# Elementare Geometrie Vorlesung 12

Thomas Zink

31.5.2017

# 1.Die Winkelhalbierende

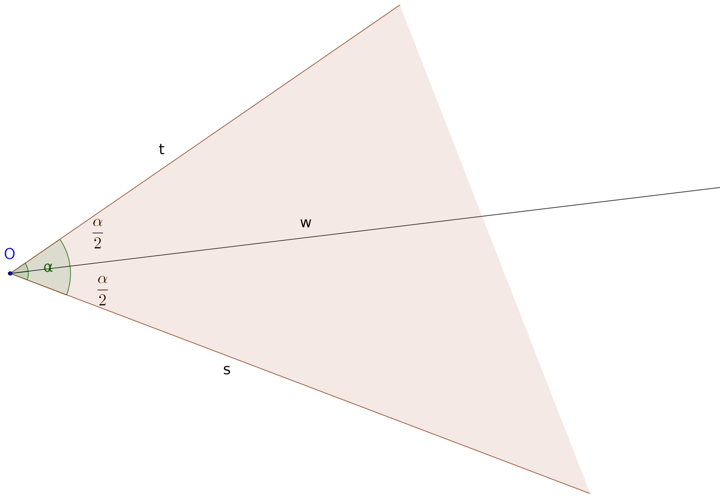
Es seien $s$ und $t$ zwei Strahlen, die sich in einem Punkt $O$ schneiden. Es sei $\angle(s,t) < 180^o$. Die Winkelfläche besteht aus allen Punkten, die auf einer Verbindungsstrecke eines Punktes aus $s$ und eines Punktes aus $t$ liegen.

# 1.Die Winkelhalbierende

Es seien $s$ und $t$ zwei Strahlen, die sich in einem Punkt $O$ schneiden. Es sei $\angle(s,t) < 180^o$. Die Winkelfläche besteht aus allen Punkten, die auf einer Verbindungsstrecke eines Punktes aus $s$ und eines Punktes aus $t$ liegen.

Die Winkelhalbierende $w$ der Strahl für den

$$\angle(s,w) = \angle(w,t) = \frac{1}{2}\angle(s,t).$$


t
w
O
α
$\frac{\alpha}{2}$
$\frac{\alpha}{2}$
s

# 2.Die Winkelhalbierende

**Proposition**

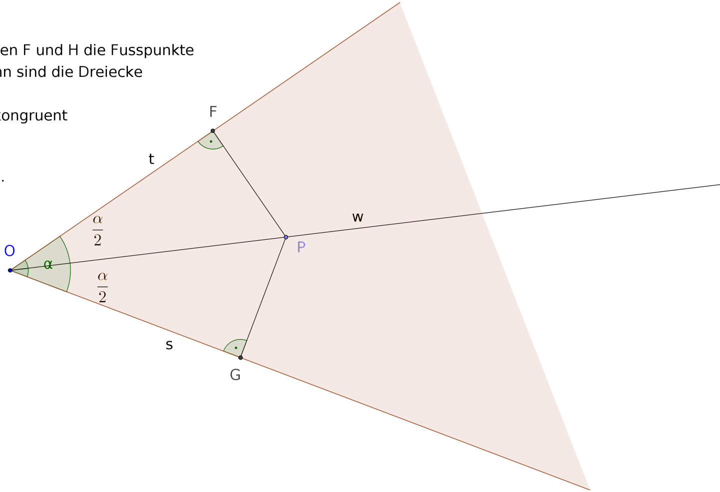
*Die Winkelhalbierende $w$ besteht aus allen Punkten $P$ des Winkelraumes, die zu $s$ und $t$ den gleichen Abstand haben.*

Es sei P ∈ w. Es seien F und H die Fusspunkte der Lote von P. Dann sind die Dreiecke

OFP und OGP     kongruent

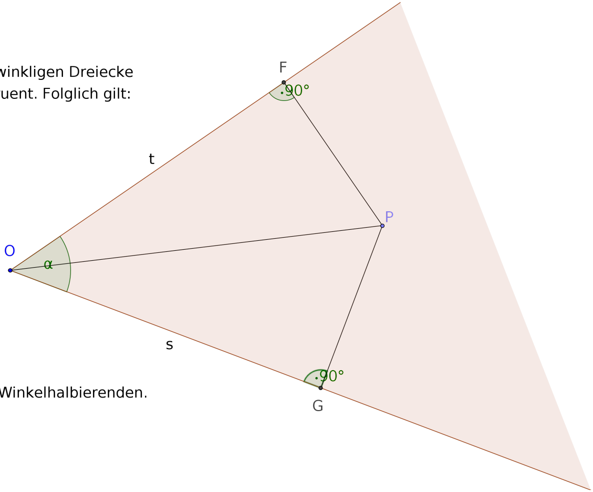
Also gilt

|PF| = PG|.



Es sei |PF| = |PG|.
Dann sind die rechtwinkligen Dreiecke
OFP und OGP kongruent. Folglich gilt:

$\angle$ POF = $\angle$ POG.




Also liegt P auf der Winkelhalbierenden.

# 3.Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks

**Proposition**

*Die Winkelhalbierenden im Dreieck schneiden sind in einem Punkt.*

# 3.Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks

**Proposition**

*Die Winkelhalbierenden im Dreieck schneiden sind in einem Punkt.*

Beweis: Es sei $ABC$ eine Dreieck. Es seien $w_A$, $w_B$, bzw. $w_C$, die Winkelhalbierenden der Winkel im Punkt $A$, im Punkt $B$, bzw. im Punkt $C$. Es sei $I$ der Schnittpunkt von $w_A$ und $w_B$. Dann ist der Abstand von $I$ zu $AB$ und $AC$ derselbe weil $I \in w_A$. Der Abstand von $I$ zu $BA$ und $BC$ ins derselbe weil $I \in w_B$. Also ist auch der Abstand von $I$ zu $CA$ und zu $CB$ derselbe. Damit gilt $I \in w_C$.

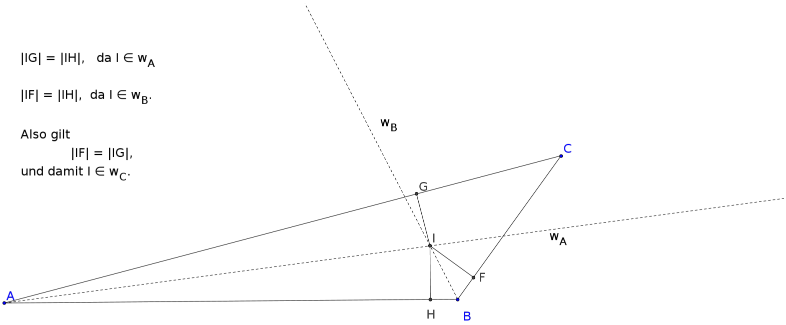
$|IG| = |IH|$, da $I \in w_A$

$|IF| = |IH|$, da $I \in w_B$.

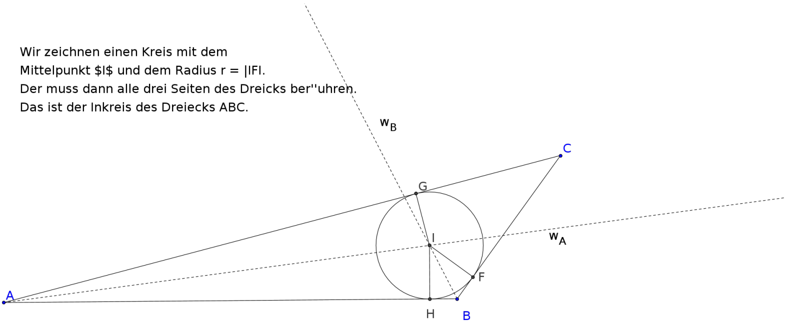
Also gilt

$$|IF| = |IG|,$$

und damit $I \in w_C$.



Wir zeichnen einen Kreis mit dem
Mittelpunkt $I$ und dem Radius r = |IFI.
Der muss dann alle drei Seiten des Dreicks ber''uhren.
Das ist der Inkreis des Dreiecks ABC.



# 4.Satz von der Winkelhalbierenden im Dreieck

**Proposition**

*Es sei* $ABC$ *ein Dreieck und* $w_A$ *die Winkelhalbierende des Winkels in* $A$. *Dann teilt* $w_A$ *die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden.*

# 4.Satz von der Winkelhalbierenden im Dreieck

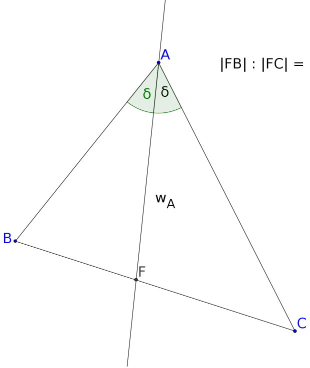
## Proposition

*Es sei* $ABC$ *ein Dreieck und* $w_A$ *die Winkelhalbierende des Winkels in* $A$*. Dann teilt* $w_A$ *die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden.*

*Genauer: Es sei* $F$ *der Schnittpunkt von* $w_A$ *mit* $BC$*. Dann gilt:*

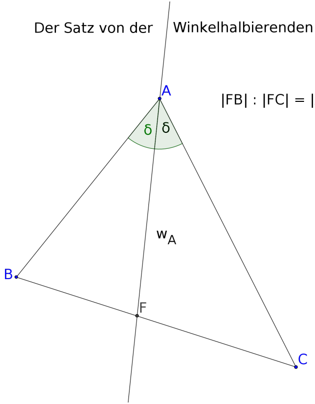
$$\frac{|FB|}{|FC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

## Der Satz von der Winkelhalbierenden

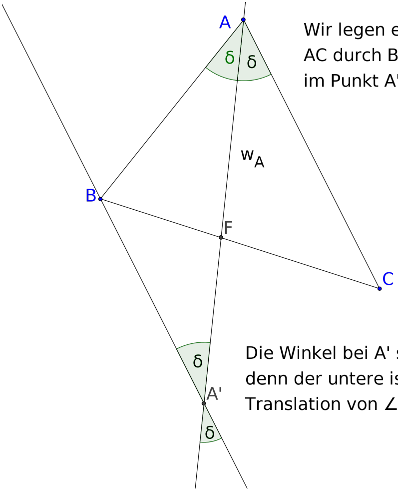



$$|FB| : |FC| = |AB| : |AC|$$

Der Satz von der Winkelhalbierenden

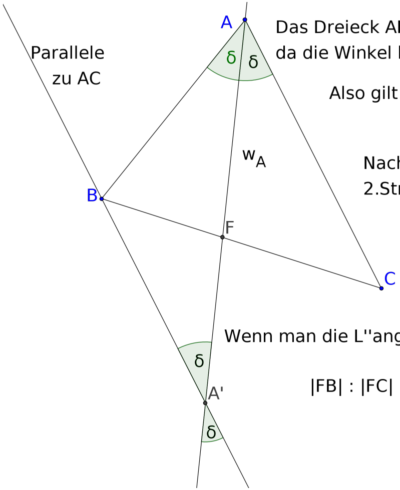



$|FB| : |FC| = |AB| : |AC|$




Wir legen eine Parallele zu AC durch B. Sie schneidet $w_A$ im Punkt A'.

Die Winkel bei A' sind gleich δ, denn der untere ist eine Translation von ∠ FAC.




Das Dreieck ABA' ist gleichschenklig,
da die Winkel bei A und A' gleich sind.

Also gilt: |AB| = |A'B|.

Nach dem
2.Strahlensatz gilt:

$$\frac{FB}{FC} = \frac{A'B}{AC}$$

Wenn man die L''angen der Strecken nimmt folgt:

|FB| : |FC| = |AB| : |AC|

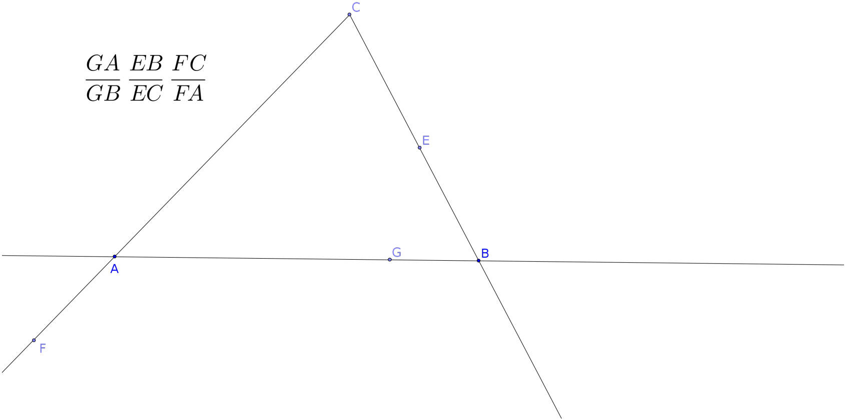
# 5. Der CM-Quotient

Es sei $ABC$ ein Dreieck. Es seien $G \in AB$, $E \in BC$ und $F \in CA$ Punkte, die alle von den Eckpunkten $A, B, C$ verschieden sind. Das folgende Produkt von Teilverhältnissen nennt man den Ceva-Menelaus Quotienten

$$\frac{GA}{GB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA}.$$

Hinweis: Wie in der Buchstabenrechnung üblich lassen wir das Zeichen " $\cdot$ " für die Multiplikation im folgenden weg.

$$\frac{GA}{GB}\,\frac{EB}{EC}\,\frac{FC}{FA}$$



# 6. Der Satz von Menelaus

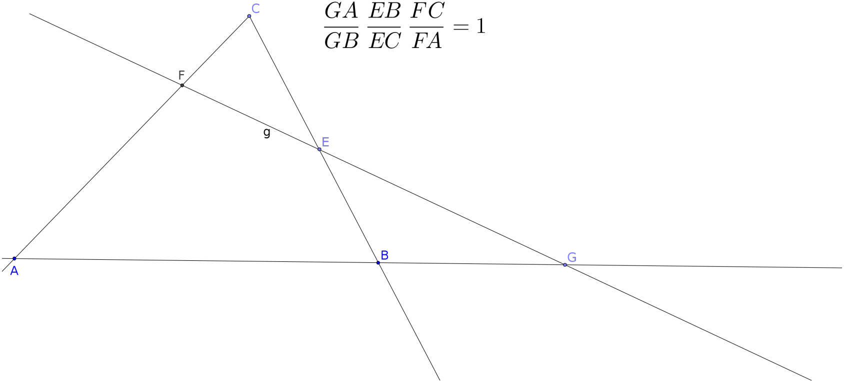
**Proposition**

*Es sei $ABC$ ein Dreieck. Es sei $G \in AB$, $E \in BC$ und $F \in CA$. Dann liegen die Punkte $G$, $E$, $F$ genau dann auf einer Geraden, wenn*

$$\frac{GA}{GB}\frac{EB}{EC}\frac{FC}{FA} = 1$$

Satz des Menelaus

$$\frac{GA}{GB}\,\frac{EB}{EC}\,\frac{FC}{FA} = 1$$



# 7.Beweis des Satzes von Menelaus

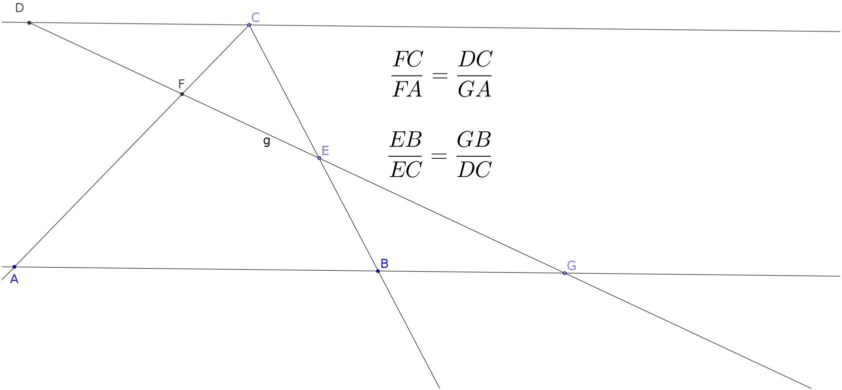
Wir nehemen zuerst an, dass die Punkte $G, E, F$ auf einer Geraden $g$ liegen. Wir zeichnen eine Parallele zu $AB$ durch den Punkt $C$. Sie möge die Gerade $g$ im Punkt $D$ schneiden. Dann folgt aus dem 2.Strahlensatz:

$$\frac{FC}{FA} = \frac{DC}{GA}, \quad \frac{EB}{EC} = \frac{GB}{DC}.$$

Wir multiplizieren die letzten beiden Gleicungen miteinander:

$$\frac{EB}{EC}\frac{FC}{FA} = \frac{GB}{DC}\frac{DC}{GA} = \frac{GB}{GA}.$$

Angenommen FEG liegen auf einer Geraden.




$$\frac{FC}{FA} = \frac{DC}{GA}$$

$$\frac{EB}{EC} = \frac{GB}{DC}$$

# 8.Beweis des Satzes von Menelaus

Jetzt nehmen wir an, dass

$$\frac{GA}{GB}\frac{EB}{EC}\frac{FC}{FA} = 1$$

Es sei $g$ die Gerade $EF$. Sie möge $AB$ in einem Punkt $G'$ schneiden. Dann gilt nach dem Bewiesenen:

$$\frac{G'A}{G'B}\frac{EB}{EC}\frac{FC}{FA} = 1$$

Wir folgern, dass
$$\frac{GA}{GB} = \frac{G'A}{G'B}.$$
Damit sind die baryzentrischen Ordinaten von $G$ und $G'$ bezüglich der Strecke $\overline{BA}$ gleich. Wir folgern $G = G'$, so dass $G$ auf der Geraden $EF$ liegt. $Q.E.D.$

# 9.Der Satz von Ceva

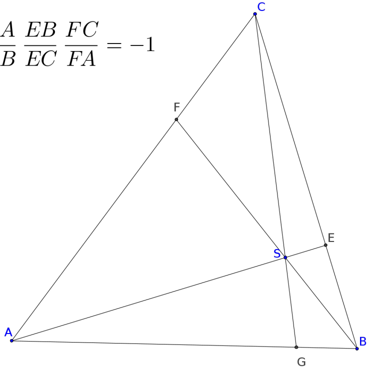
**Proposition**

*Es sei $ABC$ ein Dreieck. Es sei $G \in AB$, $E \in BC$ und $F \in CA$. Dann schneiden sich die Geraden $AE$, $BF$, $AG$ genau dann in einem Punkt, wenn*

$$\frac{GA}{GB}\frac{EB}{EC}\frac{FC}{FA} = -1.$$

Satz des Ceva

$$\frac{GA}{GB}\,\frac{EB}{EC}\,\frac{FC}{FA} = -1$$



# 10.Beweis des Satzes von Ceva

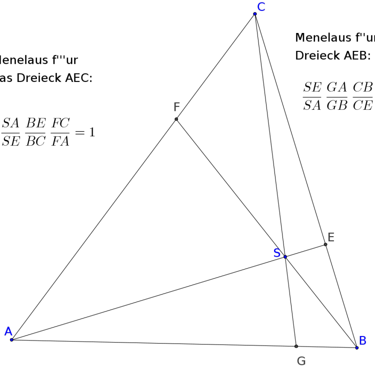
Angenommen es gibt einen Schnittpunkt S.

Menelaus f'''ur
das Dreieck AEC:

$$\frac{SA}{SE}\frac{BE}{BC}\frac{FC}{FA} = 1$$

Menelaus f''ur das
Dreieck AEB:

$$\frac{SE}{SA}\frac{GA}{GB}\frac{CB}{CE} = 1$$



# 10.Beweis des Satzes von Ceva

Wir nehmen an, dass sich die drei Geraden $AE$, $BF$, $AG$ in einem Punkt $S$ schneiden. Nach dem Satz von Menelaus folgt (siehe Abbildung):

$$\frac{SE}{SA}\frac{GA}{GB}\frac{CB}{CE} = 1, \qquad \frac{SA}{SE}\frac{BE}{BC}\frac{FC}{FA} = 1$$

Man multipliziert diese Gleichungen und beachtet, dass

$$\frac{BE}{BC}\frac{CB}{CE} = -\frac{BE}{CE} = -\frac{EB}{EC}. \quad \text{Dann folgt:}$$

$$\frac{GA}{GB}\frac{EB}{EC}\frac{FC}{FA} = -1.$$

**Proposition**

*Es sei $ABC$ ein Dreieck. Es sei $G$ der Mittelpunkt von $\overline{AB}$, es sei $E$ der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und es sei $F$ der Mittelpunkt von $\overline{CA}$.*

*Dann schneiden sich die Geraden $CG$, $AE$ und $BF$ in einem Punkt.*

**Proposition**

*Es sei $ABC$ ein Dreieck. Es sei $G$ der Mittelpunkt von $\overline{AB}$, es sei $E$ der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und es sei $F$ der Mittelpunkt von $\overline{CA}$.*

*Dann schneiden sich die Geraden $CG$, $AE$ und $BF$ in einem Punkt.*

In der Tat, alle drei Teilverhältnisse im $CM$-Quotienten sind gleich $-1$:

$$\frac{GA}{GB}\frac{EB}{EC}\frac{FC}{FA} = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1.$$

Die Seitenhalbierenden

$$\frac{GA}{GB}\,\frac{EB}{EC}\,\frac{FC}{FA} = -1$$