Übung 4

Satz 0.1 *(höherdimensionales Eisensteinkriterium) Es sei R ein noetherscher nullteilerfreier Ring. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so dass der Ring $R_{\mathfrak{p}}$ regulär ist.*

Es sei

$$f(T) = T^e + a_{e-1}T^{e-1} + \ldots + a_1 T + a_0 \in R[T],$$

so dass $a_i \in \mathfrak{p}$ für $0 \leq i < e$ und $a_0 \notin \mathfrak{p}^2$.

Dann ist $f(T)R[T]$ ein Primideal in $R[T]$. Insbesondere ist $f(T)$ ein irreduzibles Polynom über dem Quotientenkörper K von R.

Wir müssen zeigen, dass $R[T]/f(T)R[T]$ nullteilerfrei ist. Da $R[T]/f(T)R[T] \subset R_{\mathfrak{p}}[T]/f(T)R_{\mathfrak{p}}[T]$, können wir annehmen, dass R ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$ ist.

$S := R[T]/f(T)R[T]$ ist ein lokaler Ring, dessen maximales Ideal von T und den Elementen von $\mathfrak{p}$ erzeugt wird. Da $a_0 \notin \mathfrak{p}^2$ finden wir Elemente $u_1, \ldots, u_{d-1} \in \mathfrak{p}$, so dass die Restklassen von $u_1, \ldots, u_{d-1}, a_0$ in $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ eine Basis dieses $\kappa(\mathfrak{p})$-Vektorraums bilden. Aber dann ist $u_1, \ldots, u_{d-1}, T$ ein Erzeugendensystem des maximalen Ideals von S. Da Krulldim $S = d$, muss S ein regulärer lokaler Ring sein. *Q.E.D.*

Bemerkung: Ohne einen tieferliegenden Satz der kommutativen Algebra kann man auf die gleiche Weise das gewöhnliche Eisensteinkriterium beweisen.

Variante: Es seien

$$\begin{aligned} f(T_1) &= T_1^e + a_{e-1}T_1^{e-1} + \ldots + a_1 T_1 + a_0 \in R[T_1, T_2], \\ g(T_2) &= T_2^f + b_{f-1}T_2^{f-1} + \ldots + b_1 T_2 + b_0 \in R[T_1, T_2], \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten die gleichen Bedingungen erfüllen wie in der Proposition. Zusätzlich fordern wir, dass a_0 und b_0 in dem $\kappa(\mathfrak{p})$-Vektorraum $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ linear unabhängig sind. Dann ist das Ideal, welches von $f(T_1), g(T_2) \in R[T_1, T_2]$ erzeugt wird ein Primideal. Als Übung kann man sich allgemeinere Aussagen ausdenken.