträgen der Matrizen  $A, B, \dots, H$ . Die Anzahl der Gleichungen ist  $\sum_{\alpha \in Q_1} m_s(\alpha)m_t(\alpha) = 62$ . Wir nehmen nun  $a_{11} = \lambda$  für ein  $\lambda \in K$  an und werden zeigen, dass dadurch alle anderen Einträge eindeutig bestimmt sind, das Gleichungssystem also einen eindimensionalen Lösungsraum besitzt. Wir werten dazu die Matrixgleichungen zu den einzelnen Pfeilen nacheinander aus.

$\alpha$ : Die Matrixgleichung zum Pfeil  $\alpha$  lautet

$$BM_\alpha = M_\alpha A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} + b_{13} \\ b_{21} & b_{22} + b_{23} \\ b_{31} & b_{32} + b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Die erste Gleichung,  $b_{11} = \lambda$ , verwenden wir, um für die Matrix  $B$  als Zwischenergebnis

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

festzuhalten. Die restlichen Gleichungen werden später ausgenutzt.

$\beta$ : Für den Pfeil  $\beta$  bekommt man

$$CM_\beta = M_\beta B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Hier lassen sich die Gleichungen, die 0 oder  $\lambda$  involvieren, sofort auswerten, was zu

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \lambda & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

führt, die drei anderen Gleichungen bleiben zunächst unberücksichtigt.

$\gamma$ : Der dritte Pfeil liefert

$$BM_\gamma = M_\gamma D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Zusätzlich zu den offensichtlich direkt verwendbaren Gleichungen oben links und in der dritten Zeile der Matrizen lassen sich hiermit erstmalig bereits vorher bekannte Gleichungen auswerten. Wir erhalten die Gleichungskette  $0 = b_{31} \stackrel{(1)}{=} a_{21} \stackrel{(1)}{=} b_{21} \stackrel{(2)}{=} c_{21}$ , woraus mit (3) wiederum  $d_{21} = 0$  folgt, also insgesamt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \lambda & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}.$$

$\delta$ : Für den Pfeil  $\delta$  ergibt sich die Matrixgleichung

$$CM_\delta = M_\delta E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \end{pmatrix} \quad (4)$$

und nach Auswertung der ersten und dritten Spalten

$$E = \begin{pmatrix} \lambda & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}.$$

$\varepsilon$ : Auch bei der Matrixgleichung zu dem Pfeil  $\varepsilon$ ,

$$FM_\varepsilon = M_\varepsilon D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & d_{12} \\ 0 & d_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

verwenden wir zunächst nur die Gleichungen mit 0 oder  $\lambda$ , was

$$F = \begin{pmatrix} \lambda & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & 0 & f_{33} \end{pmatrix}$$

ergibt.

$\zeta$ : Gleiches gilt für

$$EM_\zeta = M_\zeta G$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & e_{12} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \end{pmatrix} \quad (6)$$

und

$$G = \begin{pmatrix} \lambda & g_{12} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix}.$$

$\eta$ : Die Matrixgleichung zu dem Pfeil  $\eta$  ist durch

$$GM_\eta = M_\eta F \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & g_{12} & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & 0 & f_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

gegeben. Wir lesen  $0 = g_{31} = g_{32} = g_{41} = g_{42} = g_{43} = f_{13} = f_{23}$  ab. Mit (6) folgt daraus  $0 = e_{31} = e_{32}$ , sodass wir insgesamt

$$E = \begin{pmatrix} \lambda & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \lambda & f_{12} & 0 \\ 0 & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \lambda & g_{12} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix}$$

erhalten. Man beachte, dass nicht nur die ersten beiden Gleichungen der ersten Spalte, sondern auch die Gleichungen  $g_{12} = f_{12}$  und  $g_{22} = f_{22}$  aus der zweiten Spalte keine neuen Informationen beinhalten, da wir bereits

$$\begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} \stackrel{(6)}{=} \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} \stackrel{(4)}{=} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{=} \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{pmatrix} \stackrel{(5)}{=} \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix} \quad (8)$$

haben. Diese  $4 = 2 \cdot 2 = m_c \cdot m_d$  Gleichungen, die man ohne Änderung des Lösungsraums entfernen könnte, gehören gewissermaßen zu der Matrixgleichung  $M_\beta M_\gamma = M_\delta M_\zeta M_\eta M_\varepsilon$ , also zu der Kommutativitätsrelation  $\rho$ . Dies sieht man - bei Betrachtung vieler Beispiele - auch daran, dass ihre Anzahl stets durch  $m_{s(\rho)} \cdot m_{t(\rho)}$  gegeben ist und sie genau dann auftreten, wenn man die Matrixgleichung zu dem letzten Pfeil des mit der Relation korrespondierenden Kreises auswertet.

$\theta$ : Der letzte Pfeil liefert nun die Matrixgleichung

$$GM_\theta = M_\theta H \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda + g_{12} & g_{12} \\ g_{22} & g_{22} \\ g_{33} & 0 \\ 0 & g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{11} + h_{21} & h_{12} + h_{22} \\ h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix},$$

der wir zuerst  $0 = h_{21} = h_{12} = g_{12}$  entnehmen. Damit lässt sich nun  $\lambda = h_{11} = g_{33} = g_{22} = h_{22} = g_{44}$  schließen, womit wir alle Gleichungen zu  $\theta$  verwendet haben. Aus (6) und (7) können wir, da  $g_{33}$  jetzt bekannt ist,  $e_{33} = \lambda$  und  $f_{33} = \lambda$  folgern. Desweiteren sind alle Einträge in (8) bestimmt, insbesondere gilt  $b_{12} = 0$  und  $b_{22} = \lambda$ , was zusammen mit (1) schließlich  $0 = a_{12}$  und  $\lambda = a_{22} = b_{33}$  ergibt.

Damit sind alle linearen Abbildungen von  $\mathcal{F}$  mit dem Ergebnis

$$A = C = D = H = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, B = E = F = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

bestimmt. Wir haben also  $\mathcal{F} = \lambda \cdot \text{Id}_M$  und damit  $\text{End}(M) \cong K$ . Nach Lemma 4.2 ist  $M$  unzerlegbar.

Man beachte, dass die Gleichung  $59 - (62 - 4) = 1$ , welche die Dimension des Lösungsraums als Differenz der Zahl der Unbestimmten und der verwendeten Gleichungen angibt, gerade der Tatsache entspricht, dass der Dimensionsvektor  $\underline{\dim}(M)$  eine Wurzel der quadratischen Form des Köchers mit Relationen ist.

**Korollar 4.5.** *Mit Hilfe der Liste der Koeffizientenköcher 5.2 lässt sich für jedes Element der Bielefeldliste für die duale Orientierung, welche durch Invertieren aller Pfeile entsteht, eine unzerlegbare Darstellung mit einem Koeffizientenköcher derselben Anzahl von Kreisen konstruieren.*

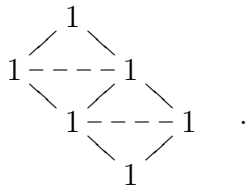
*Beweis.* Ist ein Köcher  $(Q, I)$  mit einer unzerlegbaren Darstellung  $M$  gegeben, so erhalten wir für den Köcher  $(Q', I')$ , der durch Umdrehen aller Pfeile in  $Q_1$  und entsprechendes Invertieren der erzeugenden Relationen entsteht, eine unzerlegbare Darstellung  $M'$ , indem wir die Darstellungsmatrizen der linearen Abbildungen  $M_\alpha, \alpha \in Q_1$  durch ihre Transponierten ersetzen. Dem entspricht im Koeffizientenköcher ebenfalls ein Invertieren aller Pfeile, sodass die Anzahl der Kreise unverändert bleibt.  $\square$



**Bemerkung 4.6.** Satz 4.3 besagt insbesondere, dass wir für Köcher der Bielefeldliste ohne Kommutativitätsrelationen für die gewählte Orientierung stets Koeffizientenköcher finden können, die Bäume sind. Allgemeiner gilt dies bereits nach [R2] für alle exzeptionellen Darstellungen  $M$  eines Köchers ohne Relationen, das heißt, falls  $\text{Ext}_{KQ}^1(M, M) = 0$  für  $M$  gilt.

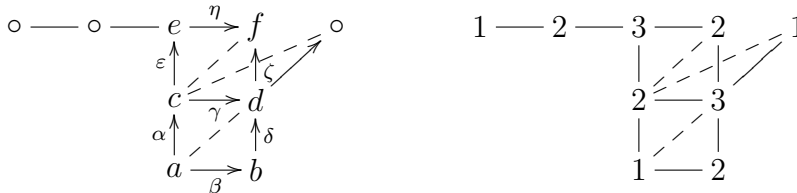
**Bemerkung 4.7.** Abgesehen von dem Koeffizientenköcher zu 33.1 erfüllen alle Köcher  $\Gamma$  aus Liste 5.2 zusätzlich die Gleichung  $c_2(\Gamma) = 0$ , besitzen also nur von erzeugenden Kommutativitätsrelationen induzierte Kreise. Insbesondere sind dann die Pfeilmengen zweier Kreise disjunkt. Falls es keine nicht induzierten Kreise gibt, ist dies äquivalent zu der Gleichung.

Für die Köcher der Rogat-Tesche-Liste kann man Koeffizientenköcher dieser Art im Allgemeinen nicht erwarten. Wir betrachten beispielsweise Köcher (2,2,1) 12 :



Hier hat der eindeutig bestimmte Koeffizientenköcher  $\Gamma$  der unzerlegbaren Darstellung mit diesem Dimensionsvektor dieselbe Gestalt wie der Köcher. Er erfüllt die beiden Gleichungen aus Satz 4.3, aber es gilt wegen der Existenz des Kreises aus sechs Kanten offenbar  $c_2(\Gamma) = 1$ . Viele Köcher der Ausnahmegalgebren enthalten diesen oder ähnliche Köcher als Teilköcher.

Wir zeigen abschließend, dass der Köcher 33.1 in der Tat eine besondere Rolle in der Bielefeldliste spielt, da bei beliebiger Orientierung kein zum Dimensionsvektor gehöriger Koeffizientenköcher  $\Gamma$  mit  $c_0(\Gamma) = 0 = c_2(\Gamma)$  existieren kann. Dazu benennen wir zunächst die für unsere Betrachtung relevanten Ecken und Pfeile, wählen eine Orientierung für den Relationskomplex des Köchers und geben den Dimensionvektor aus der Bielefeldliste an.

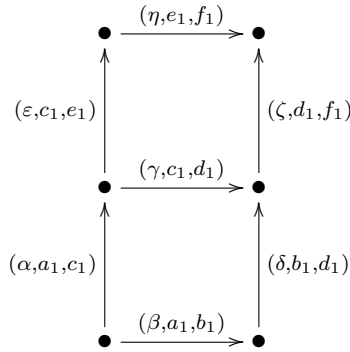


Sei  $M$  eine unzerlegbare Darstellung mit diesem Dimensionsvektor und durch  $\mathcal{B}_i = \{i_1, \dots, i_{m_i}\}, i \in Q_0$  eine Basis von  $M$  gegeben. Nach Lemma 2.3 ist

#### 4 KREISMINIMALE KOEFFIZIENTENKÖCHER

---

$M_\alpha$  ein Monomorphismus, daher gilt  $M_\alpha(a_1) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \neq 0$  für gewisse  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ . Sei o.B.d.A.  $\lambda_1 \neq 0$ , dann gibt es im Koeffizientenköcher  $\Gamma(M, \mathcal{B})$  einen Pfeil  $(\alpha, a_1, c_1)$ . Die Kommutativitätsrelation  $\varepsilon\eta - \gamma\zeta$  liefert gemäß Lemma 2.5 die Existenz zweier durch sie induzierter Kreise. Im Beweis dieses Lemmas wurde gezeigt, dass jeder Basisvektor des Startraumes, der nicht im Kern der Auswertung der Pfade der Relation liegt, Ecke eines induzierten Kreises ist. Da  $M_\eta M_\varepsilon$  nach Lemma 2.3 ein Isomorphismus ist, gilt dies hier für beide Basisvektoren  $c_1$  und  $c_2$ . Nach geeigneter Ummumerierung der Basisvektoren gibt es also einen Kreis  $(\varepsilon, c_1, e_1)(\eta, e_1, f_1)(\zeta, d_1, f_1)^{-1}(\gamma, c_1, d_1)^{-1}$  im Koeffizientenköcher und damit insbesondere den Pfad  $(\alpha, a_1, c_1)(\gamma, c_1, d_1)$ . Existiert zusätzlich der Pfad  $(\alpha, a_1, c_2)(\gamma, c_2, d_1)$ , so gibt es den nicht induzierten Kreis  $(\alpha, a_1, c_1)(\gamma, c_1, d_1)(\gamma, c_2, d_1)^{-1}(\alpha, c_2, a_1)^{-1}$ , und es folgt  $c_0(\Gamma) \geq 1$ . Existiert dieser Pfad hingegen nicht, so besitzt  $d_1$  in der Darstellung von  $M_\gamma M_\alpha(a_1)$  als Linearkombination der Vektoren aus  $\mathcal{B}_d$  einen nichttrivialen Koeffizienten. Die Kommutativitätsrelation  $\alpha\gamma - \beta\delta$  impliziert  $M_\gamma M_\alpha(a_1) = M_\delta M_\beta(a_1)$ , und mit Lemma 2.2 folgt die Existenz eines Pfades  $(\beta, a_1, b)(\delta, b, d_1)$  für ein  $b \in \mathcal{B}_d$ . Wir nehmen wieder o.B.d.A.  $b = b_1$  an und erhalten



als Teilköcher des Koeffizientenköchers  $\Gamma$ . Es gibt also den von  $\alpha\varepsilon\eta\zeta^{-1}\delta^{-1}\beta^{-1}$  induzierten Kreis

$$(\alpha, a_1, c_1)(\varepsilon, c_1, e_1)(\eta, e_1, f_1)(\zeta, d_1, f_1)^{-1}(\delta, b_1, d_1)^{-1}(\beta, a_1, b_1)^{-1}.$$

Da  $\alpha\varepsilon\eta\zeta^{-1}\delta^{-1}\beta^{-1}$  zu keiner erzeugenden Relation gehört, folgt  $c_2(\Gamma) \geq 1$ .

Man beachte, dass diese Überlegungen wegen Korollar 4.5 hinreichend sind, um für alle Orientierungen die Existenz eines Koeffizientenköchers  $\Gamma$  mit  $c_0(\Gamma) = 0 = c_2(\Gamma)$  auszuschließen, da für die Argumentation lediglich die Orientierung des Relationskomplexes bedeutsam ist.

# 5 Anhang

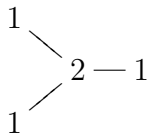
## 5.1 Die Bielefeldliste

Zur Konstruktion der Bielefeldliste siehe Abschnitt 3.

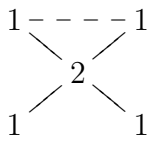
10

1

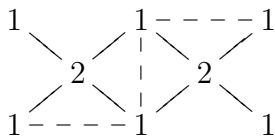
20



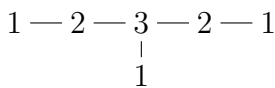
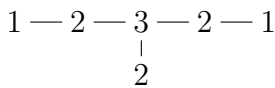
20.1



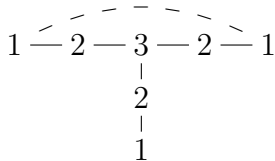
21



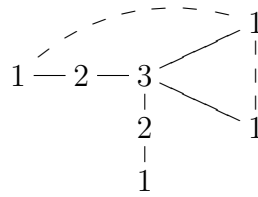
30



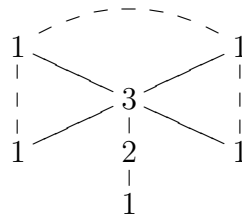
30.1



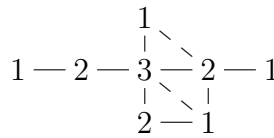
30.2



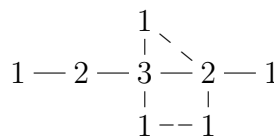
30.3



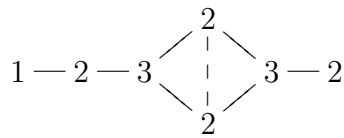
31.1



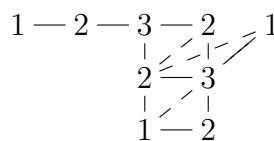
31.2



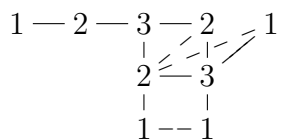
32



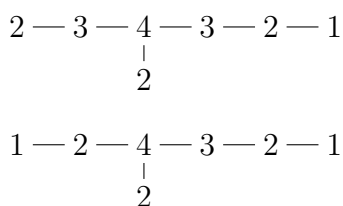
33.1



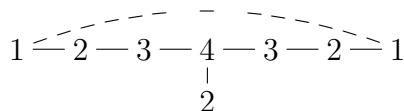
33.2



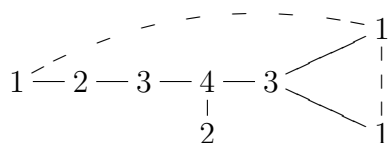
40



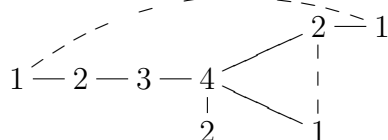
40.1



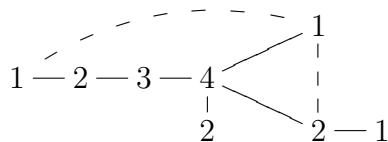
40.2



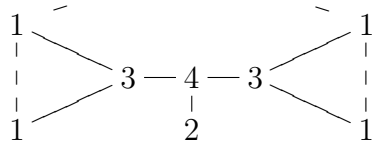
40.3



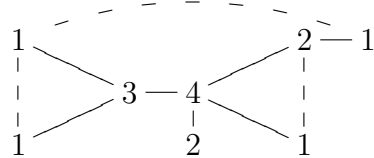
40.4



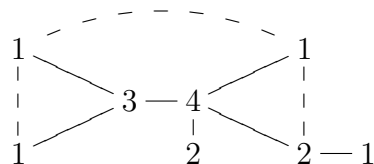
40.5



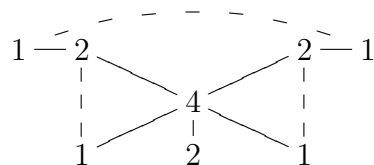
40.6



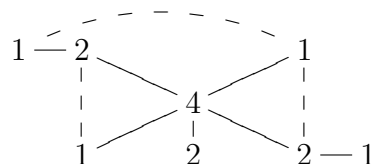
40.7



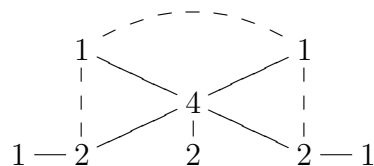
40.8



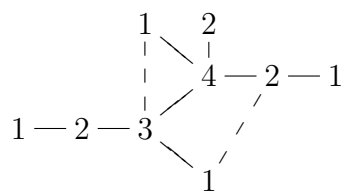
40.9



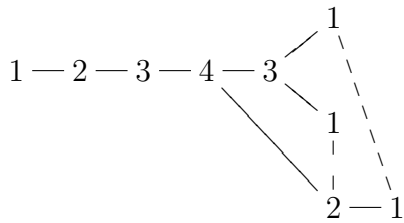
40.10



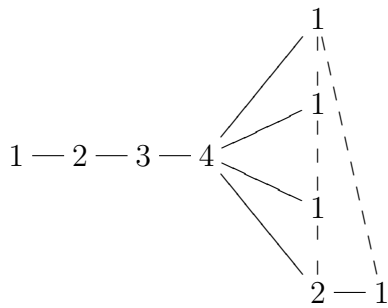
41



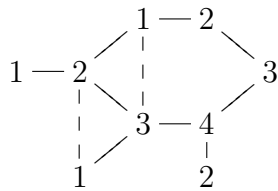
42.1



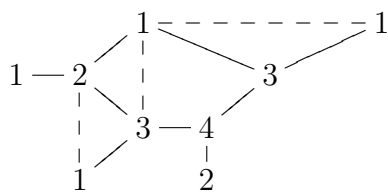
42.2



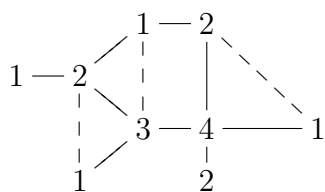
43



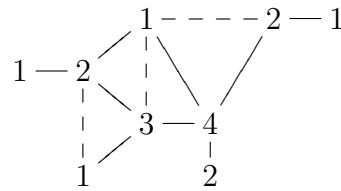
43.1



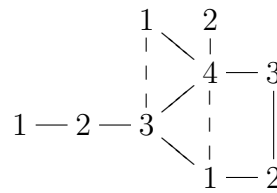
43.2



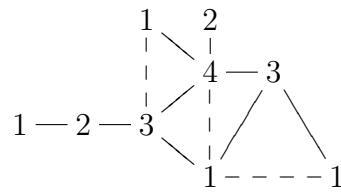
43.3



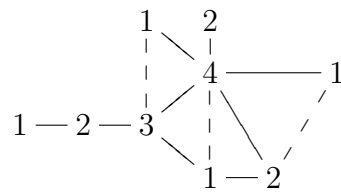
44



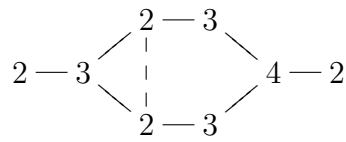
44.1



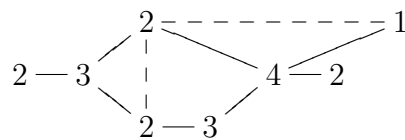
44.2



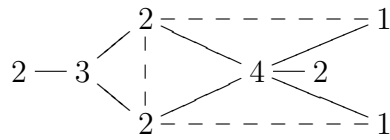
45



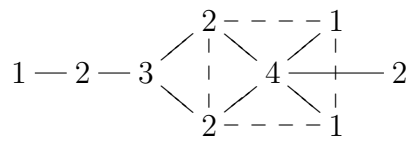
45.1



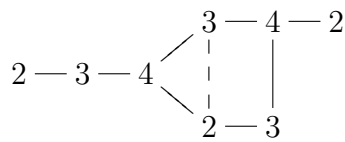
45.2



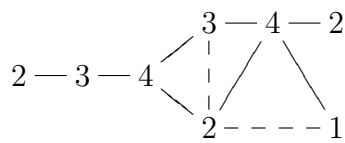
46



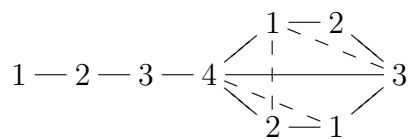
47



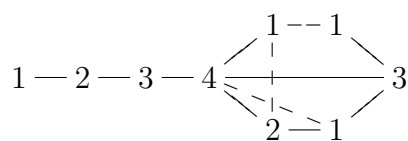
47.1



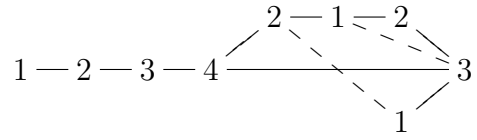
48.1



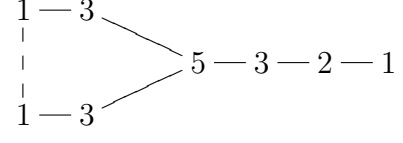
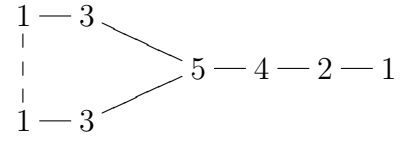
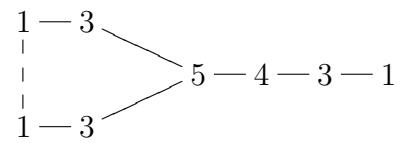
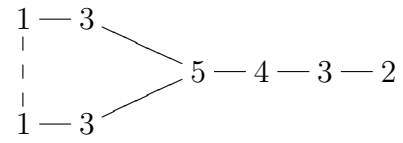
48.2



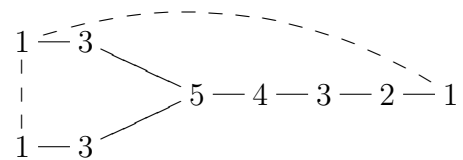
48.3



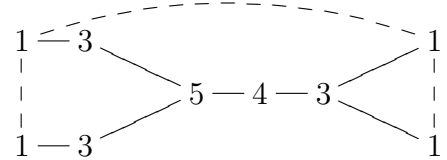
50



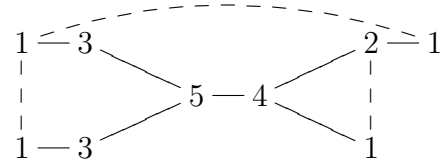
50.1



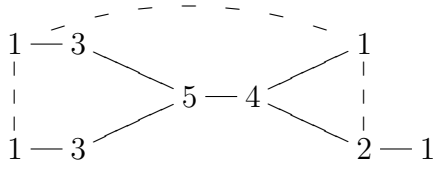
50.2



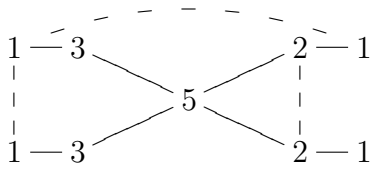
50.3



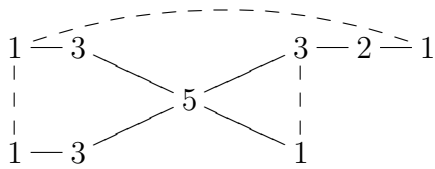
50.4



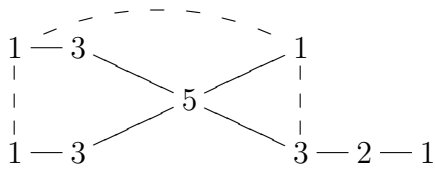
50.5



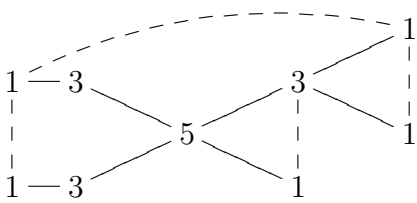
50.6



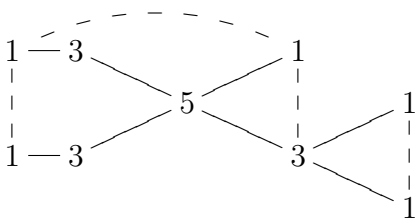
50.7



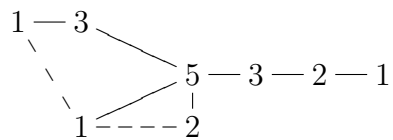
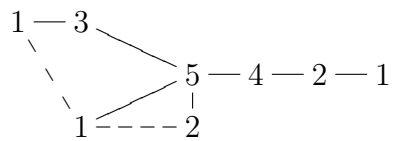
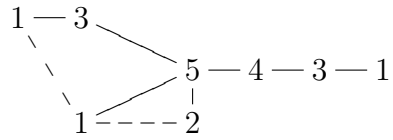
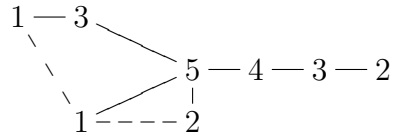
50.8



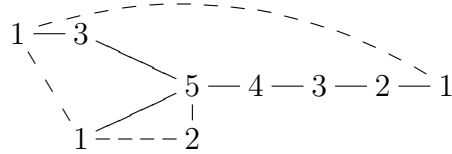
50.9



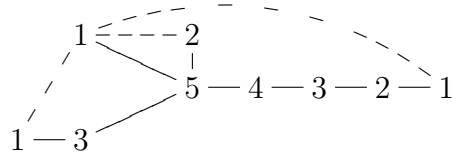
51



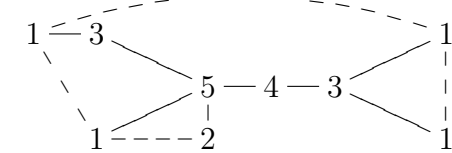
51.1.1



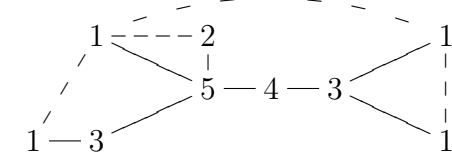
51.1.2



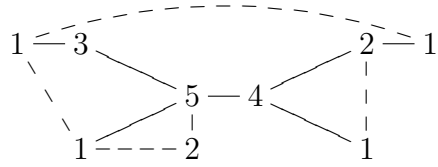
51.2.1



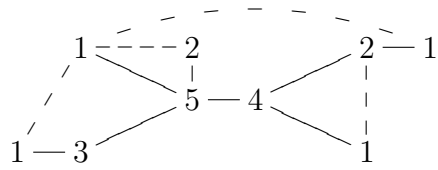
51.2.2



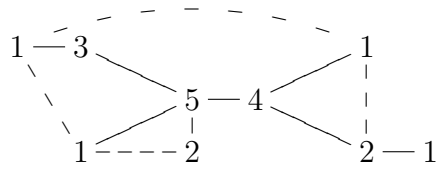
51.3.1



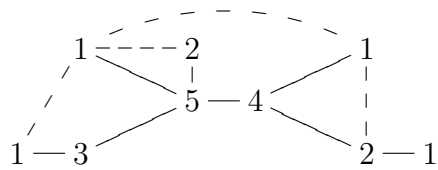
51.3.2



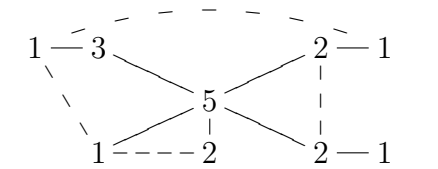
51.4.1



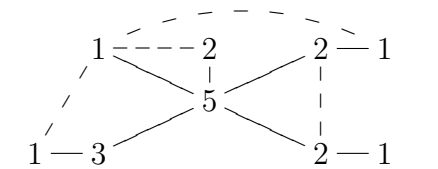
51.4.2



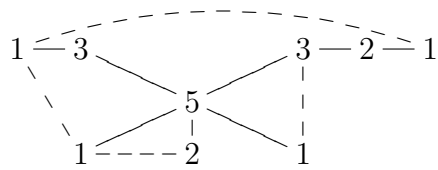
51.5.1



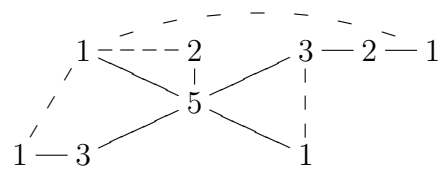
51.5.2



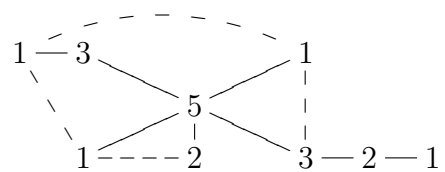
51.6.1



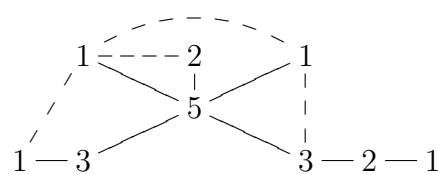
51.6.2



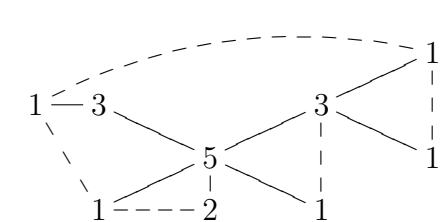
51.7.1



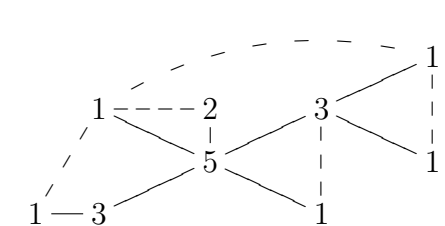
51.7.2



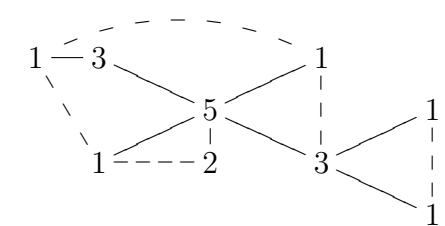
51.8.1



51.8.2

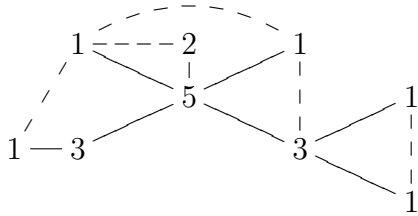


51.9.1

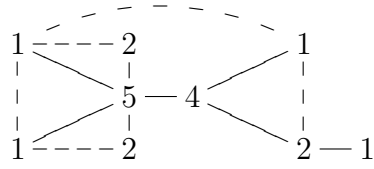




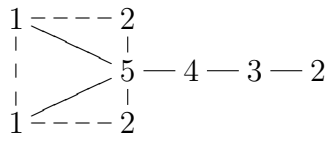
51.9.2



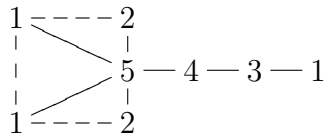
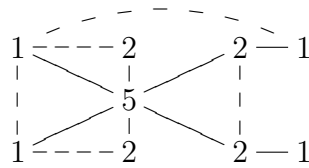
52.4



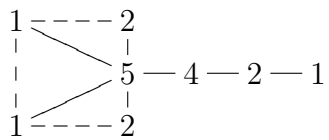
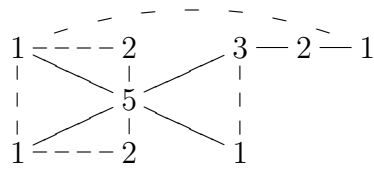
52



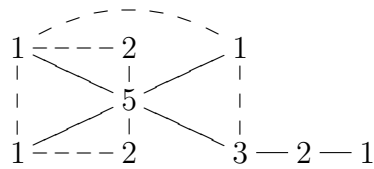
52.5



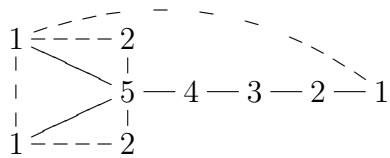
52.6



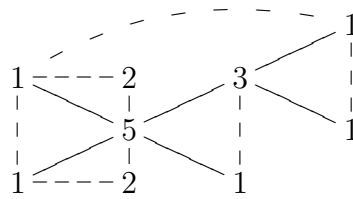
52.7



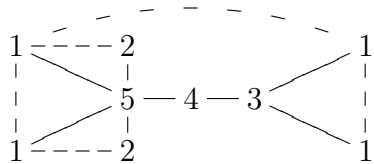
52.1



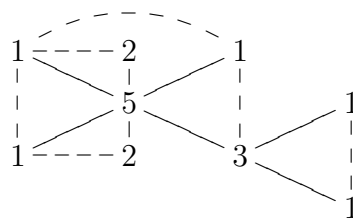
52.8



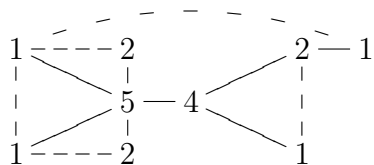
52.2



52.9

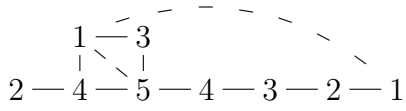


52.3

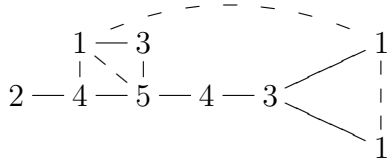




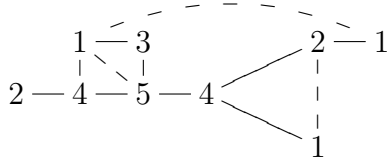
54.1



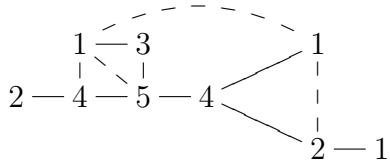
54.2



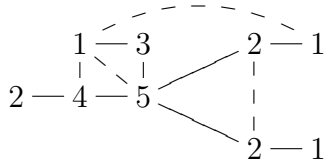
54.3



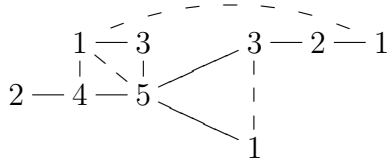
54.4



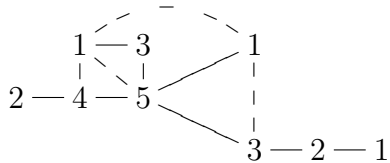
54.5



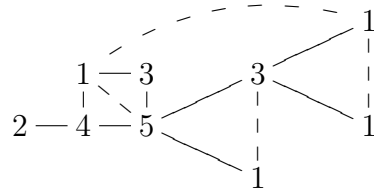
54.6



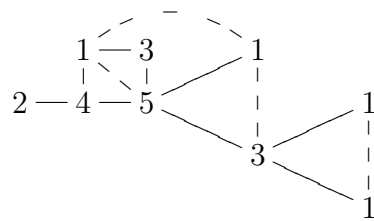
54.7



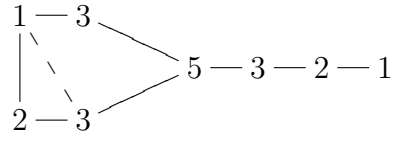
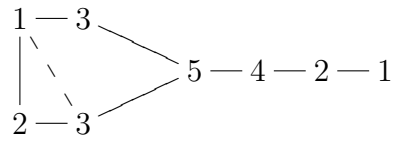
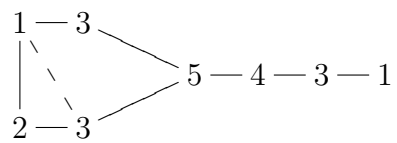
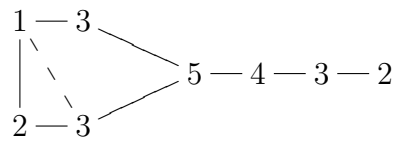
54.8



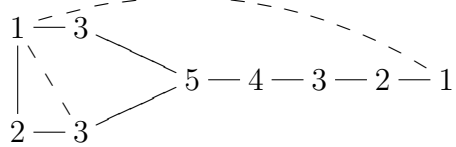
54.9



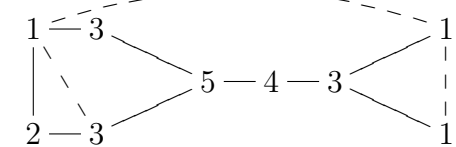
55



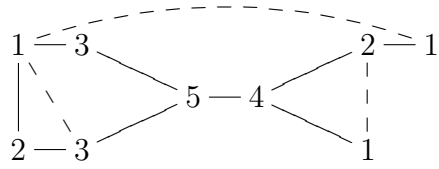
55.1



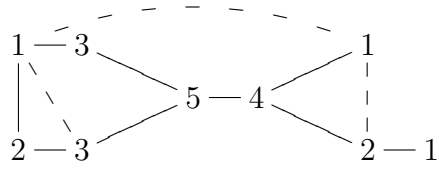
55.2



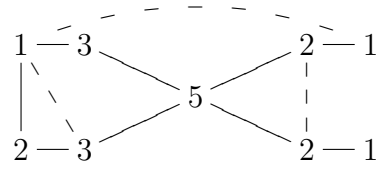
55.3



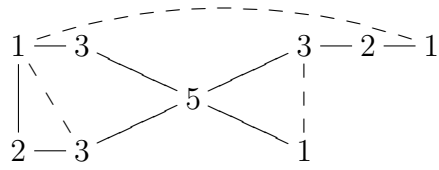
55.4



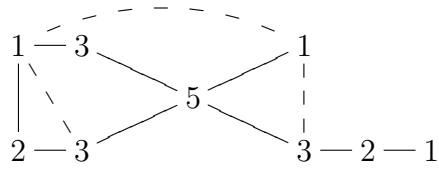
55.5



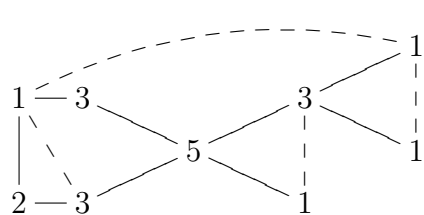
55.6



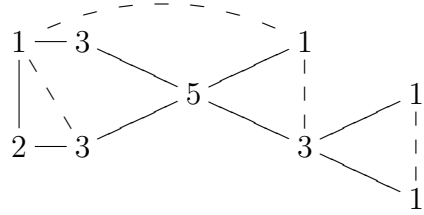
55.7



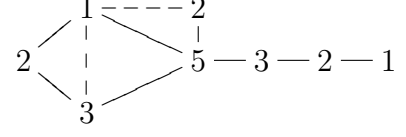
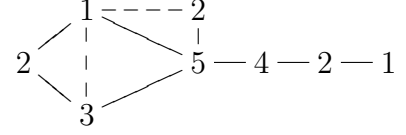
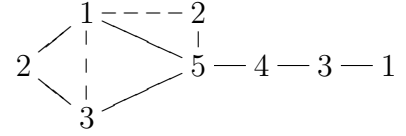
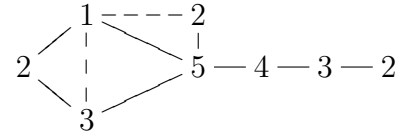
55.8



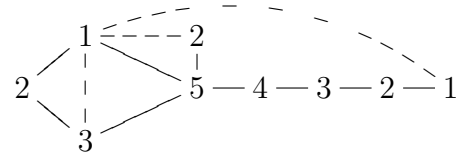
55.9



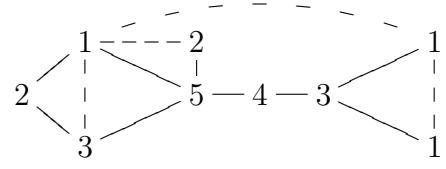
56



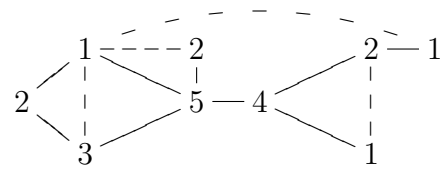
56.1



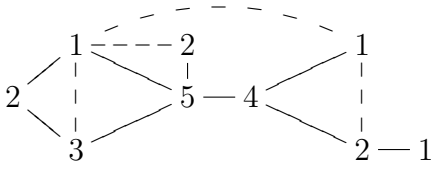
56.2



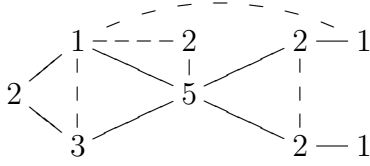
56.3



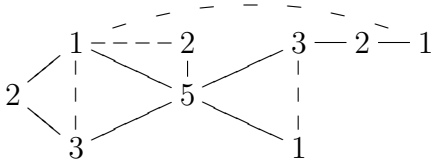
56.4



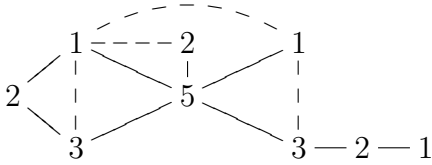
56.5



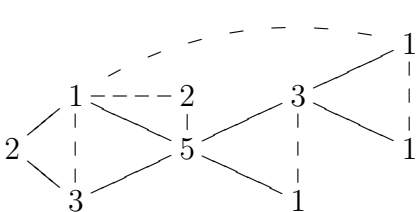
56.6



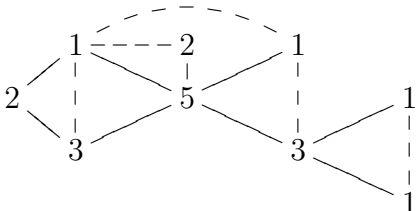
56.7



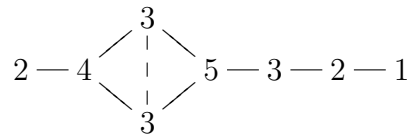
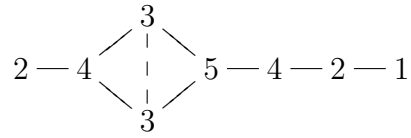
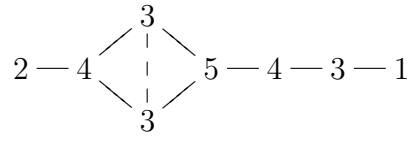
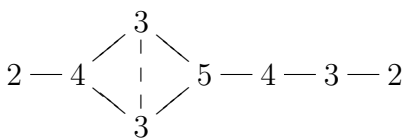
56.8



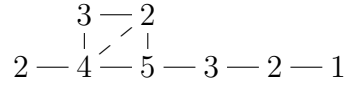
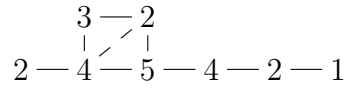
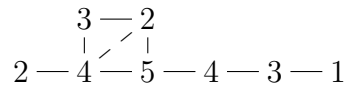
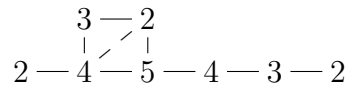
56.9



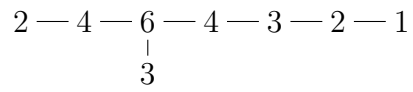
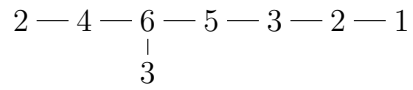
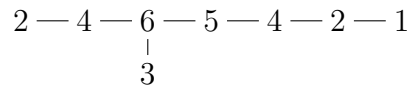
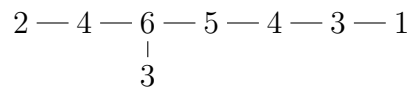
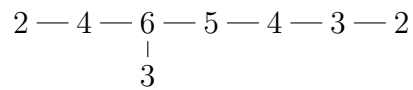
57



58



60



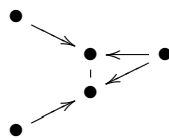
## 5.2 Koeffizientenköcher zur Bielefeldliste

Die folgende Liste enthält für jeden Köcher mit Relationen und Dimensionsvektor der Bielefeldliste einen Koeffizientenköcher. Die Punkte stehen hierbei für die Basisvektoren der Vektorräume, Basisvektoren desselben Vektorraums sind durch senkrechte Striche miteinander verbunden. Die Pfeile bestimmen die linearen Abbildungen der Darstellung. Zur genauen Konstruktion dieser Darstellung siehe Abschnitt 4.

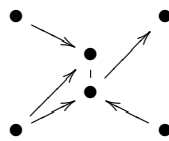
10



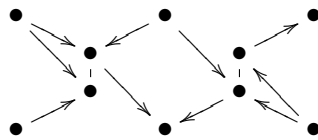
20



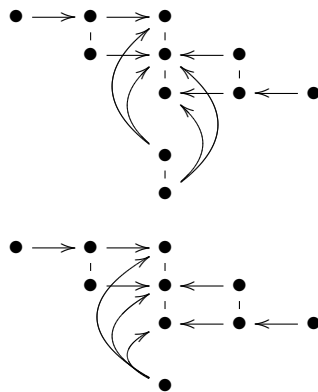
20.1



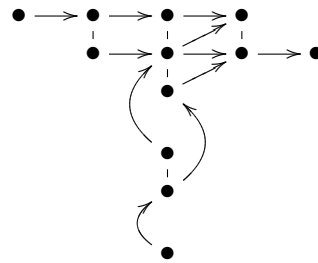
21



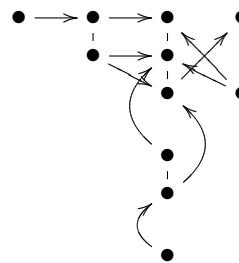
30



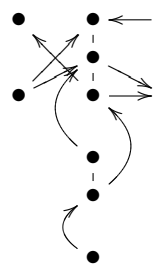
30.1



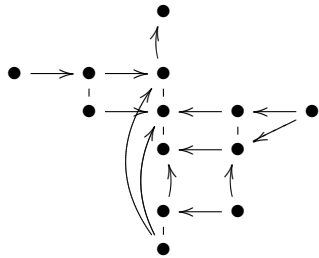
30.2



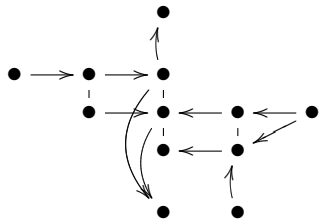
30.3



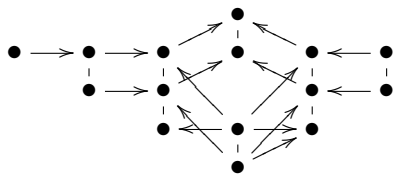
31.1



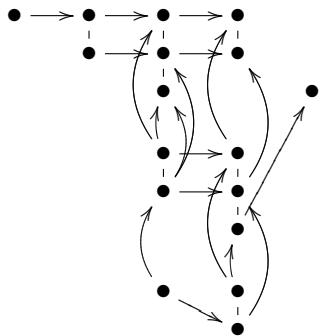
31.2



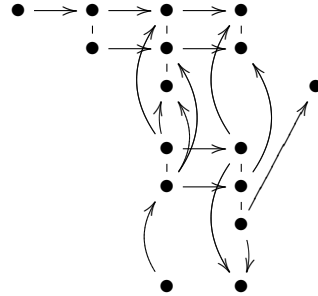
32



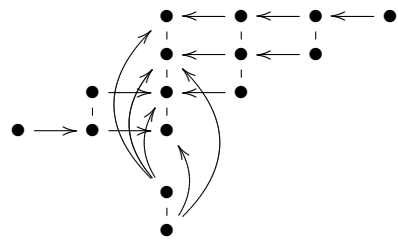
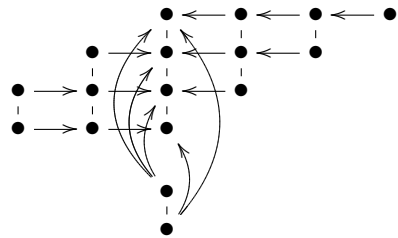
33.1



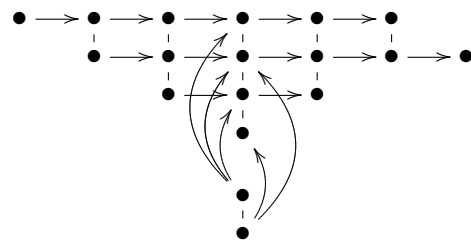
33.2



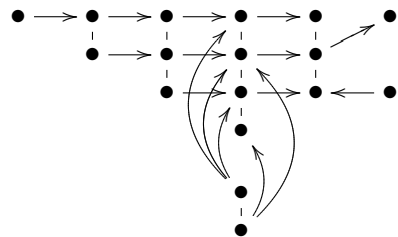
40



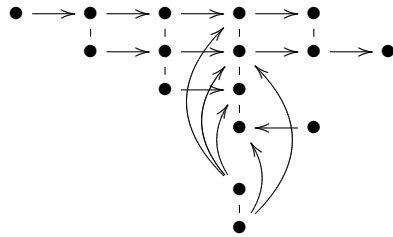
40.1



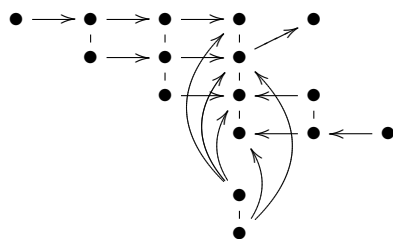
40.2



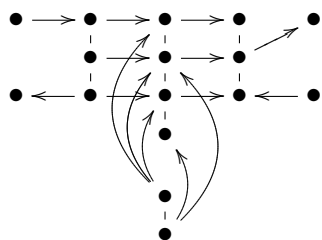
40.3



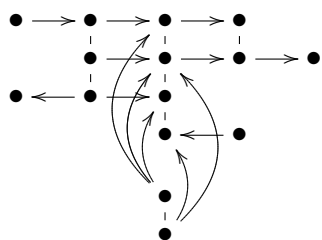
40.4



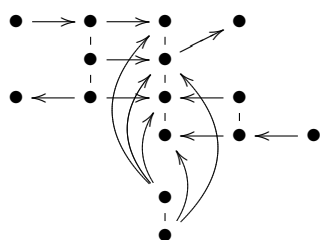
40.5



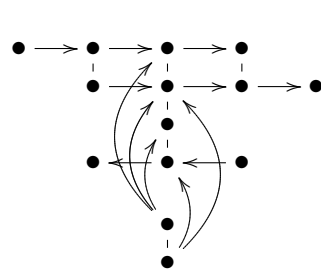
40.6



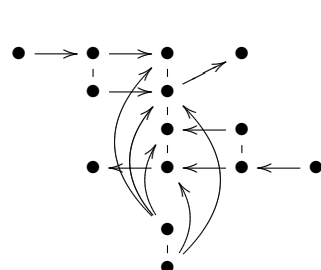
40.7



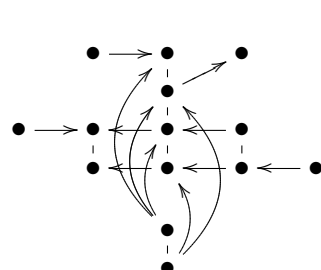
40.8



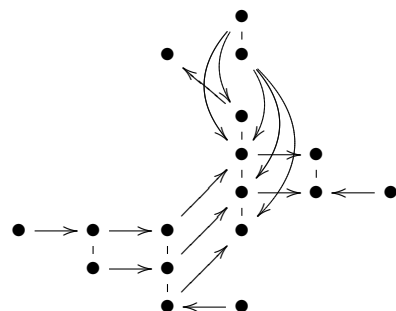
40.9



40.10

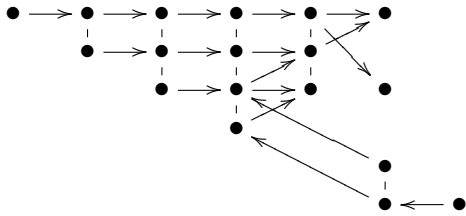


41

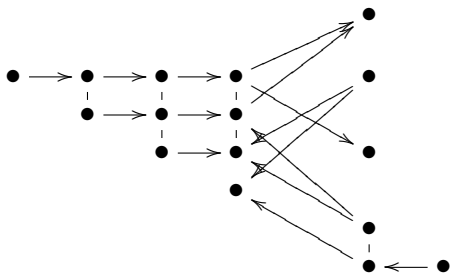




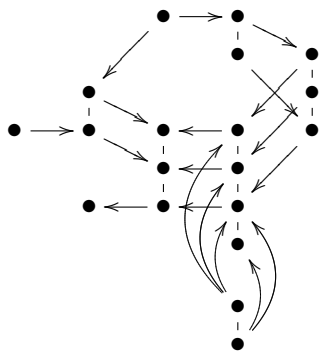
42.1



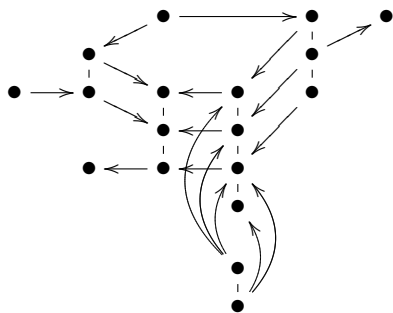
42.2



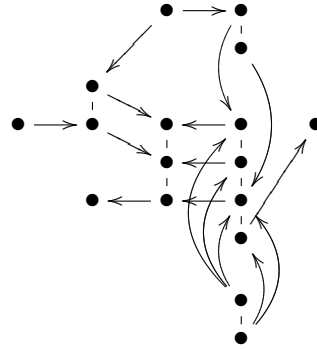
43



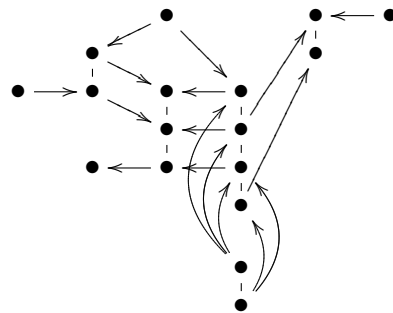
43.1



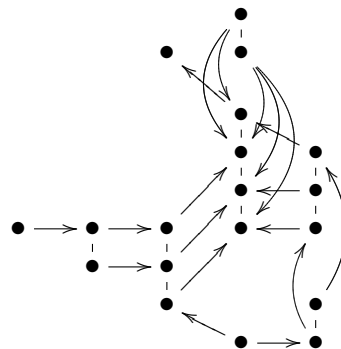
43.2



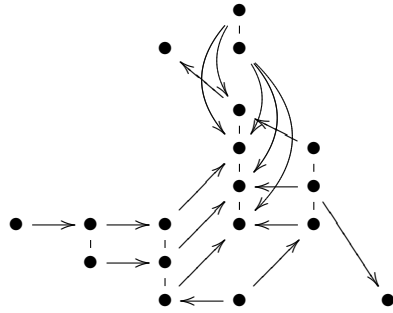
43.3



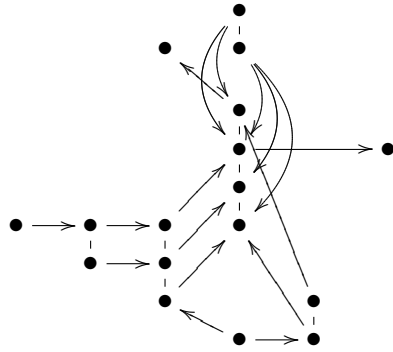
44



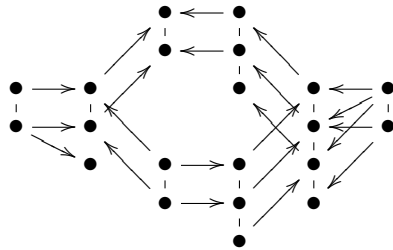
44.1



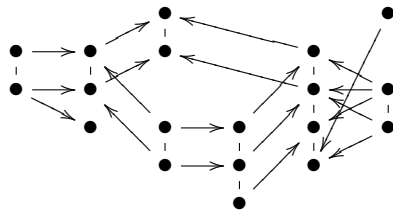
44.2



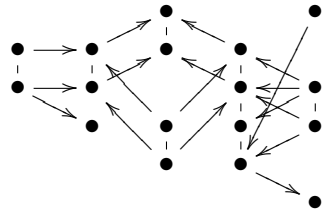
45



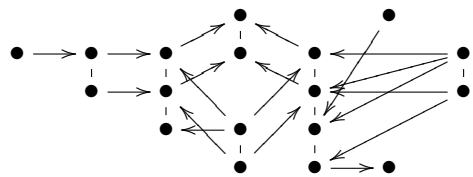
45.1



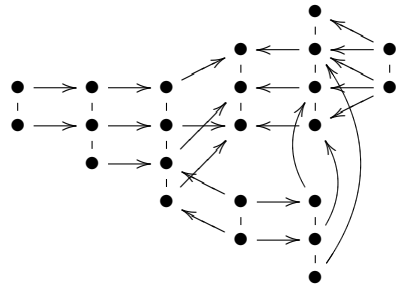
45.2



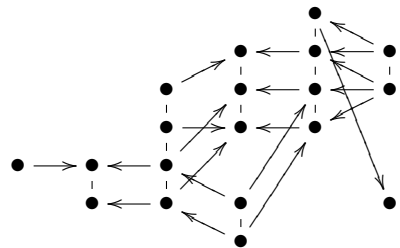
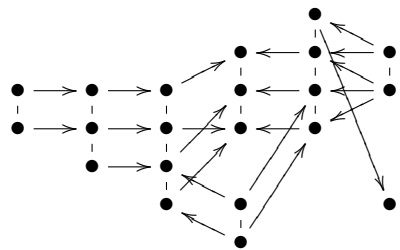
46



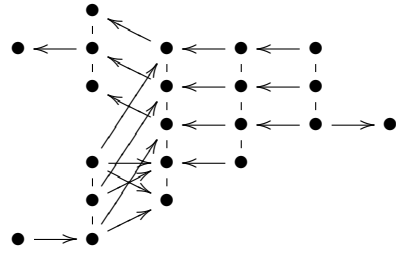
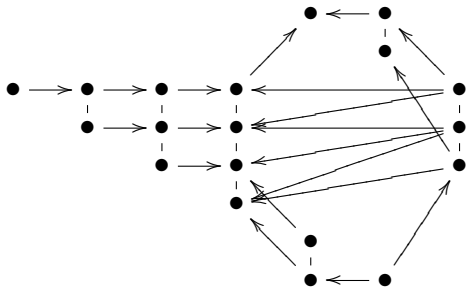
47



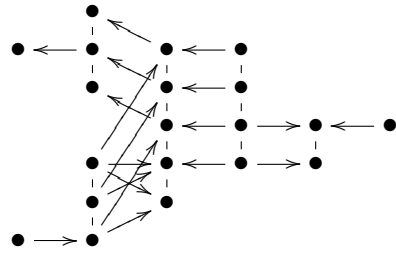
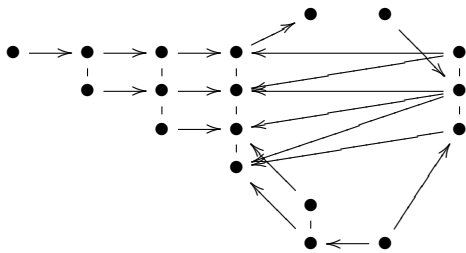
47.1



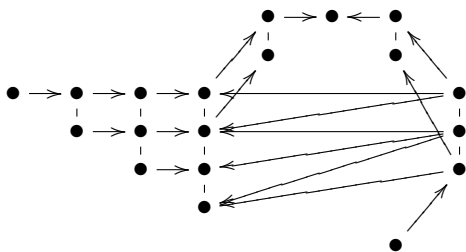
48.1



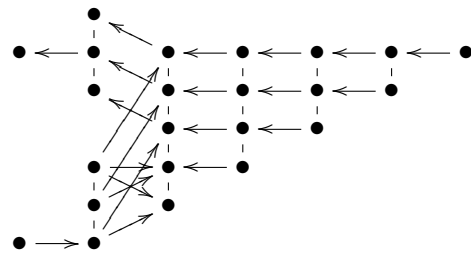
48.2



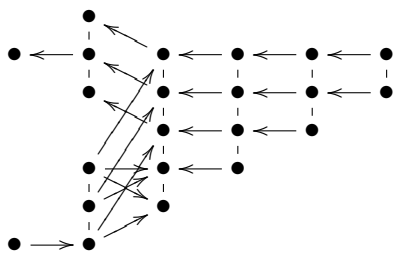
48.3



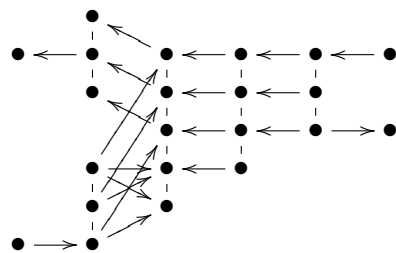
50.1



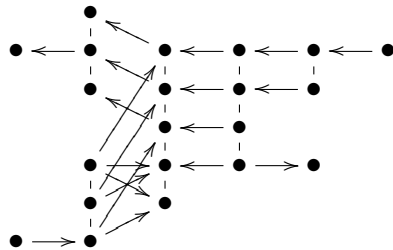
50



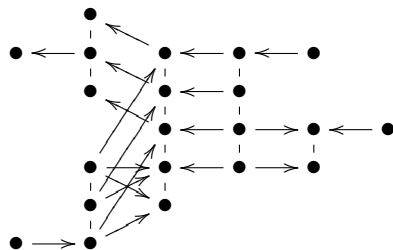
50.2



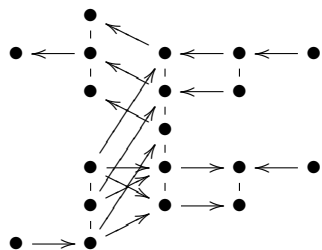
50.3



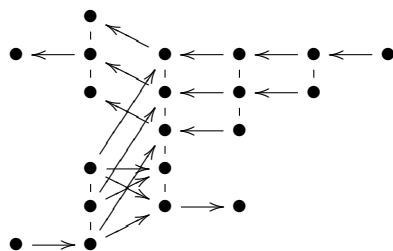
50.4



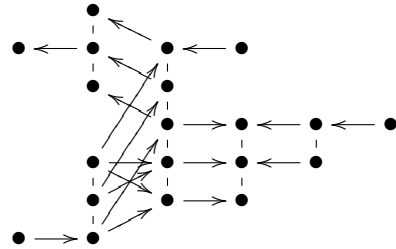
50.5



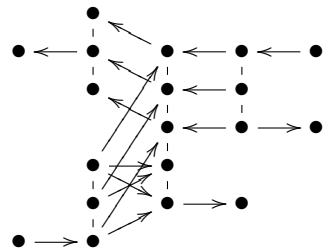
50.6



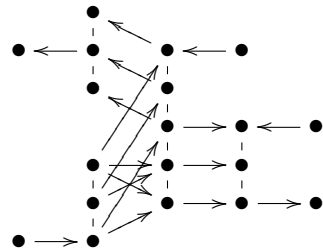
50.7



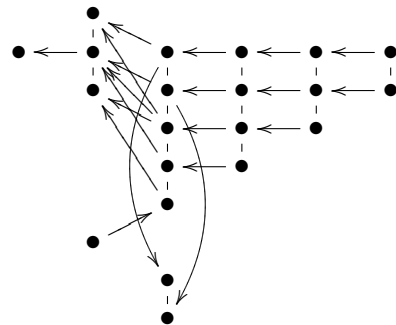
50.8

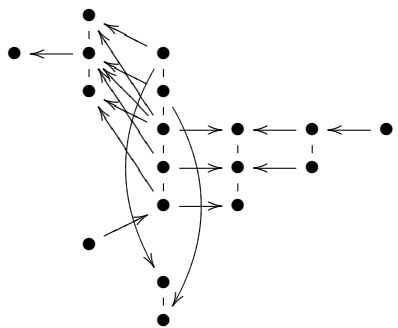
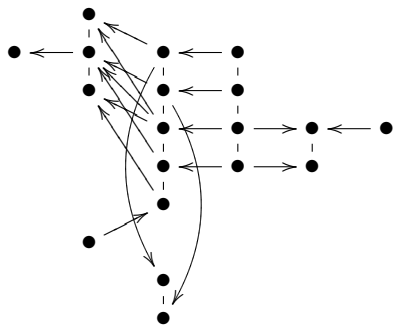
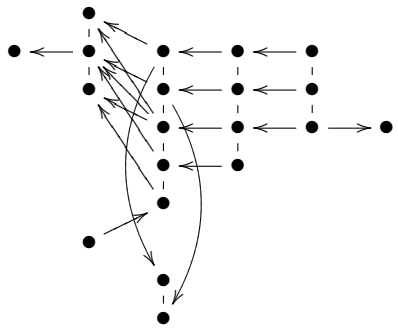


50.9

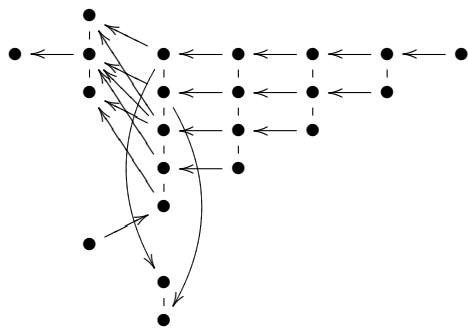


51

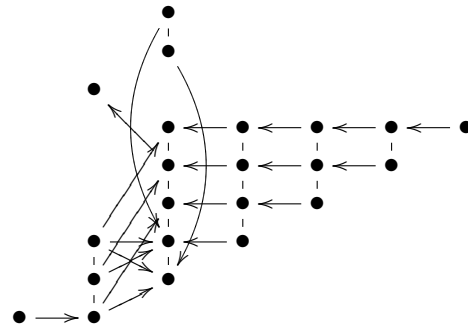




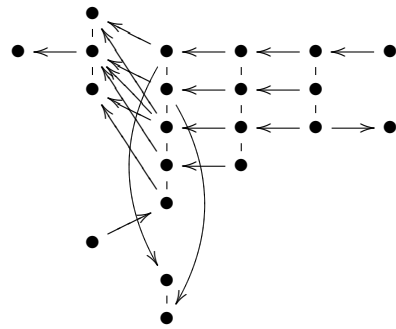
51.1.1



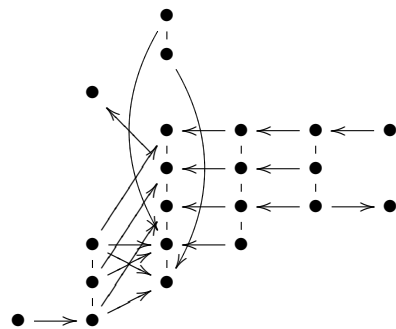
51.1.2



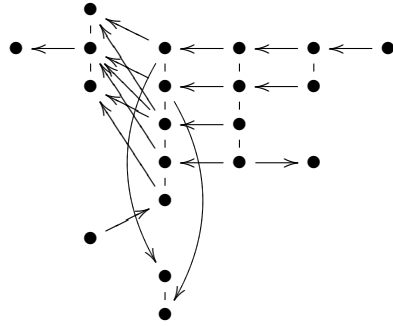
51.2.1



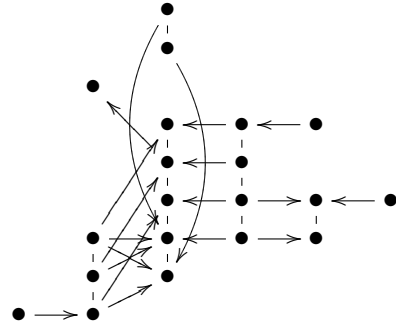
51.2.2



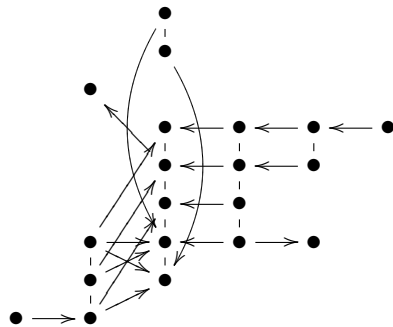
51.3.1



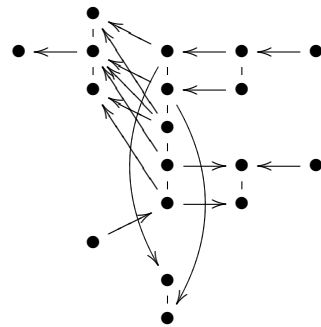
51.4.2



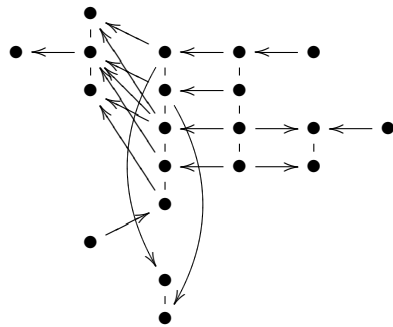
51.3.2



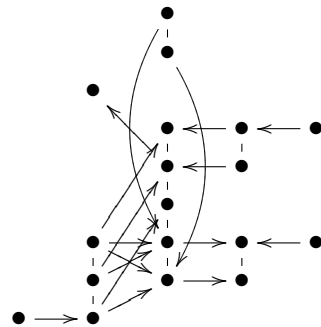
51.5.1



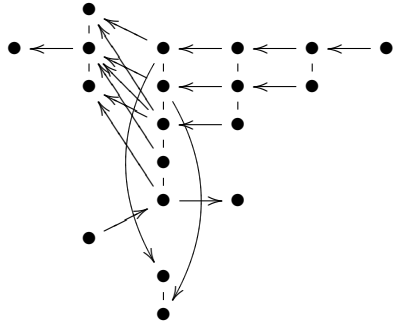
51.4.1



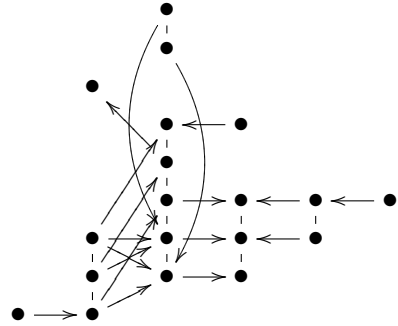
51.5.2



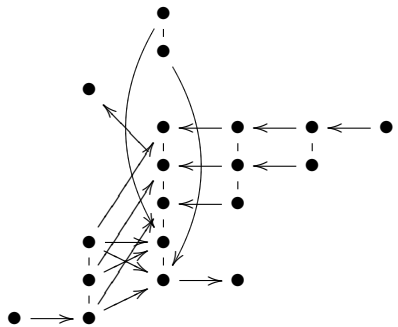
51.6.1



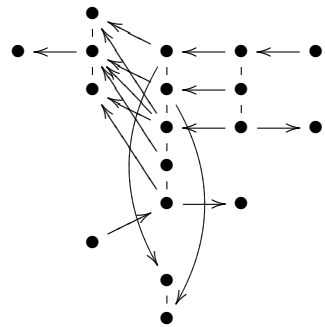
51.7.2



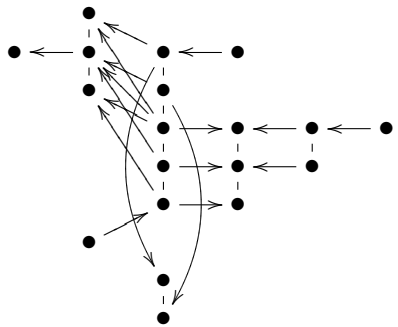
51.6.2



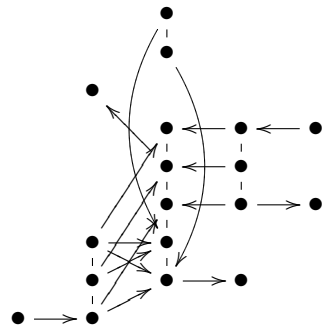
51.8.1



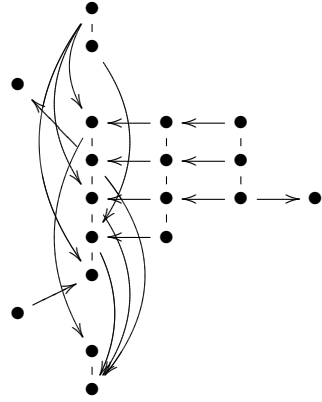
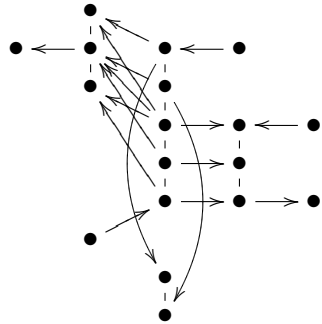
51.7.1



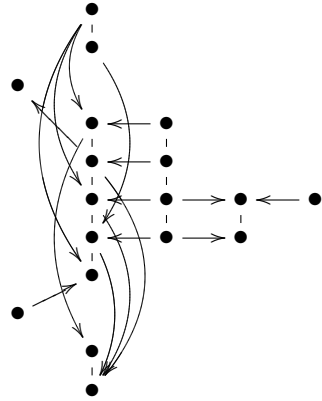
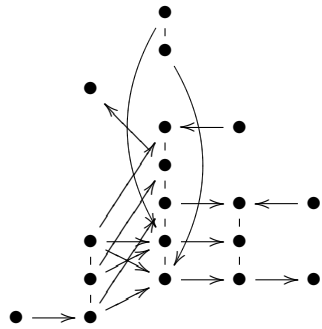
51.8.2



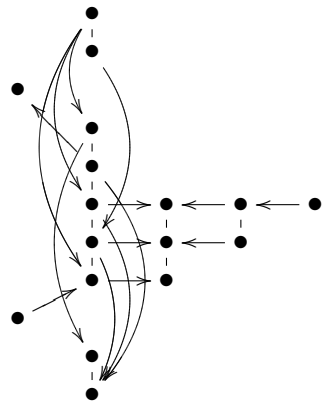
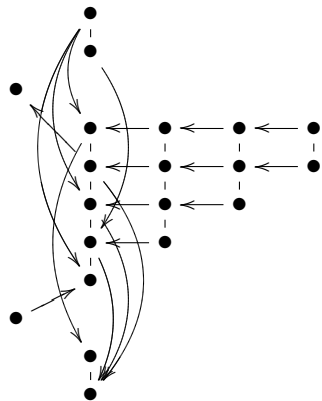
51.9.1



51.9.2

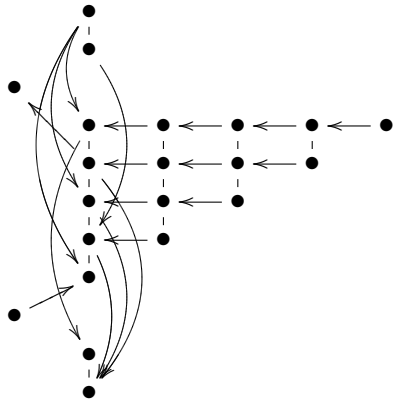


52

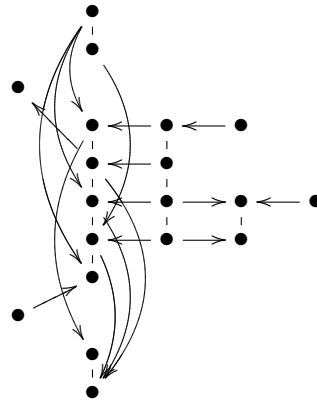




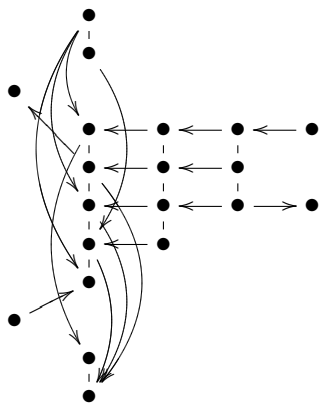
52.1



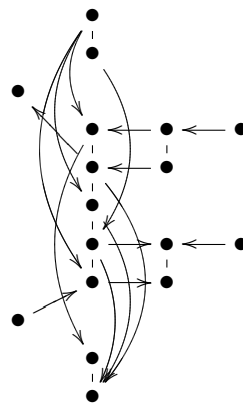
52.4



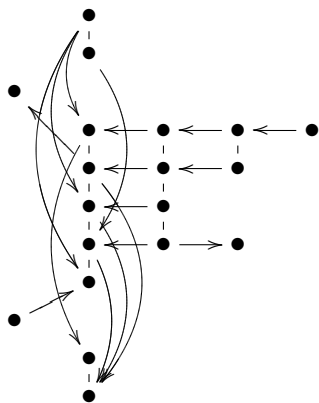
52.2



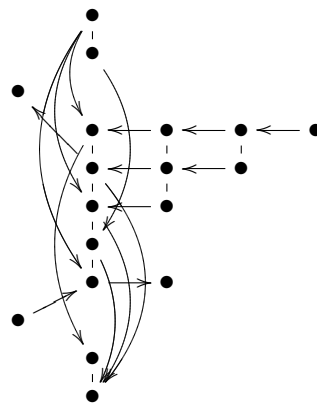
52.5



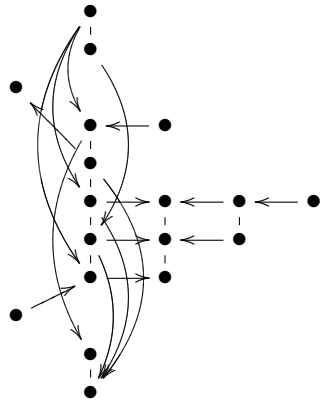
52.3



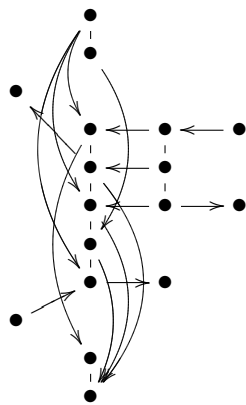
52.6



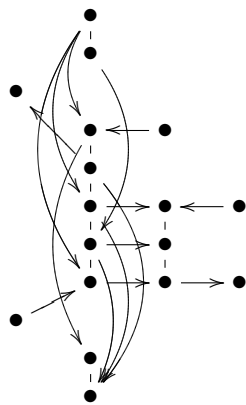
52.7



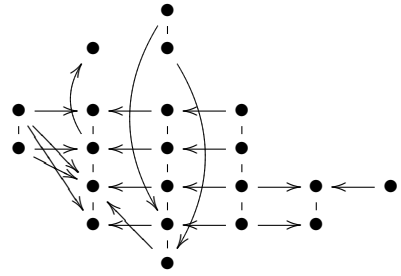
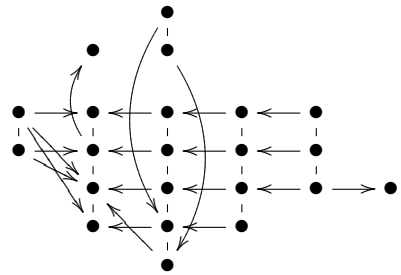
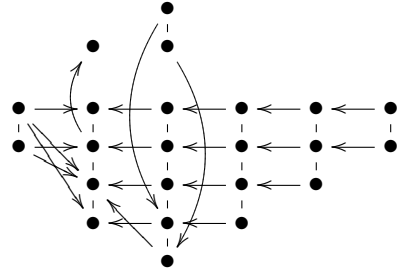
52.8



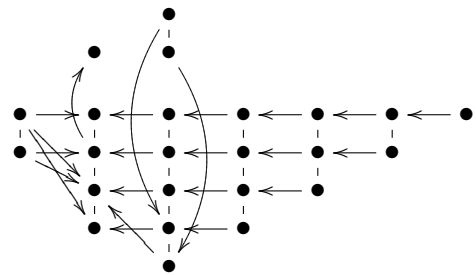
52.9



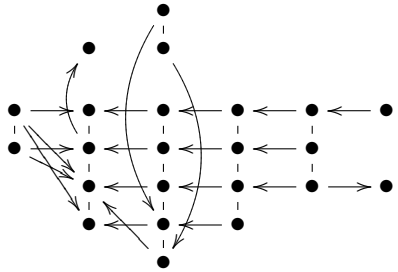
53



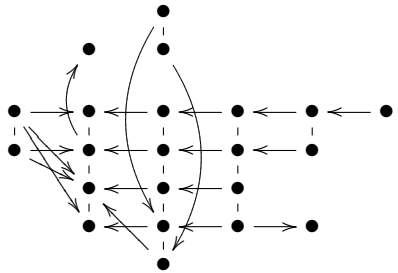
53.1



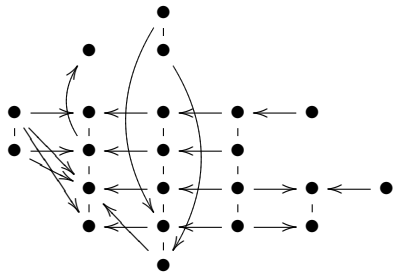
53.2



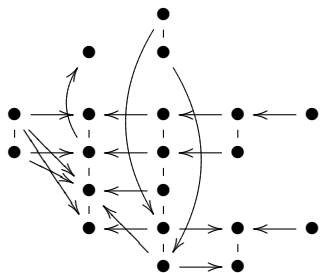
53.3



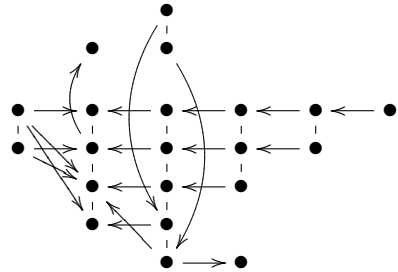
53.4



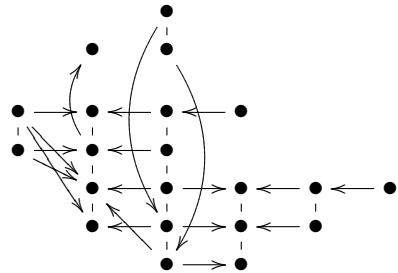
53.5



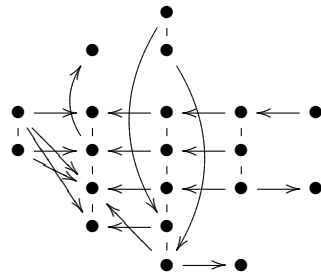
53.6



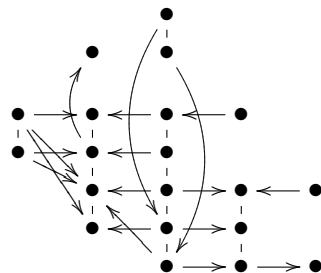
53.7



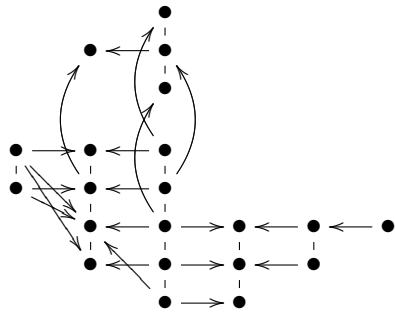
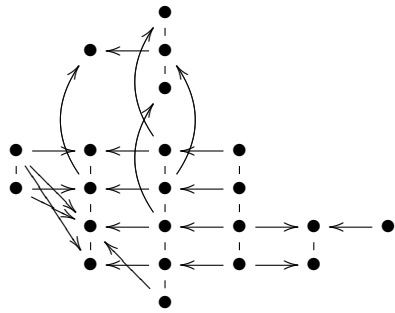
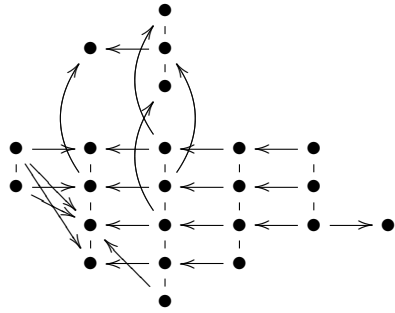
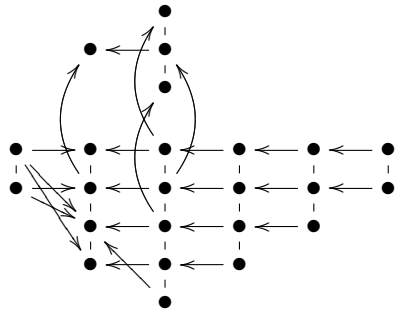
53.8



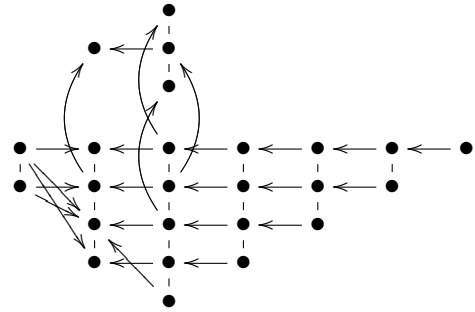
53.9



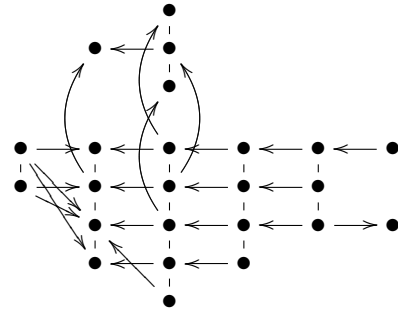
54



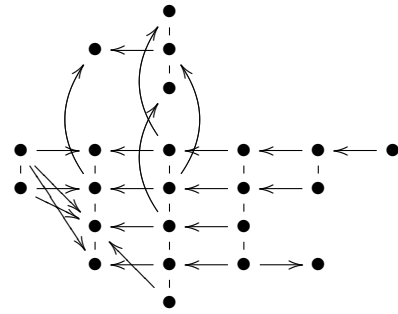
54.1



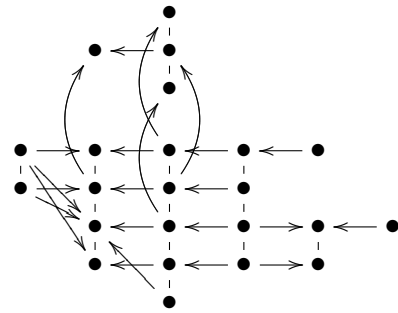
54.2



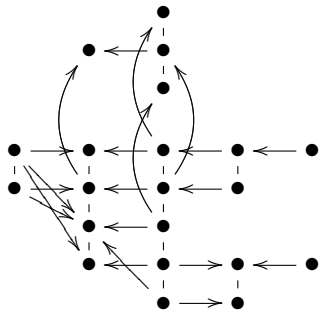
54.3



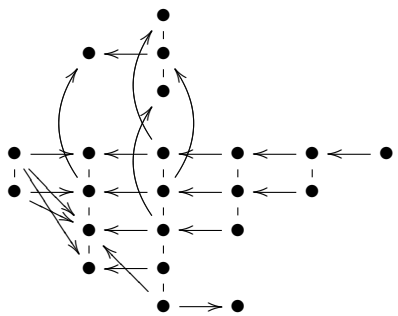
54.4



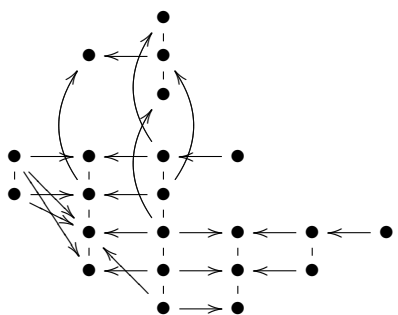
54.5



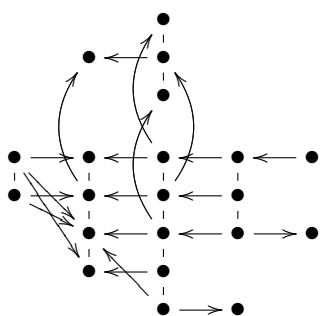
54.6



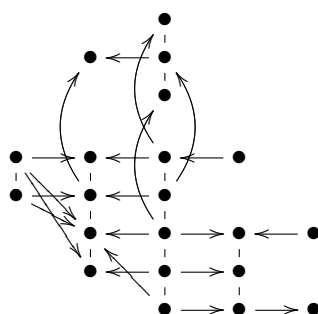
54.7



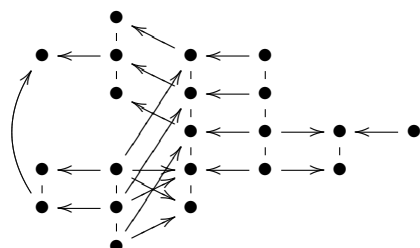
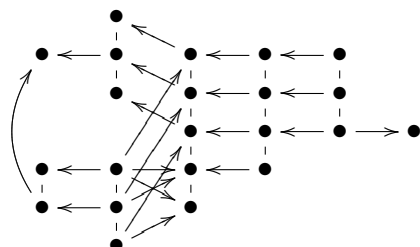
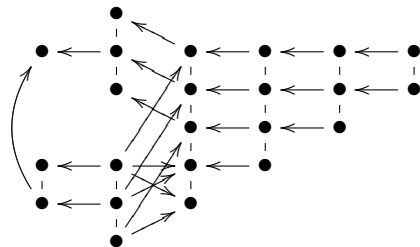
54.8



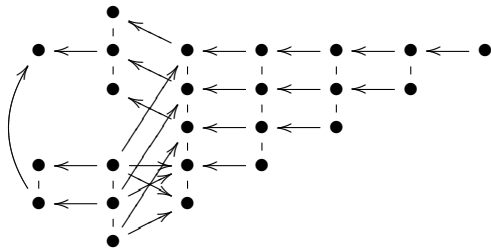
54.9



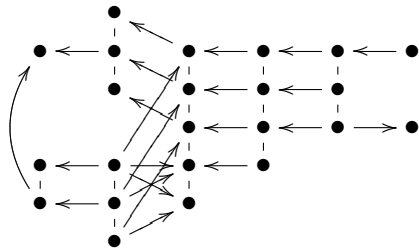
55



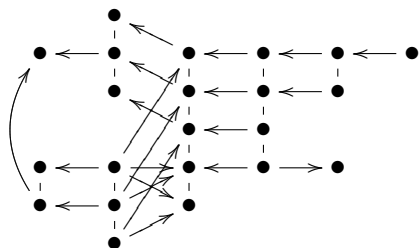
55.1



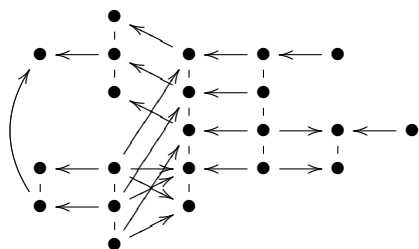
55.2



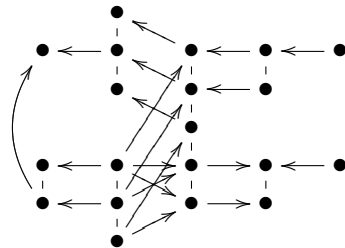
55.3



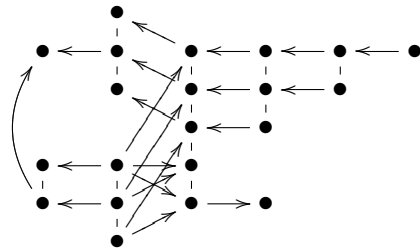
55.4



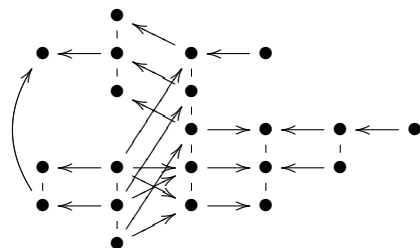
55.5



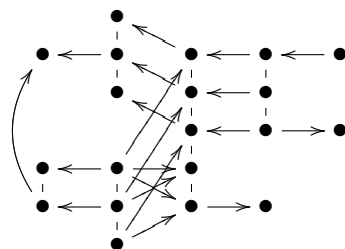
55.6



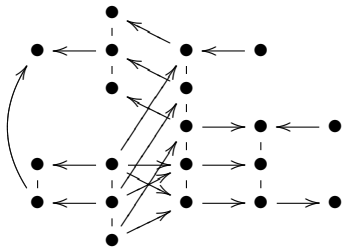
55.7



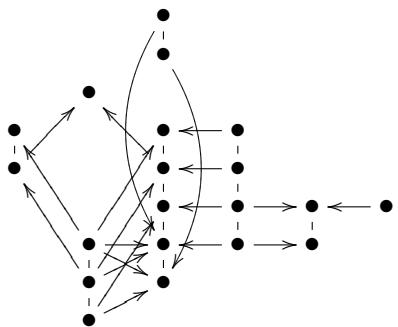
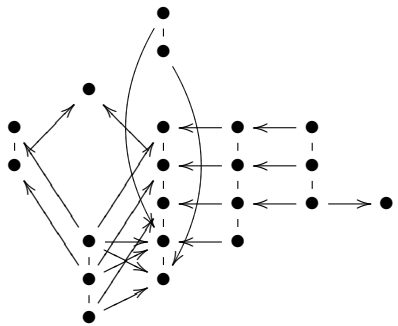
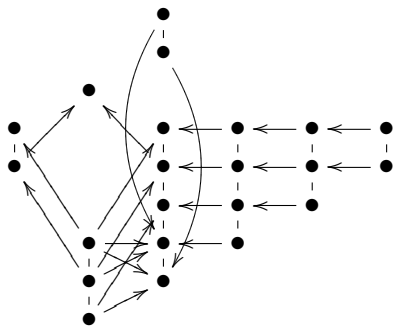
55.8



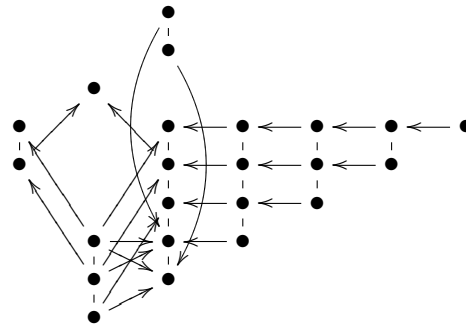
55.9



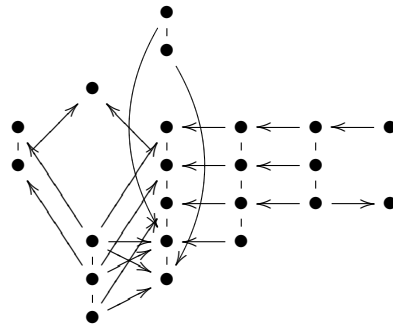
56



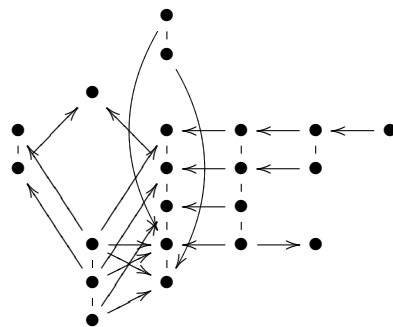
56.1



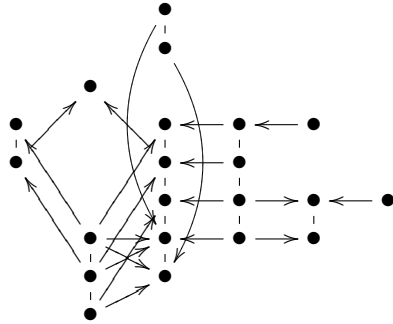
56.2



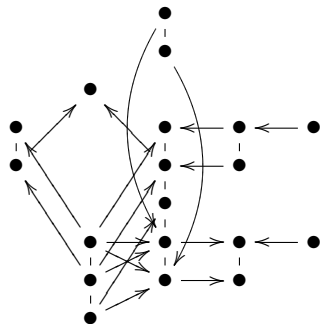
56.3



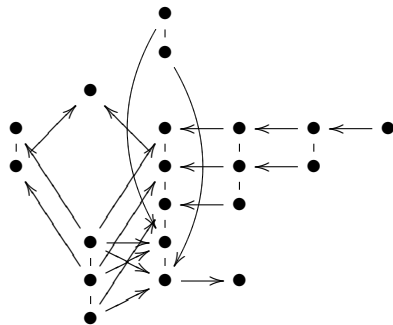
56.4



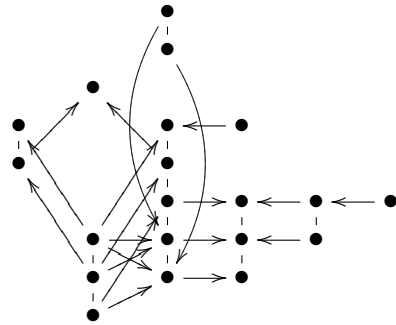
56.5



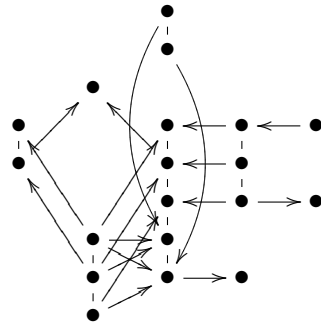
56.6



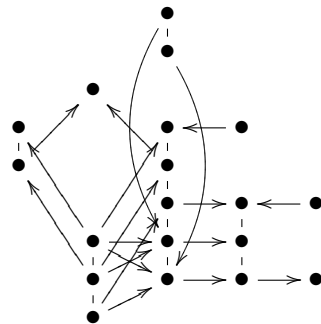
56.7



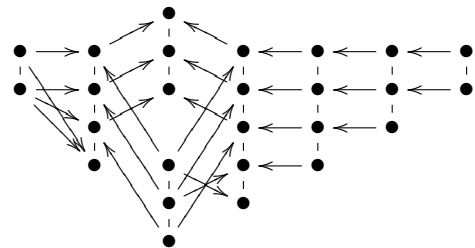
56.8



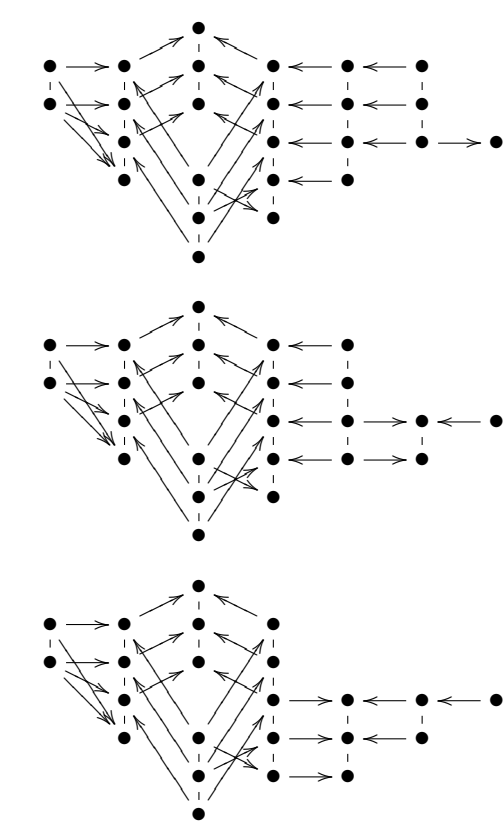
56.9



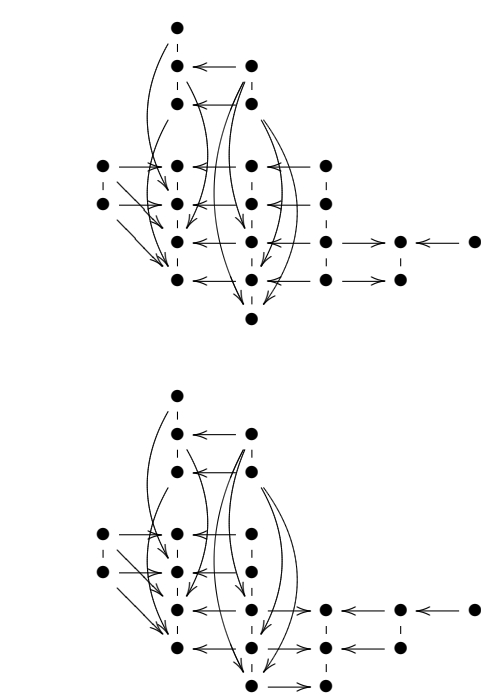
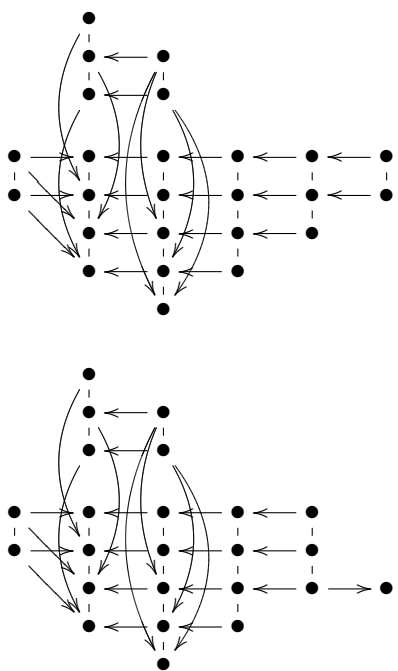
57



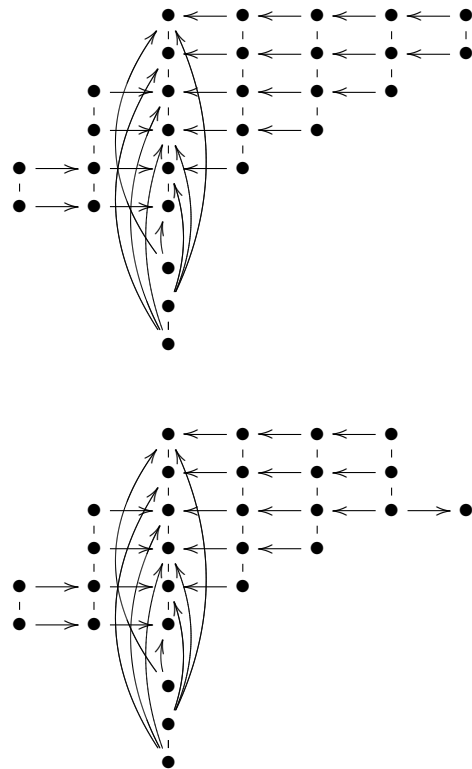




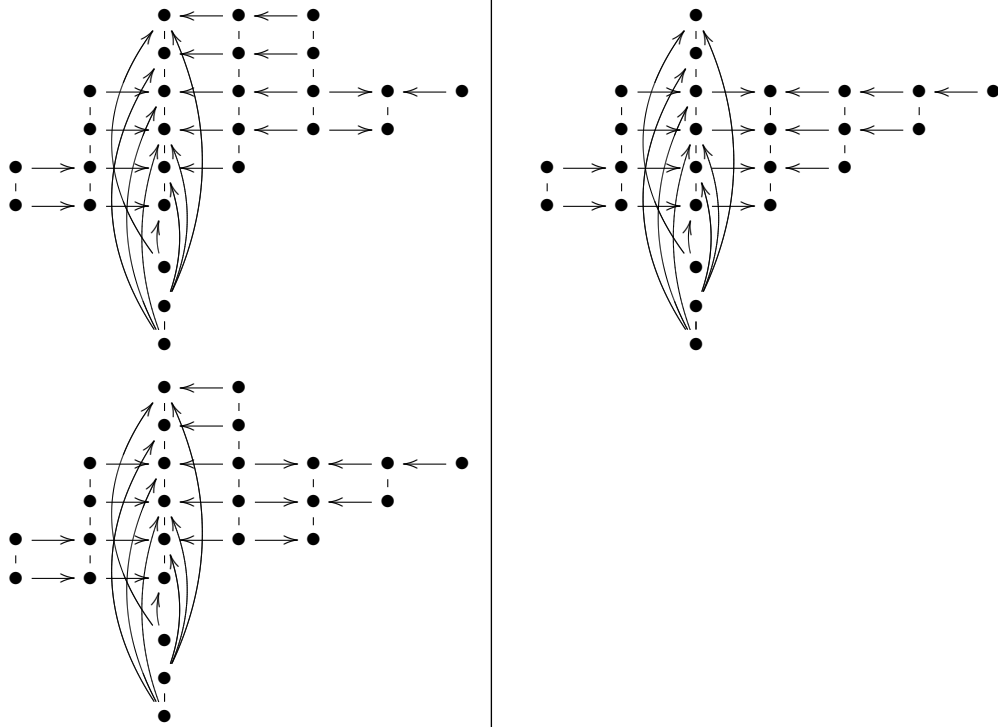
58



60



65



## Literatur

- [ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, 1: Techniques of Representation Theory. London Mathematical Society Student Texts 65, 2006.
- [B] K. Bongartz. Treue einfach zusammenhängende Algebren I. Commentarii mathematici Helvetici, Band 57, S.282-330, 1982.
- [Dr] P. Dräxler. Aufrichtige gerichtete Ausnahmealgebren. Bayreuther Mathematische Schriften 29, 1989.
- [Di] R. Diestel. Graphentheorie. 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [R1] C.M. Ringel. Tame algebras and integral quadratic forms. Springer Lecture Notes 1099, 1984.
- [R2] C.M. Ringel. Exceptional modules are tree modules. Linear algebra and its applications, vol. 275-276, S.471-493, 1998.
- [RT] A. Rogat, T. Tesche. The Gabriel quivers of the sincere simply connected algebras. SFB 343, Ergänzungsreihe 93-005, 1993.