Algebraische Geometrie, Übungen 5

1) Es sei X ein topologischer Raum und es sei F eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Es sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X. Man beweiese, dass die in der Vorlesung definierte Abbildung

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, F) \to H^1(X, F)$$

injektiv ist.

2) Es sei X eine G-Topologie. Eine Sequenz von Prägarben abelscher Gruppen

$$P_1 \to P_2 \to P_3$$

heißt exakt, wenn für jede zulässige offene Menge $U \subset X$ die Sequenz

$$P_1(U) \to P_2(U) \to P_3(U)$$

eine exakte Sequenz abelscher Gruppen ist. Entsprechend kann man Bilder und Kokerne von Prägarben definieren.

Wir bezeichnen mit $P_i^\sharp$ die Garbifizierung. Man beweise, dass für eine exakte Sequenz von Prägarben abelscher Gruppen die assoziierte Sequenz von Garben exakt ist:

$$P_1^\sharp \to P_2^\sharp \to P_3^\sharp$$

Es sei $F_1 \xrightarrow{\alpha} F_2 \xrightarrow{\beta} F_3$ eine exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen. Man betrachte die Prägarbe

$$H : U \mapsto (\text{Kern } F_2(U) \to F_3(U)) \,/\, (\text{Bild } F_1(U) \to F_2(U))$$

Man beweise, das die Garbifizierung von H gleich 0 ist.

3) Es sei F eine Garbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X. Es sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Dann ist $Y = X \setminus U$ abgeschlossen. Man definiert

$$H^0_Y(X, F) = \text{Kern } (F(X) \to F(U)).$$

Es sei F welk und es sei $0 \to F \to G \to H \to 0$ eine exakte Sequenz von Garben.

Man beweise, dass die Sequenz

$$0 \to H^0_Y(X,F) \to H^0_Y(X,G) \to H^0_Y(X,H) \to 0$$

exakt ist.

4) Es sei X ein topologischer Raum und es sei $j : U \to X$ die Inklusion einer offenen Teilmenge. Wenn F eine Garbe abelscher Gruppen auf U. Wir haben die Garbe j_*F auf X definiert:

$$j_*F(V) = F(U \cap V), \qquad \text{wo } V \subset X.$$

Es sei $F \subset L$ eine Einbettung in eine welke Garbe auf L auf U. Man erhält eine Einbettung $j_*F \to j_*L$. Man beweise, dass j_*L welk ist. Man nehme die Kokerne

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & F & \to & L & \to & B & \to 0 \\ 0 \to & j_*F & \to & j_*L & \to & C & \to 0 \end{array}$$

Man folgere, dass es eine Injektion gibt:

$$H^1(X, j_*F) \to H^1(U, F).$$

Was ist die Beziehung zwischen j_*B und C?