**Algebraische Geometrie II, Übung 4**

1) Es sei $A$ ein nullteilerfreier Ring. Man berechne die Cech-Kohomologie der Garbe der Einheiten $\mathcal{O}_X^*$ auf dem Schema $X = \mathbb{P}_A^d$, bezüglich der Standardüberdeckung $\{U_i\}$, $i \in [0, d]$.

Man weiß, dass jeder lokal freie Modul vom Rang 1 über einem faktoriellen Ring frei ist. Man folgere, dass die Garben $\mathcal{O}(m)$ bis auf Isomorphie die einzigen lokal freien Garben auf $\mathbb{P}_A^d$ sind, wenn $A$ faktoriell ist.

2) Es sei $A$ ein Ring. Wir betrachten den projektiven Raum $\mathbb{P}_A^d$. Es sei $f \in A[T_0, \ldots, T_d]$ ein homogenes Polynom vom Grad $m$. Das affine Schema:

$$V_i = \operatorname{Spec} A[(T_0/T_i), (T_1/T_i), \ldots, (T_d/T_i)]/(f/T_i^m)$$

ist eine abgeschlossenes Unterschema von $U_i$. Die Vereinigung $\cup_i V_i$ ist ein abgeschlossenes Unterschema von $\mathcal{P}^d$, das mit $V_+(f)$ bezeichnet wird. Man nennt das eine Hyperfläche vom Grad $m$.

Man betrachte auf $U_i$ die Abbildung

$$\mathcal{O}_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}, \quad 1 \mapsto (f/T_i)^m.$$

Man zeige, dass sich diese Abbildungen zu Abbildungen von Garben zusammenkleben:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(-m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}.$$

Der Kokern ist die Strukturgarben des Schemas $V_+(f)$. Wann ist diese Abbildung injektiv?

3) Es sei $A$ ein nullteilerfreier Ring. Es sei $X \subset \mathbb{P}_A^2$ eine Hyperfläche vom Grad $m$. Man beweise, dass $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ ein freier $A$-Modul vom Rang $\frac{1}{2}(m-2)(m-1)$ ist.

4) Es sei $X$ ein separiertes Schema über $\operatorname{Spec} A$. Es sei $j : U \subset X$ ein offenes affines Unterschema. Es sei $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe auf $U$.

Man beweise, dass $R^p j_* \mathcal{F} = 0$ für $p > 0$.