Algebraische Geometrie II, Übung 3

1) Es sei $\mathcal{M}_{\lambda\in\Lambda}$ ein gefiltertes induktives System von Garben auf einem topologischen Raum X. Es sei P die Prägarbe

$$P(U) = \lim_{\rightarrow} M_{\lambda}(U).$$

Man beweise, dass P separiert ist und dass P das Garbenaxiom für endliche Überdeckungen $U = \cup_{i=1}^{t} U_i$ erfüllt.

2) Wir betrachten Schemata X in denen jede offene Menge quasikompakt ist. Wenn A ein noetherscher Ring ist, so ist $X = \operatorname{Spec} A$ ein solches Schema und auch $X = \mathbb{P}^n_A$. (wieso ?)

Man beweise, dass eine (evtl. unendliche) direkte Summe welker Garben auf X wieder welk ist. Man folgere, dass für eine Familie von Garben $\mathcal{M}_{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$ von Garben abelscher Gruppen auf X

$$H^i(X, \oplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{M}_{\lambda}) \cong \oplus_{\lambda\in\Lambda} H^i(X, \mathcal{M}_{\lambda}).$$

3) Wir haben den Funktor $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ auf der Kategorie der Ringe definiert. Ein Punkt von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}(R)$ wird repräsentiert durch einen surjektiven R-Modulhomomorphismus $R^{n+1} \to L$, wobei L ein lokal freier R-Modul vom Rang 1 ist. Man betrachte die folgende Abbildung von Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}(R) & \times & \mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}}(R) & \longrightarrow & \mathbb{P}^{nm+n+m}_{\mathbb{Z}}(R) \\ (R^{n+1} \to L) & \times & (R^{m+1} \to M) & \mapsto & (R^{n+1} \otimes_R R^{m+1} \to L \otimes_R M) \end{array} \tag{1}$$

Man beweise, dass (1) eine abgeschlossene Einbettung von Schemata ist:

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{P}^{nm+n+m}_{\mathbb{Z}}$$

Das nennt man die Segreeinbettung.

Es seien n, m, r, s natürliche Zahlen, so dass $n + r = m + s$. Es sei $m < n$. Ein Punkt von $G^{n,r}(R)$ wird durch einen direkten Summanden $P \subset R^{n+r}$ vom Rang n repräsentiert. Es sei

$$I(R) \subset G^{n,r}(R) \times G^{m,s}(R)$$

die Teimenge aller Paare $(P \in R^{n+r}) \times (Q \in R^{m+s})$, so dass $Q \subset P$.

Man beweise, dass $I \subset G^{n,r} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} G^{m,s}$ ein abgeschlossenes Unterschema ist. Man nennt I das Inzidenzschema.