Übung 5

Satz 0.1 *(naiver Abstieg): Es sei $K \subset L$ eine Erweiterung von Körpern. Es seien X und Y affine Schema von endlichem Typ über K. Es sei X reduziert und es sei $X(K) \subset X$ Zariski-dicht.*

Es sei $f : X_L \to Y_L$ ein Morphimus von L-Schemata, so dass $f(X(K)) \subset Y(K)$.

Dann existiert ein Morphismus von K-Schemata $f_0 : X \to Y$, so dass $f = f_0 \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} L$.

Beweis: Es sei o.B.d.A. $X = \operatorname{Spec} A$ und $Y = \operatorname{Spec} K[T_1, \ldots T_m]$. Der Morphismus f ist gegeben durch Elemente $\alpha_i \in A \otimes_K L$, $i = 1, \ldots, m$, so dass $T_i \mapsto \alpha_i$ der Komorphismus zu f ist. Wir müssen zeigen, dass $\alpha_i \in A$. Es sei $\xi : A \to K$ ein Punkt von $X(K)$. Wir betrachten dass kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \otimes_K L \arrow[d, "\xi_L"'] & L[T_1, \ldots, T_m] \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "\tilde{\eta}"] \\ L & L. \arrow[l, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

Da der Punkt $\tilde{\eta} \in Y(K)$, folgt $\tilde{\eta}(T_i) \in K$. Also gilt $\xi_L(\alpha_i) \in K$ für $i = 1, \ldots m$.

In dem K-Vektorraum L wählen wir eine Basis $\{e_u \mid u \in U\}$ eines komplementären Vektorraums zu $K \subset L$. Dann können wir schreiben

$$\alpha_i = \alpha_i(0) + \sum_{u \in U} \alpha_i(u) e_u, \quad \alpha_i(0), \alpha_i(u) \in A.$$

Da $\xi_L(\alpha_i) \in K$ folgt $\xi(\alpha_i(u)) = 0$ für alle $u \in U$. Also liegt $\alpha_i(u)$ in allen maximalen Idealen $\mathfrak{m} \subset A$, die Punkten von $X(K)$ entsprechen. Aus dem folgenden Lemma folgt, dass $\alpha_i(u) = 0$. Also gilt $\alpha_i = \alpha_i(0) \in A$. *Q.E.D.*

Lemma 0.2 *Es sei A ein kommutativer Ring. Es sei $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A$, $i \in I$ eine Menge von Primidealen, die in $\operatorname{Spec} A$ dicht ist.*

Dann gilt:

$$\cap_{i \in I} \mathfrak{p}_i = \text{Nilradikal } A.$$

In der Tat, wenn $a \in A$ nicht nilpotent ist, ist $D(a) \neq \emptyset$.