Übung 8

Satz 0.1 *Es sei R ein (kommutativer) Ring und es sei $R[T]$ der Polynomring. Es sei M ein freier R-Modul mit einem Endomorphimus $T : M \to M$. Wir betrachten ihn als $R[T]$-Modul.*

Dann existiert eine exakte Sequenz von $R[T]$-Moduln

$$0 \to R[T]^{(I)} \to R[T]^{(I)} \to M \to 0,$$

wobei I eine Menge ist. Wenn M endlich erzeugt ist kann man I endlich wählen.

Beweis: Wir wählen eine Basis $\{e_i \,|\, i \in I\}$ von M. Wir schreiben

$$Te_i = \sum_{j \in I} a_{ji} e_j, \quad i \in I, \; a_{ji} \in R.$$

Bei festem i sind die a_{ji} außerhalb eine endlichen Teilmenge von I gleich 0. Es sei f_i, $i \in I$ die Standardbasis von $R[T]^{(I)}$. Wir betrachten die Sequenz von $R[T]$-Moduln

$$\begin{array}{ccccc} R[T]^{(I)} & \to & R[T]^{(I)} & \to & M \;\to 0 \\ & & f_i & \longmapsto & e_i \\ f_i & \longmapsto & Tf_i - \sum_j a_{ji} f_j & & \end{array} \tag{1}$$

Das Bild des ersten Pfeils von (1) ist der Untermodul von $R[T]^{(I)}$, der als R-Modul von den folgenden Elementen erzeugt wird

$$T^{n+1} f_i - \sum_j a_{ji} T^n f_j, \quad i \in I, \; n \in \mathbb{Z}, \; n \geq 0. \tag{2}$$

Das Kompositum der ersten beiden Pfeile in (1) gleich 0. Andererseits bilden die Elemente von (2) zusammen mit den Elementen f_i, $i \in I$ eine Basis des R-Moduls $R[T]^{(I)}$. Daraus folgt, dass (1) eine zerfallende exakte Sequenz von R-Moduln ist. *Q.E.D.*

Korollar 0.2 *Für jeden $R[T]$-Modul X gilt*

$$\mathrm{Ext}^i_{R[T]}(M, X) = 0, \quad i \geq 2. \tag{3}$$

Allgemeiner gilt für jeden $R[T]$-Modul N, dass

$$dim_{R[T]} proj\ N \leq \dim_R proj\ N + 1.$$

Beweis: Die erste Aussage gilt auch noch, wenn M als R-Modul nur projektiv ist. In der Tat, man findet eine direkte Summe von R-Moduln

$$M \oplus E = \tilde{M}, \tag{4}$$

wobei $\tilde{M}$ ein freier R-Modul ist. Man wählt für $T : E \to E$ irgend einen Endomorphismus, z.B. den Nullmorphismus. Dann wird (4) auch eine direkte Summe von $R[T]$-Moduln. Da (3) für $\tilde{M}$ gilt, gilt dies auch für M.

Im allgemeinen wählt man eine Resolution von N

$$0 \to M_d \to \ldots \to M_0 \to N \to 0, \tag{5}$$

wobei die M_i projektive R-Moduln sind. Man versieht die M_i mit einem Endomorphismus T, so dass (5) eine Sequenz von $R[T]$-Moduln wird. Für jedes M_i findet man eine Resolution durch projektive $R[T]$-Moduln

$$0 \to P_{1i} \to P_{0i} \to M_i \to 0.$$

Die Behauptung folgt, indem man einen Doppelkomplex bildet. *Q.E.D.*