Übungen Algebraische Geometrie 7

1) Es sei $f : Y \to X$ ein Morphismus von Schemata. Es sei F ein $\mathcal{O}_Y$-Modul auf Y. Wieso ist f_*F ein $\mathcal{O}_X$-Modul? Es sei f eine offene Einbettung und es sei $f_!F$ die Extension durch 0, d.h. man setzt den 0-Schnitt von F aus X fort (siehe Übung 4,4). Man konstruiere eine Abbildung

$$f_!F \to f_*F.$$

Man zeige, dass $f_!F$ ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul von f_*F ist.

Es sei A ein Ring ohne Nullteiler und es sei $0 \neq f \in A$ ein Element, das keine Einheit ist. Es sei $X = \operatorname{Spec} A$. Man betrachte $f : Y = D(f) \to X$.

Man beweise, dass $f_!\mathcal{O}_Y$ nicht quasikohärent ist.

2) Es sei A ein Ring und $X = \operatorname{Spec} A$. Es sei $j : V \subset X$ eine offene quasikompakte Teilmenge. Das bedeutet, dass man V als endliche Vereinigung schreiben kann

$$V = D(g_1) \cup \ldots \cup D(g_t), \quad g_i \in A.$$

Es sei F ein quasikohärenter $\mathcal{O}_V$-Modul auf V. Dann ist $M = F(V)$ ein A-Modul. Wir haben bewiesen, dass $F \cong \tilde{M}_{|V}$. Es sei $f \in A$. Man beweise, dass $F(V \cap D(f)) = M_f$. Man folgere, dass j_*F ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

3) Gegeben seien Morphismen von Schemata $X \to Z \leftarrow Y$ und $Z \to W$. Durch Kompositum hat man auch $X \to W \leftarrow Y$.

Es gibt genau eine Morphismus $\delta : Z \to Z \times_W Z$ dessen Komposition mit den beiden Projektionen $Z \times_W Z \to Z$ jeweils die Indentität ist. Man nennt δ die Diagonale.

Man zeige, dass man ein Faserproduktdiagramm hat:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \longrightarrow & Z \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \delta \\ X \times_W Y & \longrightarrow & Z \times_W Z \end{array}$$

(Hinweis: Man führe das auf ein Problem in der Kategorie der Mengen zurück.)