Elementare Geometrie Vorlesung 11

Thomas Zink

29.5.2017

1.Verhältnisse

Es sei g eine Gerade. Es seien $A, B, C, D \in g$ vier Punkte, so dass $A \neq B$ und $C \neq D$. Wir definieren:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{|AB|}{|CD|}, \quad \text{wenn}$$

die Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ in die gleiche Richtung zeigen.

$$\frac{AB}{CD} = -\frac{|AB|}{|CD|}, \quad \text{wenn}$$

die Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ in verschiedene Richtungen zeigen.

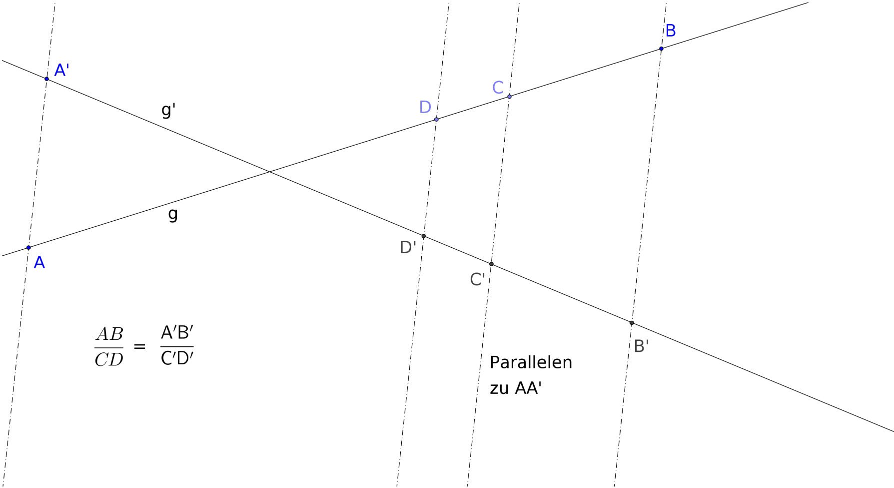
2.Der erste Strahlensatz

Proposition

Es seien g *und* g' *zwei Geraden in einer Ebene* E. *Es sei* $f : g \to g'$ *eine Parallelprojektion.*
Es seien $A, B, C, D \in g$ *Punkte, so dass* $A \neq B$ *und* $C \neq D$. *Es sei* $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $D' = f(D)$. *Dann gilt*

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

3.Der erste Strahlensatz



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

4. Maßstab oder Ordinate

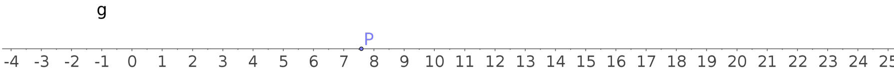
Man wähle auf der Geraden g einen Maßstab x. Das bedeutet wir legen ein Lineal an die Gerade g. Dann entspricht jedem Punkt $P \in g$ genau eine reelle Zahl $x(P)$.

4. Maßstab oder Ordinate

Man wähle auf der Geraden g einen Maßstab x. Das bedeutet wir legen ein Lineal an die Gerade g. Dann entspricht jedem Punkt $P \in g$ genau eine reelle Zahl $x(P)$.

Wenn y ein weiterer Maßstab auf g ist, so gibt es reelle Zahlen m und n, wo $m > 0$, so dass

$$y(P) = mx(P) + n, \quad \text{für alle } P \in g.$$



x(P) = 7,5

5. Maßstab oder Ordinate

Es seien $P, Q \in g$ zwei verschiedene Punkte. Dann gibt es genau einen Maßstab x auf g, so dass $x(P) = 0$ und $x(Q) = 1$.

5. Maßstab oder Ordinate

Es seien $P, Q \in g$ zwei verschiedene Punkte. Dann gibt es genau einen Maßstab x auf g, so dass $x(P) = 0$ und $x(Q) = 1$.

Man hat die folgende Formel für das Verhältnis (Blatt 1)

$$\frac{AB}{CD} = \frac{x(B) - x(A)}{x(D) - x(C)}$$

6.Das Teilverhältnis

Es seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Geraden. Das Teilverhältnis, in dem C die orientierte Strecke $\overline{AB}$ teilt, ist

$$\frac{CA}{CB}$$

6.Das Teilverhältnis

Es seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Geraden. Das Teilverhältnis, in dem C die orientierte Strecke $\overline{AB}$ teilt, ist

$$\frac{CA}{CB}$$

Wenn der Punkt C im Innern der Strecke $\overline{AB}$ liegt, ist das Teilverhältnis eine negative Zahl und wenn der Punkt C ausßerhalb der Strecke AB liegt eine positive Zahl.
Das Teilverhältis kann niemals 0 oder 1 sein. Es ist -1, wenn C der Mittelpunkt der Strecke AB ist.

6.Die Baryzentrische Ordinate

Es seien A, B zwei verschiedene Punkte einer Geraden g. Es sei $C \in g$ eine weiterer Punkt. Dann nennt man

$$\beta(C) = \frac{CA}{CB}$$

die baryzentrische Ordinate von C bezüglich $\overline{AB}$. .

6.Die Baryzentrische Ordinate

Es seien A, B zwei verschiedene Punkte einer Geraden g. Es sei $C \in g$ eine weiterer Punkt. Dann nennt man

$$\beta(C) = \frac{CA}{CB}$$

die baryzentrische Ordinate von C bezüglich $\overline{AB}$. .

Es seien A und B fest gewählt. Wir nehmen aus der Geraden g die Punkte A und B heraus und erhalten die Menge $g \setminus \{A, B\}$. Dann ist β eine Bijektion

$$\beta : g \setminus \{A, B\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

7.Die Baryzentrische Ordinate

In der Tat, es sei x ein Maßstab auf g. Man kann aus $x(C)$ die baryzentrische Ordinate $\beta(C)$ berechenen und umgekehrt:

$$\frac{x(A)-x(C)}{x(B)-x(C)} = \beta(C)$$

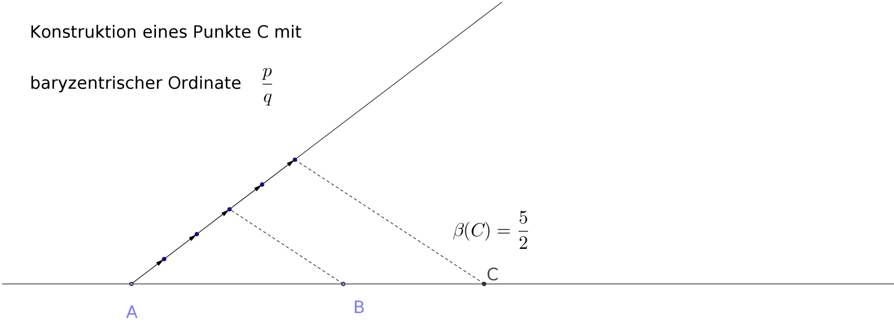
$$x(A) - x(C) = (x(B) - x(C))\beta(C)$$

$$x(A) - x(B)\beta(C) = x(C)(1 - \beta(C))$$

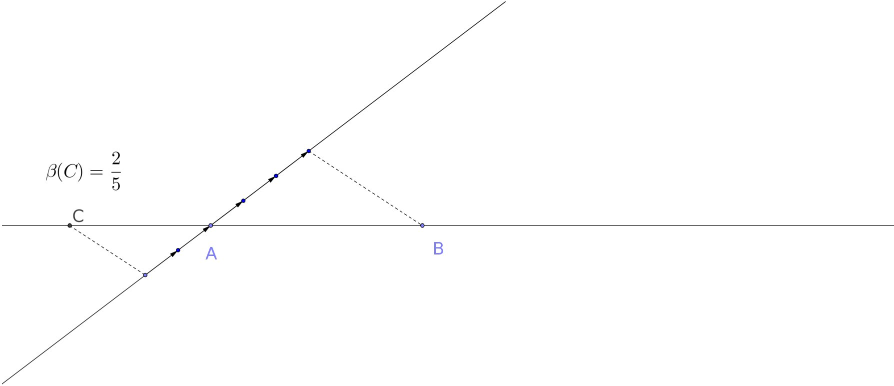
$$x(C) = \frac{x(A)-x(B)\beta(C)}{1-\beta(C)}$$

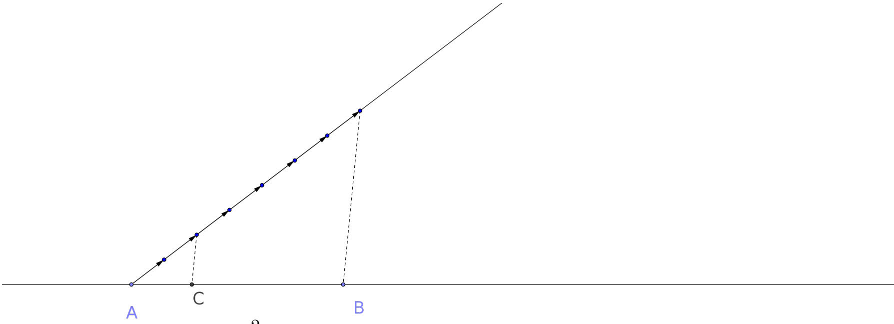
Konstruktion eines Punkte C mit

baryzentrischer Ordinate $\frac{p}{q}$



$$\beta(C) = \frac{2}{5}$$





$$\beta(C) = -\frac{2}{5}$$

8.Affine Abbildungen

Definition

Eine bijektive Abbildung $f : g \to g'$ *heißt affin, wenn für beliebige Punkte* $A, B, C \in g$*, die verschieden sind*

$$\frac{CA}{CB} = \frac{f(C)f(A)}{f(C)f(B)}.$$

Wenn $A, B, C, D \in g$, so dass $A \neq B$ und $C \neq D$, so gilt für eine affine Abbildung

$$\frac{AB}{CD} = \frac{f(B)f(A)}{f(D)f(C)}.$$

Proposition

Es seien $f_1 : g_1 \to g_2$ und $f_2 : g_2 \to g_3$ affine Abbildungen. Dann ist $f_2 \circ f_1 : g_1 \to g_3$ eine affine Abbildung.

Proposition

Es seien $f_1 : g_1 \to g_2$ und $f_2 : g_2 \to g_3$ affine Abbildungen. Dann ist $f_2 \circ f_1 : g_1 \to g_3$ eine affine Abbildung.

Proposition

Es seien g und g' Geraden in einer Ebene.
Eine Parallelprojektion $f : g \to g'$ ist eine affine Abbildung.
Es seien $A, B \in g$ und $A', B' \in g'$ jeweils zwei verschiedene Punkte. Dann gibt es genau eine affine Abbildung $f : g \to g'$, so dass $f(A) = A'$ und $f(B) = B'$

Wir beweisen die zweite Proposition. Angenommen f existiert. Es sei β die baryzentrische Ordinate auf g bezüglich der orientierten Strecke $\overline{AB}$ und β' die baryzentrische Ordinate auf g' bezüglich der orientierten Strecke $\overline{A'B'}$. Dann gilt nach der Definition Blatt 8:

Wir beweisen die zweite Proposition. Angenommen f existiert. Es sei β die baryzentrische Ordinate auf g bezüglich der orientierten Strecke $\overline{AB}$ und β' die baryzentrische Ordinate auf g' bezüglich der orientierten Strecke $\overline{A'B'}$. Dann gilt nach der Definition Blatt 8:

Wenn $f(C) = C'$ so gilt

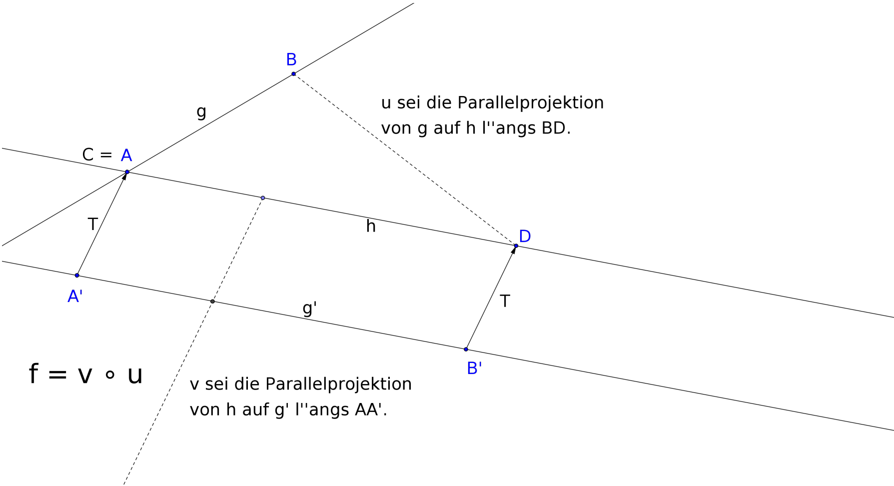
$$\beta(C) = \beta'(C').$$

Durch die letzte Gleichung ist $C' = f(C)$ bestimmt. Daher gibt es höchstens eine Abbildung f.

Durch die letzte Gleichung ist $C' = f(C)$ bestimmt. Daher gibt es höchstens eine Abbildung f.

Wir konstruieren eine affine Abbildung f mit $f(A) = A'$ und $f(B) = B'$ als Kompositum von zwei Parallelprojektionen.

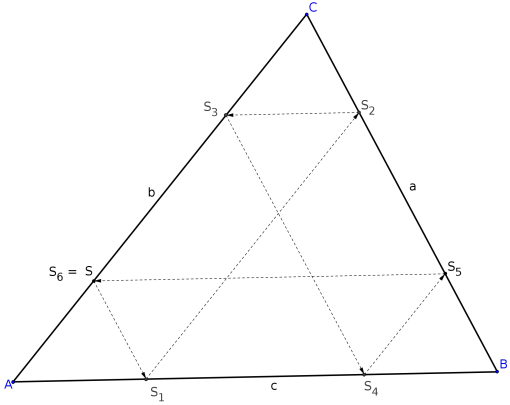
Dazu verschieben wir die Gerade g' mit der Translation $T = \overrightarrow{A'A}$. Es sei $T(g') = h$ $T(A') = C = A$, und $T(B') = D$.


B
g
u sei die Parallelprojektion
von g auf h l''angs BD.
C = A
T
h
D
A'
g'
T
B'
f = v ∘ u
v sei die Parallelprojektion
von h auf g' l''angs AA'.

12.Der Parallelweg

Es sei ABC ein Dreieck. Es sei $a = BC$, $b = AC$ und $c = AB$. Es sei $S \in b$.

Man laufe auf einer Parallelen zu a durch S bis man zu einem Punkt S_1 auf c kommt. Genauso laufe man von S_1 parallel zu b bis man zu einem Punkt S_2 auf a. Dann laufe man von S_2 parallel zu c bis man zu S_3 auf b kommt. Wiederholt man den gleichen Vorgang mit S_3 an Stelle von S, so kommt man zum Punkt S zurück.



C
S3
S2
b
a
S6 = S
S5
A
S1
c
S4
B

13. Der Parallelweg

Es sei

$$\begin{aligned} p_a &: b \to c, \quad \text{die Projektion längs } a \\ p_b &: c \to a, \quad \text{die Projektion längs } b \\ p_c &: a \to b, \quad \text{die Projektion längs } c \end{aligned}$$

Man muss beweisen, dass die affine Abbildung

$$q := p_c \circ p_b \circ p_a \circ p_c \circ p_b \circ p_a : b \to b$$

die identische Abbildung von b ist. Man sieht $q(A) = A$ und $q(C) = C$. Nach Blatt 9 ist eine affine Abbildung eindeutig bestimmt, wenn man die Bilder zweier Punkte kennt. Also $q = \mathrm{id}_b$.

14. Zum Begriff des Verhältnisses

Es seien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei parallele Strecken, so dass $A \neq B$ und $C \neq D$. Dann bleibt die Definition von

$$\frac{AB}{CD}$$

sinnvoll.
Wenn T eine Translation ist, so hat man

$$\frac{AB}{CD} = \frac{T(A)T(B)}{CD} = \frac{AB}{T(C)T(D)}.$$

15.Der zweite Strahlensatz

Proposition

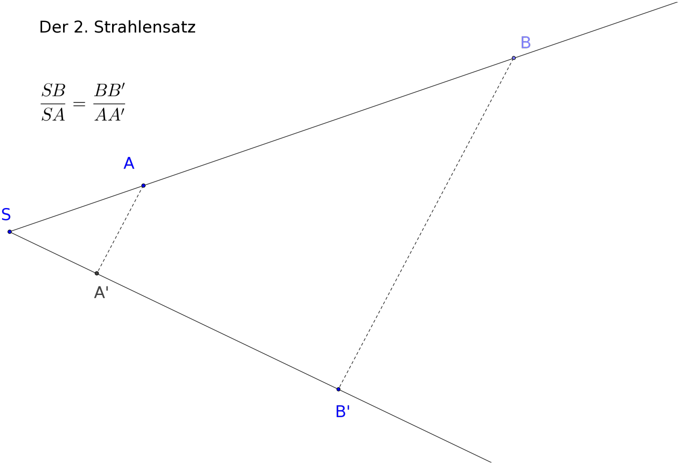
Es seien g *und* g' *zwei Geraden in einer Ebene, die sich genau in einem Punkt* S *schniden. Es seien* $A, B \in g$ *zwei Punkte, die von* S *verschieden sind.*
Es sei $f : g \to g'$ *eine Parallelprojektion. Wir schreiben* $A' = f(A)$ *und* $B' = f(B)$.
Dann gilt:

$$\frac{SB}{SA} = \frac{BB'}{AA'}$$

Beweis: Das ist eine Folge aus dem ersten Strahlensatz:

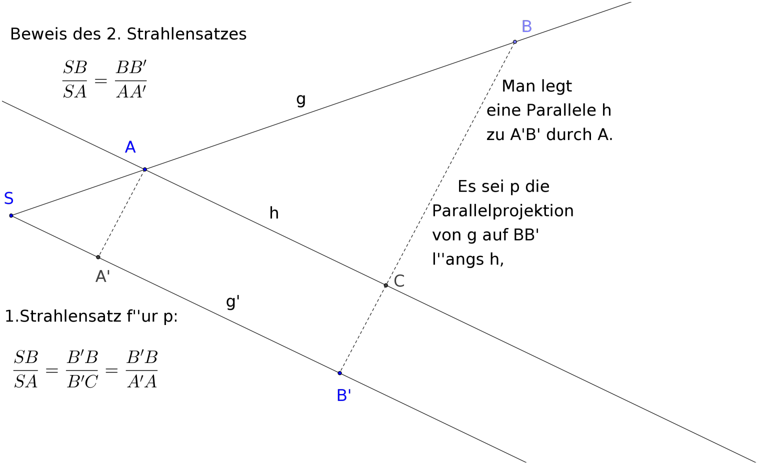
Der 2. Strahlensatz

$$\frac{SB}{SA} = \frac{BB'}{AA'}$$



Beweis des 2. Strahlensatzes

$$\frac{SB}{SA} = \frac{BB'}{AA'}$$



Man legt
eine Parallele h
zu A'B' durch A.

Es sei p die
Parallelprojektion
von g auf BB'
l''angs h,

1.Strahlensatz f''ur p:

$$\frac{SB}{SA} = \frac{B'B}{B'C} = \frac{B'B}{A'A}$$

16. Der dritte Strahlensatz

Es seien g und g' zwei parallele Geraden in einer Ebene. Es sei S ein Punkt, der weder auf g noch auf g' liegt. Wir definieren die Zentralprojektion mit dem Zentrum S:

$$p : g \to g'.$$

16. Der dritte Strahlensatz

Es seien g und g' zwei parallele Geraden in einer Ebene. Es sei S ein Punkt, der weder auf g noch auf g' liegt. Wir definieren die Zentralprojektion mit dem Zentrum S:

$$p : g \to g'.$$

Es sei $A \in g$. Dann sei $p(A) = g' \cap SA$.

Proposition

Die Zentralprojektion p ist eine affine Abbildung.

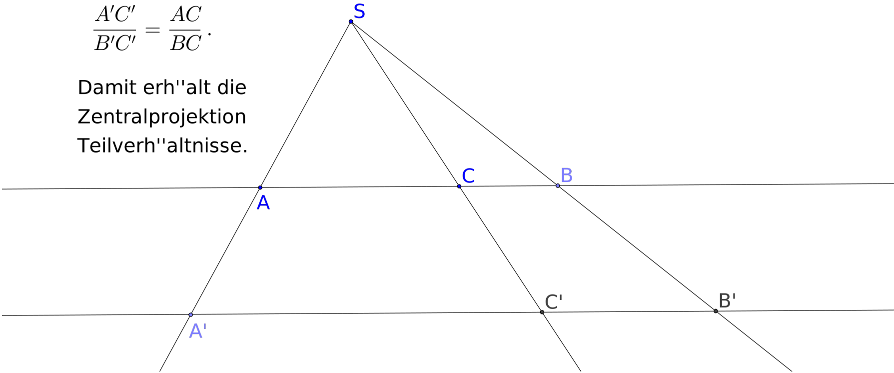
17.Beweis des dritten Strahlensatzes

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{SC'}{SC} = \frac{B'C'}{BC}\,.$$ zweimal 2.Strahlensatz

Also:

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}\,.$$

Damit erh''alt die Zentralprojektion Teilverh''altnisse.



1.Vektoren

Es sei E eine Ebene. Eine Translation $T : E \to E$ wird auch als Vektor bezeichnet. Wenn $S, A \in E$, so gibt es genau einen Vektor T, so dass $T(S) = B$. Wir schreiben:

$$T = \vec{SA}.$$

1.Vektoren

Es sei E eine Ebene. Eine Translation $T : E \to E$ wird auch als Vektor bezeichnet. Wenn $S, A \in E$, so gibt es genau einen Vektor T, so dass $T(S) = B$. Wir schreiben:

$$T = \overset{\rightarrow}{SA}.$$

Es seien $S_1, A_1 \in E$, die nicht beide auf der Geraden SA liegen. Dann gilt

$$\overset{\rightarrow}{SA} = \overset{\rightarrow}{S_1A_1} \quad \Leftrightarrow \quad SAA_1S_1 \text{ ist ein Parallelelogramm}$$

2.Streckung von Vektoren

Es seien $O, A \in E$ verschiedene Punkte. Es sei $\lambda \geq 0$ eine reelle Zahl. Dann gibt es genau eine Punkt B auf dem Strahl $\overrightarrow{OA}$, so dass

$$|OB| = \lambda |OA|.$$

2.Streckung von Vektoren

Es seien $O, A \in E$ verschiedene Punkte. Es sei $\lambda \geq 0$ eine reelle Zahl. Dann gibt es genau eine Punkt B auf dem Strahl $\overset{\longmapsto}{OA}$, so dass

$$|OB| = \lambda |OA|.$$

Definition

Wir definieren

$$\lambda \vec{OA} = \vec{OB}$$

und nennen dies die Streckung des Vektors $\vec{OA}$ mit dem Faktor λ.

3.Streckung von Vektoren

Die Streckung $\lambda\overrightarrow{OA}$ hängt nur von dem Vektor $\overrightarrow{OA}$ ab und nicht von der Wahl der Punkte O und A.

3.Streckung von Vektoren

Die Streckung $\lambda\overrightarrow{OA}$ hängt nur von dem Vektor $\overrightarrow{OA}$ ab und nicht von der Wahl der Punkte O und A.

Es gibt einen Punkt $B_1 \in OA$, der auf der anderen Seite von O liegt wir A und so dass $|OB_1| = \lambda|OA|$. Wir setzen:

$$(-\lambda)\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB_1}$$

Das ist die Streckung mit einem negativen Faktor. Die beiden Abbildungen $S = \overrightarrow{OB}$ und $S_1 = \overrightarrow{OB_1}$ sind invers zueinander.