Algebraische Geometrie, Übungen 2

1) Es sei $A = K[X_1, X_2]$ der Polynomring in 2 Variablen über einem körper K. Wir betrachten die Prägarbe $P = \tilde{A}$ auf $\operatorname{Spec} A$. Es sei $U_i = D(X_i) \subset \operatorname{Spec} A$. Man berechne die Kohomologie des folgenden Unterkomplexes der Cech-Komplexes:

$$\ldots 0 \to \tilde{A}(U_1) \times \tilde{A}(U_2) \to A(U_{12}) \to 0 \ldots$$

Es sei $U = \operatorname{Spec} A \setminus \mathfrak{m}$, wo $\mathfrak{m}$ das Primideal ist, das von X_1 und X_2 erzeugt wird. Was ist $\tilde{A}(U)$?

2) Es seien M und N zwei A-Moduln. Es seien $f_1, \ldots, f_m \in A$ Elemente, die das Einheitsideal erzeugen. Es seien A-Modulhomomrphismen $s_i : M_{f_i} \to N_{f_i}$ für $i = 1, \ldots, m$ gegeben. Durch Lokalisierung erhalten wir aus s_i einen A-Modulhomomorphismus

$$(s_i)_{f_j} : M_{f_i f_j} \to M_{f_i f_j}.$$

Für alle i, j möge $(s_i)_{f_j} = (s_j)_{f_i}$.

Man beweise, dass es einen A-Modulhomomorphismus $s : M \to N$, so dass $s_{f_i} = s_i$.

3) Es sei X eine G-topologie und P eine Prägarbe. Es sei $\mathcal{E}$ der Überlagerungsraum von P. Es sei $s \in P(U)$. Man beweise, dass die Funktion $\tilde{s} : U \to \mathcal{E}$ stetig ist.

4) Es seien $(K^{\cdot}, \partial_K)$ und $(L^{\cdot}, \partial_L)$ zwei Komplexe von abelschen Gruppen. Ein Morphismus von Komplexen ist eine Folge von Homomorphismen abelscher Gruppen $f^i : K^i \to L^i$ für $i \in \mathbb{Z}$, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist

$$\begin{tikzcd} K^i \arrow[r, "\partial_K^i"] \arrow[d, "f^i"'] & K^{i+1} \arrow[d, "f^{i+1}"] \\ L^i \arrow[r, "\partial_L^i"] & L^{i+1} \end{tikzcd}$$

Man definiert $Z^i = K^{i+1} \times L^i$ und $\partial_Z^i : Z^i \to Z^{i+1}$ durch

$$\partial_Z^i(k, \ell) = (-\partial_K^{i+1} k, f^{i+1}(k) + \partial_L^i(\ell)).$$

Man beweise, dass $\partial_Z^{i+1} \circ \partial_Z^i = 0$. Man beweise, dass der Komplex $(Z^{\cdot}, \partial_Z)$ azyklisch ist, wenn $(K^{\cdot}, \partial_K)$ und $(L^{\cdot}, \partial_L)$ azyklisch sind.