Elementare Geometrie Vorlesung 10

Thomas Zink

24.5.2017

1.Kongruenz von Dreiecken

Es sei E eine Ebene.
Wir verstehen in dieser Vorlesung unter einem Dreieck eine Folge von drei Punkten ABC in E, die nicht auf einer Geraden liegen. Es kommt uns auf die Reihenfolge der Eckpunkte an. Die Dreiecke ABC und BAC sind für uns verschieden.

1.Kongruenz von Dreiecken

Es sei E eine Ebene.
Wir verstehen in dieser Vorlesung unter einem Dreieck eine Folge von drei Punkten ABC in E, die nicht auf einer Geraden liegen. Es kommt uns auf die Reihenfolge der Eckpunkte an. Die Dreiecke ABC und BAC sind für uns verschieden.

Definition

Wir nennen zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ kongruent, wenn es eine Isometrie $f : E \to E$ gibt, so dass

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C'.$$

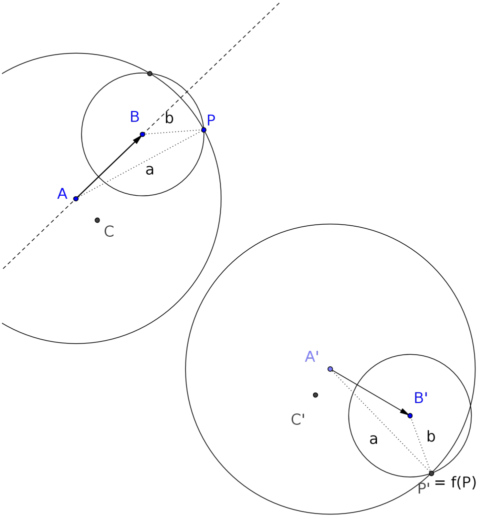
2.Kongruenz von Dreiecken

Wenn ABC und $A'B'C'$ kongruent sind, so gibt es genau eine Isometrie f, wie sie in der Definition gefordert ist.

2.Kongruenz von Dreiecken

Wenn ABC und $A'B'C'$ kongruent sind, so gibt es genau eine Isometrie f, wie sie in der Definition gefordert ist.

In der Tat, wir ordnen ABC die beseitete Strecke $(\overline{AB}, \mathcal{S})$, so dass $C \in \mathcal{S}$. Entsprechend ordnen wir $A'B'C'$ die beseitete Strecke $(\overline{A'B'}, \mathcal{S}')$, $C' \in \mathcal{S}'$ zu.
Dann bildet f diese beseiteten Strecken auf einander ab, und ist daher nach dem Theorem Vorlesung 8, 12 eindeutig bestimmt.


B
b
P
a
A
C
A'
B'
C'
a
b
P' = f(P)

3. Der erste Kongruenzsatz

Es sei f eine Isometrie, die das Dreieck ABC auf das Dreieck $A'B'C'$ abbildet. Dann gilt:

$$|AB| = |A'B'| \qquad |AC| = |A'C'| \qquad |BC| = |B'C'|$$

$$\angle BAC = \angle B'A'C' \quad \angle CBA = \angle C'B'A' \quad \angle ACB = \angle A'C'B'$$

3. Der erste Kongruenzsatz

Es sei f eine Isometrie, die das Dreieck ABC auf das Dreieck $A'B'C'$ abbildet. Dann gilt:

$$|AB| = |A'B'| \qquad |AC| = |A'C'| \qquad |BC| = |B'C'|$$

$$\angle BAC = \angle B'A'C' \quad \angle CBA = \angle C'B'A' \quad \angle ACB = \angle A'C'B'$$

Proposition

(SSS): Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke, so dass $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, $|BC| = |B'C'|$.
Dann sind die beiden Dreiecke kongruent.

4. Beweis des 1.Kongruenzsatzes

Wir betracheten die gleichen beseiteten Strecken $(\overline{AB}, \mathcal{S})$ und $(\overline{A'B'}, \mathcal{S}')$ wie oben. Nach dem Theorem Vorlesung 8, 12 finden wir eine Isometrie f, so dass

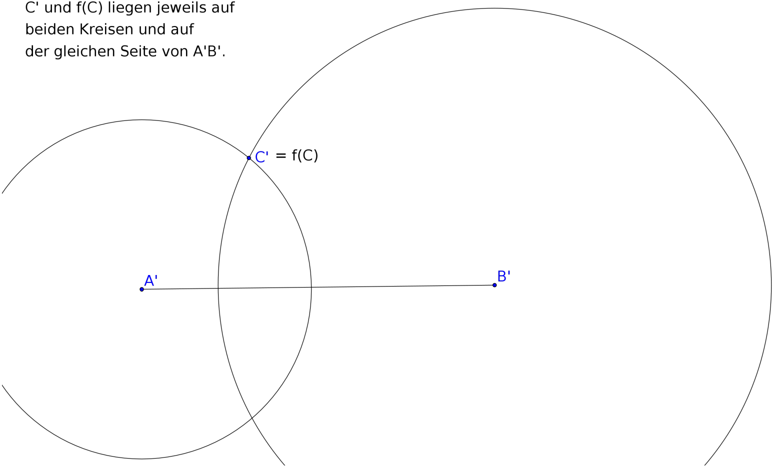
$$f(A) = A', \quad f(B) = B',$$

und so dass $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$. Dann liegt $f(C)$ auf der gleichen Seite von $A'B'$ wie C'. Da

$$|A'C'| = |AC| = |A'f(C)|, \quad |B'C'| = |BC| = |B'f(C)|$$

folgt, dass $C' = f(C)$. $Q.E.D.$

C' und f(C) liegen jeweils auf
beiden Kreisen und auf
der gleichen Seite von A'B'.



5. Das gleichschenklige Dreieck

Proposition

Es sei ABC *ein Dreieck, so dass* $|AC| = |BC|$. *Dann gilt*

$$\angle BAC = \angle ABC$$

5. Das gleichschenklige Dreieck

Proposition

Es sei ABC ein Dreieck, so dass $|AC| = |BC|$. Dann gilt

$$\angle BAC = \angle ABC$$

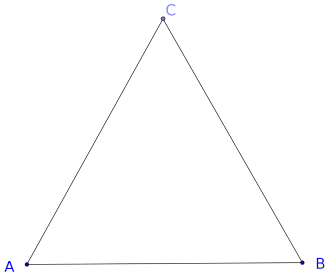
Beweis: Wir betrachten das Dreieck $A'B'C'$, wo $A' = B$, $B' = A$, $C' = C$. Es ist kongruent zu dem Dreieck ABC, da

$$|AB| = |BA| = |A'B'|, |AC| = |BC| = |A'C'|, |BC| = |AC| = |B'C'|.$$

Also gilt:

$$\angle BAC = \angle B'A'C' = \angle ABC.$$

Es sei $|AC| = |BC|$.
Dann gilt:
$\angle BAC = \angle ABC$.



6. Der zweite Kongruenzsatz

Proposition

(SWS): Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke, so dass

$$|AB| = |A'B'|, \quad |AC| = |A'C'| \quad \angle BAC = \angle B'A'C'.$$

Dann sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ kongruent.

Proposition

(SWS): Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke, so dass

$$|AB| = |A'B'|, \quad |AC| = |A'C'| \quad \angle BAC = \angle B'A'C'.$$

Dann sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ kongruent.

Beweis: Wir betrachten die gleichen beseiteten Strecken $(\overline{AB}, \mathcal{S})$ und $(\overline{A'B'}, \mathcal{S}')$ wie auf Blatt 4. Wir nehmen die dort definierte Isometrie f. Es reicht zu zeigen, dass die Dreiecke $f(A), f(B), f(C)$ und $A'B'C'$ kongruent sind. Nach Konstruktion von f ist $\overline{f(A)f(B)} = \overline{A'B'}$ und $f(C)$ und C' liegen auf der gleichen Seite von $A'B'$.

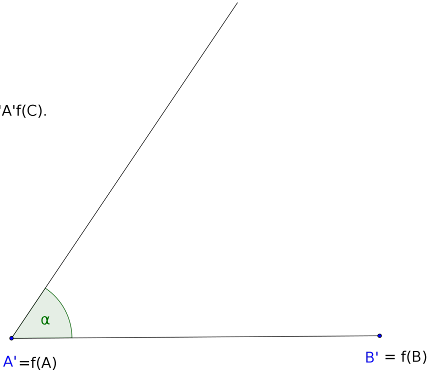
7. zum Beweis des zweiten Kongruenzsatzes

Nach Vorausetzung gilt: $\angle B'A'f(C) = \angle B'A'C'$. Da $f(C)$ und C' auf der gleichen Seite von $A'B'$ liegen, müssen die Punkte $f(C)$ und C' auf dem gleichen Strahl von A' aus liegen. Da

$$|A'C'| = |A'f(C)|$$

folgt, dass $C' = f(C)$. Also sind die Dreiecke $A'B'C'$ und $A'B'f(C)'$ gleich.

$\alpha = \angle B'A'C' = \angle B'A'f(C)$.



8. Der dritte Kongruenzsatz

Proposition

(WSW): Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke, so dass

$$|AB| = |A'B'|, \quad \angle ABC = \angle A'B'C' \quad \angle BAC = \angle B'A'C'.$$

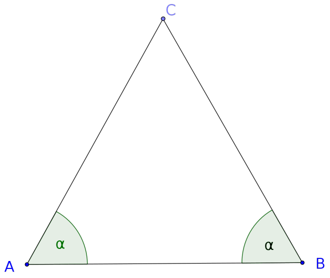
Dann sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ kongruent.

Corollary

Es sei ABC ein Dreieck, so dass $\angle BAC = \angle ABC$. Dann gilt $|AC| = |BC|$.

Die Beweise sind Übungsaufgaben.

Es sei
$\angle BAC = \angle ABC$.
Dann gilt:
$|AC| = |BC|$.



9. H"ohen im Dreieck

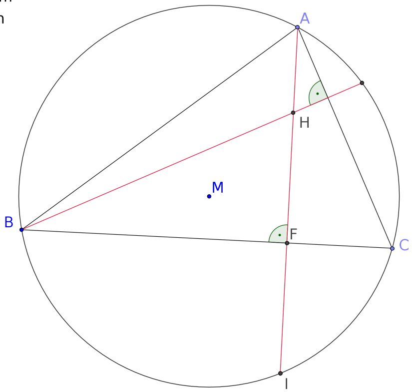
Proposition

Es sei ABC ein Dreieck mit seinem Umkreis. Es sei $F \in BC$ der Fußpunkt des Lots von A auf BC. Das ist eine Höhe des Dreiecks. Der andere Schnittpunkt von AF mit dem Umkreis sei I. Es sei H der Schnittpunkt mit einer anderen Höhe des Dreiecks.
Dann gilt

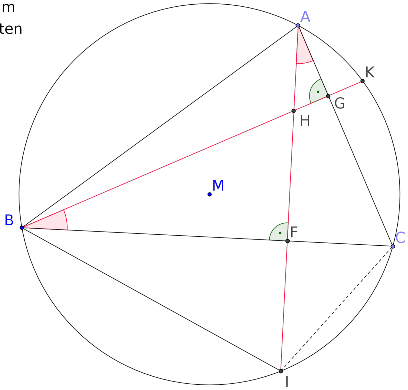
$$|HF| = |FI|.$$

Zwei H''ohen in einem Dreieck ABC, die sich in H schneiden.

Dann gilt:
$|HF| = |FI|$.



Nach dem Satz ''uber die Winkelsumme im Dreieck sind die roten Winkel bei A und B gleich gross.

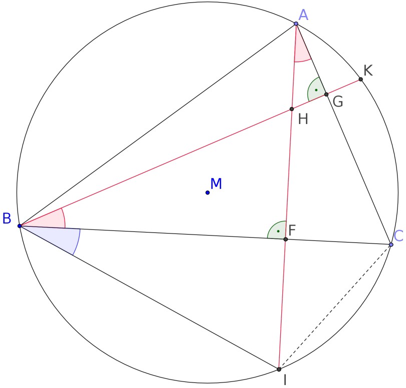


$\angle$ IFC = $\angle$ IAC nach dem Peripheriewinkel-satz.

Also sind der rote und der blaue Winkel bei B gleich.

Nach WSW sind die Dreiecke BFI und BFH kongruent. Also:

|FI| = |FH|.



10.Eine Folgerung

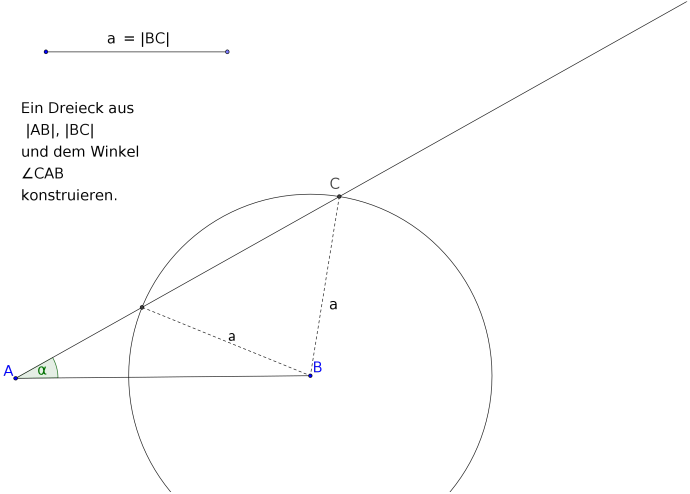
Corollary

Es sei ABC eine Dreieck. Die Höhe von A aus schneide den Umkreis in einem weiteren Punkt I und die Höhe von B aus schneide den Umkreis in einem weiteren Punkt K. Dann gilt für die Länge der Bögen:

$$\text{Bogen}\, CK = \text{Bogen}\, CI.$$

11. SSW ist falsch

Ein Dreieck aus
|AB|, |BC|
und dem Winkel
∠CAB
konstruieren.



12. Kongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke

Proposition

Es seien ABC *und* $A'B'C'$ *zwei Dreiecke, so dass*

$$|AB| = |A'B'|, \quad |BC| = |B'C'|, \quad \angle ACB = \angle A'C'B' = 90^o.$$

Dann sind die Dreiecke ABC *und* $A'B'C'$ *kongruent.*

12. Kongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke

Proposition

Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke, so dass

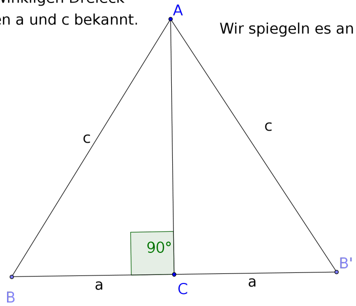
$$|AB| = |A'B'|, \quad |BC| = |B'C'|, \quad \angle ACB = \angle A'C'B' = 90^o.$$

Dann sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ kongruent.

Wenn man die Dreiecke an AC bzw. $A'C'$ spiegelt, erhält man zwei gleichschenklige Dreiecke, auf die man SSS anwenden kann.

Von dem rechtwinkligen Dreieck
sind die L''angen a und c bekannt.

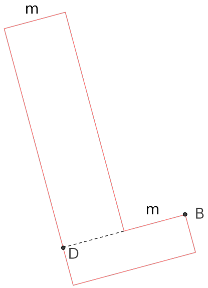
Wir spiegeln es an AC.



Von dem Dreieck ABB' kennen wir
die L''angen aller 3 Seiten.

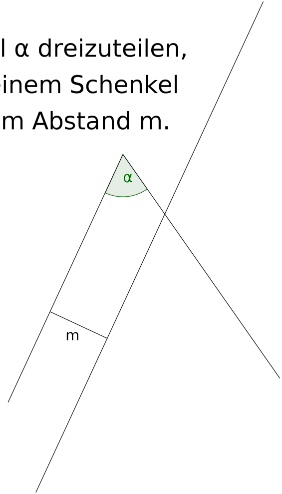
13. Die Dreiteilung des Winkels

Der Winkelhaken



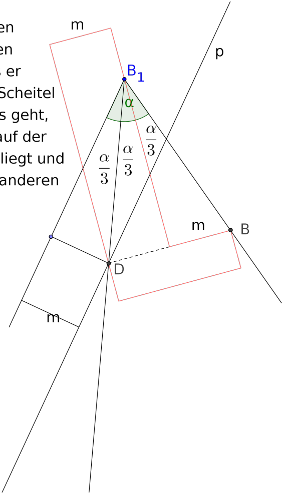
13. Die Dreiteilung des Winkels

Um den Winkel α dreizuteilen, zieht man zu einem Schenkel eine Parallele im Abstand m.

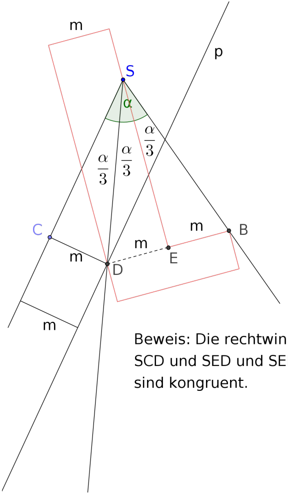


13. Die Dreiteilung des Winkels

Man legt den Winkelhaken so an, dass er durch den Scheitel des Winkels geht, so dass D auf der Parallele p liegt und B auf dem anderen Schenkel.



13. Die Dreiteilung des Winkels



Beweis: Die rechtwinkligen Dreiecke SCD und SED und SEB sind kongruent.