Algebraische Geometrie, Übungen 4

1) Wir benutzen die Bezeichnungen von Aufgabe 1 auf dem Zettel 2. Es sei $A = K[X_1, X_2]$. Wir betrachten die offenen Mengen U, U_1, U_2, $U_{12} = U_1 \cap U_2$. Es sei $\mathcal{O}$ die Einschränkung der Garbe $\tilde{A}$ auf U, d.h. für eine offene Mengen $V \subset U$ gilt nach Definition $\mathcal{O}(V) = \tilde{A}(V)$. entsprechend bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, bzw. $\mathcal{O}_{12}$ die Einschränkungen von $\tilde{A}$ auf U_1, U_2, U_{12}.

Wir betrachten folgende Inklusionen als stetige Abbildungen

$$j_1 : U_1 \to U, \quad j_2 : U_2 \to U \quad j : U_{12} \to U.$$

Nach Definition von $(j_1)_*\mathcal{O}_1$ gilt offene Menge $V \subset U$ gilt:

$$(j_1)_*\mathcal{O}_1(V) = \mathcal{O}(U_1 \cap V) = \tilde{A}(U_1 \cap V)$$

In der Sequenz

$$\tilde{A}(V) \to \tilde{A}(U_1 \cap V) \oplus \tilde{A}(U_2 \cap V) \to \tilde{A}(V \cap U_{12}) \tag{1}$$

erhält man den ersten Pfeil aus den Restriktionen und der zweite Pfeil ist die Differenz der Restriktionen. Aus (1) ergibt sich eine Sequenz von Garben

$$0 \to \mathcal{O} \to (j_1)_*\mathcal{O}_1 \oplus (j_2)_*\mathcal{O}_2 \to (j_{12})_*\mathcal{O}_{12} \to 0$$

Man beweise das dies eine exakte Sequenz von Garben ist, aber keine exakte Sequenz von Prägarben.

2) Es sei X ein topologischer Raum und es sei A eine Menge. Wir versehen A mit der diskreten Topologie und betrachten den topologischen Raum $X \times A$. Die Projektion $\pi : X \times A \to X$ ist ein lokaler Homöomorphismus. Die Garbe zu diesem Überlagerungsraum nennt man die konstante Garbe $\underline{A}$.

Beweisen Sie das $\underline{A}$ die assozierte Garbe zu der Prägarbe

$$U \mapsto A$$

ist.

Es sei $X = \mathbb{R}^2$. Es sei U die Vereinigung von n disjunkten offenen Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$. Was ist $\underline{A}(U)$?

3) Es sei R ein nullteilerfreier Ring. Es seien $U_1, U_2 \subset X = \operatorname{Spec} R$ zwei nichtleere offenen Mengen. Man beweise, dass $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Es sei A eine abelsche Gruppe.

Man beweise, dass die konstante Garbe $\underline{A}$ auf X welk ist. Man folgere, dass

$$H^1(X, \underline{A}) = 0.$$

4) Es sei X ein topologischer Raum. Es seien E und F Garben auf X die mit Schnitten $e \in E(X)$ und $f \in F(X)$ versehen sind. Wir bezeichen mit

$$\mathrm{Hom}_{X,pkt}(E, F)$$

die Menge aller Morphismen $\phi : E \to F$, so dass $\phi(e) = f$.

Es sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Es sei G eine Garbe auf U mit einem Schnitt $g \in G(U)$. Man konstruiere eine Garbe $\tilde{G}$ auf X, deren Einschränkung auf U gleich G ist und so dass ein Schnitt $\tilde{g} \in \tilde{G}(X)$ existiert, dessen Einschränkung auf U der Schnitt g ist. Für $x \notin U$ soll gelten:

$$\tilde{G}_x = \{g_x\}.$$

Hinweis: Man verklebe den Überlagerungsraum von G mit X in den offenen Teilmengen $s(U) \subset \mathcal{E}_G$ mit $U \subset X$.

Man beweise:

$$\mathrm{Hom}_{U,pkt}(G, F_{|U}) = \mathrm{Hom}_{X,pkt}(\tilde{G}, F).$$

Hier ist $F_{|U}$ die Einschränkung der Garbe F auf U mit dem ausgezeichneten $f_{|U} \in F(U)$.