Algebraische Geometrie II, Übung 7

1) Es sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Es sei $f : K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ ein Morphismus von Komplexen. Es sei $C_f^{\cdot}$ der Abbildungszylinder. Man beweise, dass das Kompositum der Abbildungen

$$K^{\cdot} \xrightarrow{f} L^{\cdot} \to C_f^{\cdot}$$

homotop zu 0 ist.

2) Es sei $g : K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ ein weiterer Morphismus. Man beweise, dass es eine Bijektion zwischen Homotopien $s^p : K^p \to L^{p-1}$ gibt, so dass

$$f - g = d_L s + s d_K$$

und Abbildungen von Komplexen $\sigma : C_f^{\cdot} \to C_g^{\cdot}$, die folgendes Diagramm kommutative machen:

$$\begin{array}{ccccc} L^{\cdot} & \longrightarrow & C_f^{\cdot} & \longrightarrow & K^{\cdot}[1] \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ L^{\cdot} & \longrightarrow & C_g^{\cdot} & \longrightarrow & K^{\cdot}[1] \end{array}$$

3) Es sei $K^{\cdot}$ eine Komplex. Es sei $C^{\cdot}$ der Abbildungszylinder der identischen Abbildung $\mathrm{id} : K^{\cdot} \to K^{\cdot}$.

Man beweise, dass $C^{\cdot}$ kontrahierbar ist. Dazu benutze man die Homotopie $s : C^p \to C^{p-1}$:

$$s(k^{p+1}, k^p) = (k^p, 0).$$

4) Es sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Es sei $f : K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ ein Morphismus von Komplexen. Es sei $C_f^{\cdot}$ der Abbildungszylinder. Wir betrachten den Abbildungszylinder U der kanonischen Abbildung

$$L^{\cdot} \to C_f^{\cdot}.$$

Dann gilt

$$U^p = L^{p+1} \oplus K^{p+1} \oplus L^p.$$

Wir betrachten die folgenden beiden Abbildungen von Komplexen $U \to K[1]$ und $K[1] \to U$, die im Grad p wie folgt gegeben sind:

$$\begin{array}{ccc} U^{\cdot} & \longrightarrow & K^{\cdot}[1] \\ (l^{p+1}, k^{p+1}, l^p) & \mapsto & k^{p+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} K^\cdot[1] & \longrightarrow & U^\cdot \\ k^{p+1} & \mapsto & (-f(k^{p+1}), k^{p+1}, 0) \end{array}$$

Man beweise, dass diese beieden Abbildungen invers in der Homotopiekategorie sind.

(Man lasse sich von Aufgabe 3 inspirieren.)