Elementare Geometrie Vorlesung 16

Thomas Zink

19.6.2017

1.Homothetien

Definition

Es sei E eine Ebene. Eine Homothetie $h : E \to E$ ist eine bijektive Abbildung, so dass

(1) *Wenn $a \subset E$ eine Gerade ist, so ist auch $h(a)$ eine Gerade.*

(2) *Die Geraden a und $h(a)$ sind, parallel.*

Definition

Es sei E eine Ebene. Eine Homothetie $h : E \to E$ ist eine bijektive Abbildung, so dass

(1) *Wenn $a \subset E$ eine Gerade ist, so ist auch $h(a)$ eine Gerade.*

(2) *Die Geraden a und $h(a)$ sind, parallel.*

Beispiel: Eine Translation $T : E \to E$ ist eine Homothetie. Eine Drehung $s : E \to E$ um 180^o ist eine Homothetie. Wenn $h_1, h_2 : E \to E$ Homothetien sind, so ist auch $h_2 \circ h_1 : E \to E$ eine Homothetie.

2.Zentrale Homothetien

Es sei $O \in E$ ein Punkt und es sei $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl. Wir definieren eine Abbildung:

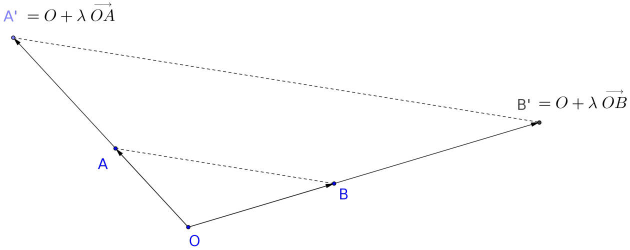
$$h(O,\lambda) : E \to E.$$

Es sei $A \in E$. Dann ist definieren wir:

$$h(O,\lambda)(A) := O + \lambda\overrightarrow{OA}. \tag{1}$$

D.h. wir verschieben den Punkt O um den Vektor $\lambda\overrightarrow{OA}$.

3.Zentrale Homothetien



A' = h(O,λ)(A)

B' = h(O,λ)(B)

4.Zentrale Homothetien

Wir schreiben $A' = h(O, \lambda)(A)$ und $B' = h(O, \lambda)(B)$. Dann gilt:

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}. \tag{2}$$

Wir können die Definitionsgleichung Blatt 2 schreiben:

$$A' = O + \lambda\overrightarrow{OA} \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}.$$

Die Gleichung:

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

erhält man nach dem Strahlensatz aus der Abbildung Blatt 3, oder alternativ durch Vektorrechnung:

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OB} - \lambda \overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

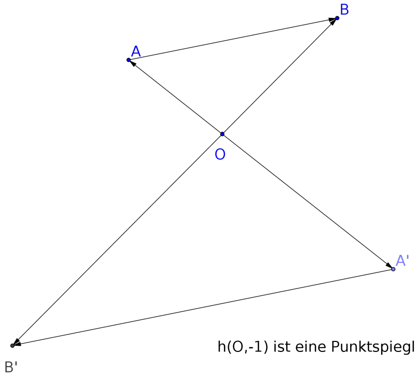
Insbesondere gilt:

$$|A'B'| = |\lambda||AB|. \tag{3}$$

Alle Längen werden bei $h(O, \lambda)$ um den gleichen Faktor $|\lambda|$ vergrößert.

6.Zentrale Homothetien

$\lambda < 0$



h(O,-1) ist eine Punktspieglung.

7.Hauptsatz über Homothetien

Die Gleichung (2) zeigt, dass AB und $A'B'$ parallel sind. Also ist eine zentrale Homothetie eine Homothetie im Sinne der Definition Blatt 1. Aus der Gleichung folgt auch, dass eine Homothetie eine affine Abbildung ist.

7.Hauptsatz über Homothetien

Die Gleichung (2) zeigt, dass AB und $A'B'$ parallel sind.
Also ist eine zentrale Homothetie eine Homothetie im Sinne der Definition Blatt 1. Aus der Gleichung folgt auch, dass eine Homothetie eine affine Abbildung ist.

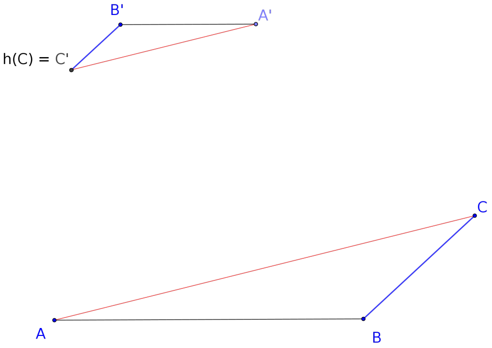
Proposition

Es seien $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ zwei Strecken in der Ebene E, so dass $A \neq B$ und $A' \neq B'$. Wenn die beiden Strecken parallel sind, so gibt es genau eine Homothetie $h : E \to E$, so dass $h(A) = A'$ und $h(B) = B'$.

8.Beweis

Wir zeigen zuerst, dass es höchstens eine Homothetie gibt. Es sei $C \notin AB$. Der Punkt $h(C)$ muss auf der Parallele zu AC durch den Punkt A' liegen und auf der Parallele zu BC durch B'. Also ist $h(C)$ als Schnittpunkt dieser Parallelen eindeutig bestimmt.

9.Beweis



10.Beweis

Wir zeigen jetzt, dass h existiert.

Wenn $ABB'A'$ ein Parallelogramm ist, so ist $h = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ die gewünschte Homothetie.
Sonst schneiden sich die Geraden AA' und BB' in einem Punkt O.
Dann gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \lambda.$$

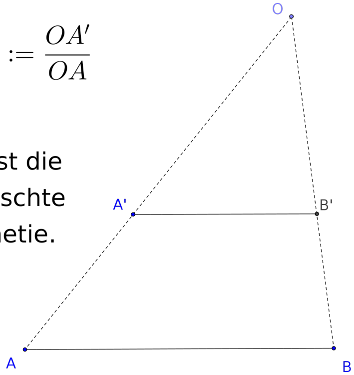
Das bedeutet

$$\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB'} = \lambda\overrightarrow{OB}$$

11.Beweis

$$\lambda := \frac{OA'}{OA}$$

h(O,λ) ist die gew''unschte Homothetie.



Folgerung

Es sei $h : E \to E$ eine Homothetie. Dann ist h eine Translation oder eine zentrale Homothetie.

Folgerung

Es sei $h : E \to E$ eine Homothetie. Dann ist h eine Translation oder eine zentrale Homothetie.

Beweis: Wir wählen $A, B \in E$, so dass $A \neq B$. Es sei $A' = h(A)$ und $B' = h(B)$. Wir haben bewiesen, dass eine zentrale Homothetie oder eine Tranlation h_1 existiert, so dass $h_1(A) = A'$ und $h_1(B) = B'$. Nach der Eindeutigkeitsaussage der Proposition Blatt 7 gilt $h = h_1$. $Q.E.D.$

13. Homothetien sind Vergrößerungen

Eine Homothetie h verlängert (oder verkürzt) alle Strecken um den gleichen Faktor (siehe Blatt 5). Man kann zu einer Homothetie auch Vergrößerung sagen. Wir nennen den Vergrößerungsfaktor m_h.

$$|h(A)h(B)| = m_h|AB|.$$

Der Vergrößerungsfaktor einer Translation ist 1 und der Vergrößerungsfaktor der zentralen Homothetie $h(O, \lambda)$ ist $|\lambda|$

14.Das Bild von Kreisen

Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

$$\mathcal{K} = \{P \in E \mid |PM| = r\}.$$

Wenn h eine Homothetie ist, so gilt

$$|h(P)h(M)| = m_h|PM| = m_h r.$$

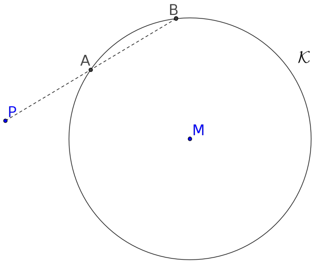
Also ist das Bild $h(\mathcal{K})$ der Kreis mit dem Mittelpunkt $h(M)$ und dem Radius $m_h r$.

15.Sekante an einen Kreis

Aufgabe: Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und es sei P ein Punkt außerhalb des Kreises. Man zeichne eine Sekante s durch den Punkt P an den Kreis, so dass für die beiden Schnittpunkte $\{A, B\} = s \cap \mathcal{K}$ gilt:

$$|PB| = 2|PA|.$$

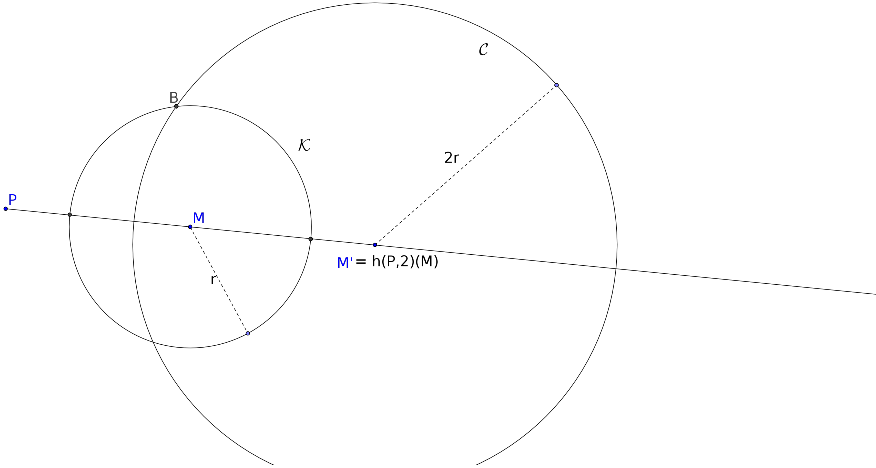
16.Sekante an einen Kreis



17.Sekante an einen Kreis

Lösung: Wir betachten die Homothetie $h(P, 2)$. Die Gleichung $h(P, 2)(A) = B$ soll gelten. Also muss B auf dem Kreis $\mathcal{C} = h(P, 2)(\mathcal{K})$ liegen. Dieser Kreis hat den doppelten Radius von $\mathcal{K}$ und den Mittelpunkt $h(2, P)(M)$.

18.Sekante an einen Kreis



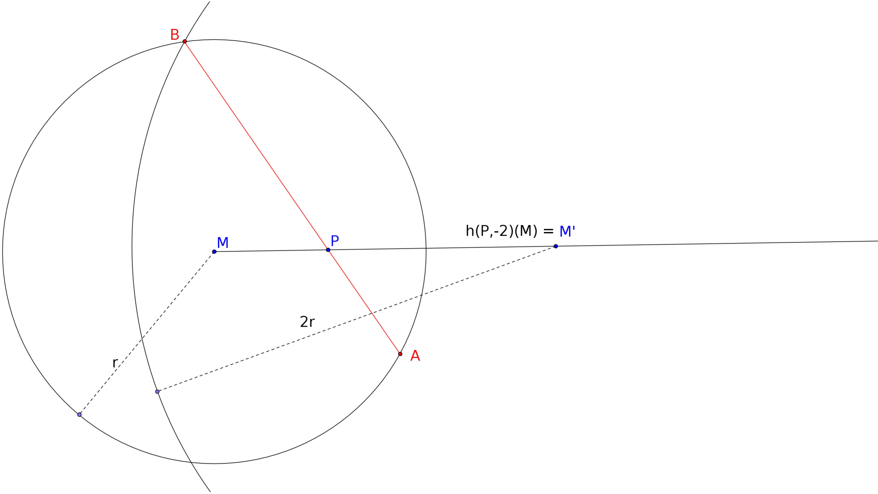
19. Sekante an einen Kreis

Aufgabe: Die gleiche Aufgabe wie auf Blatt 15, wenn P innerhalb der Kreises $\mathcal{K}$ liegt. Man zeichne also eine Sekante durch P, so dass

$$|PB| = 2|PA|.$$

Lösung: In diesem Fall, soll $h(P,-2)(A) = B$ gelten.

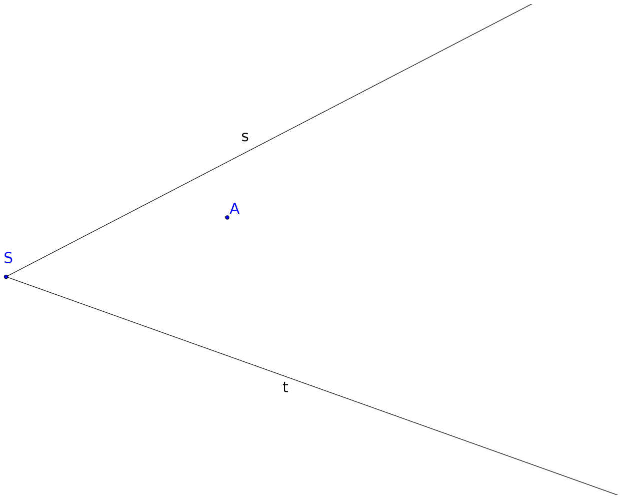
20.Sekante an einen Kreis



21. Kreis durch Punkte und tangential zu Geraden

Aufgabe: Es seien s und t zwei Strahlen, die von einem Punkt S ausgehen. Es sei A ein Punkt der zwischen den beiden Strahlen liegt.
Man konstruiere einen Kreis $\mathcal{K}$, der durch A geht und der die Strahlen s und t als Tangenten hat.

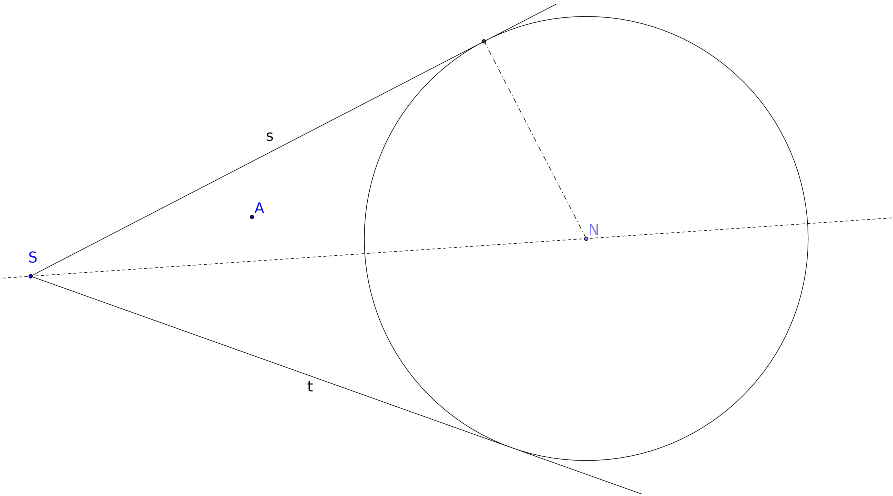
22. Kreis durch Punkte und tangential zu Geraden



23. Kreis durch Punkte und tangential zu Geraden

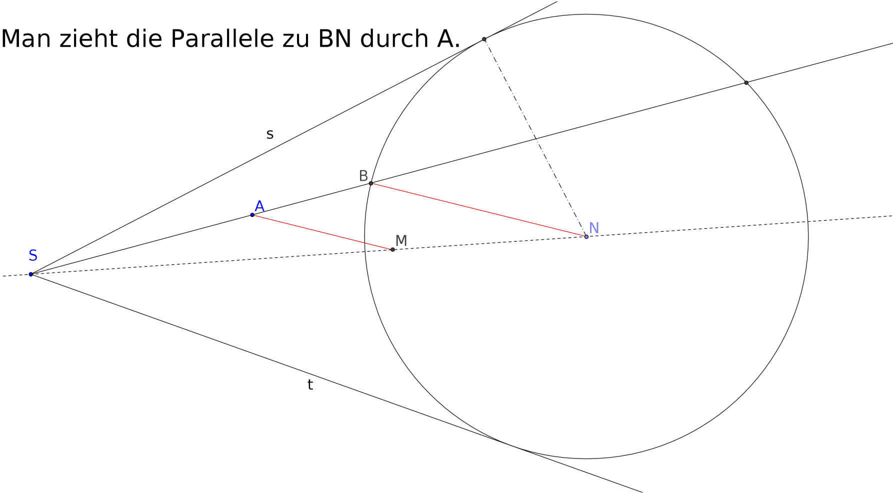
Man zeichnet einen beliebigen Kreis, der s und t als Tangenten hat. Sein Mittelpunkt N muss auf der Winkelhalbierenden von s und t liegen. Man wählt einen Schnittpunkt B dieses Kreises mit der Geraden SA.
Es sei h die zentrale Homothetie mit dem Zentrum S, so dass $h(B) = A$. Dann ist $h(N) = M$ der Mittelpunkt des gesuchten Kreises $\mathcal{K}$.

24. Kreis durch Punkte und tangential zu Geraden



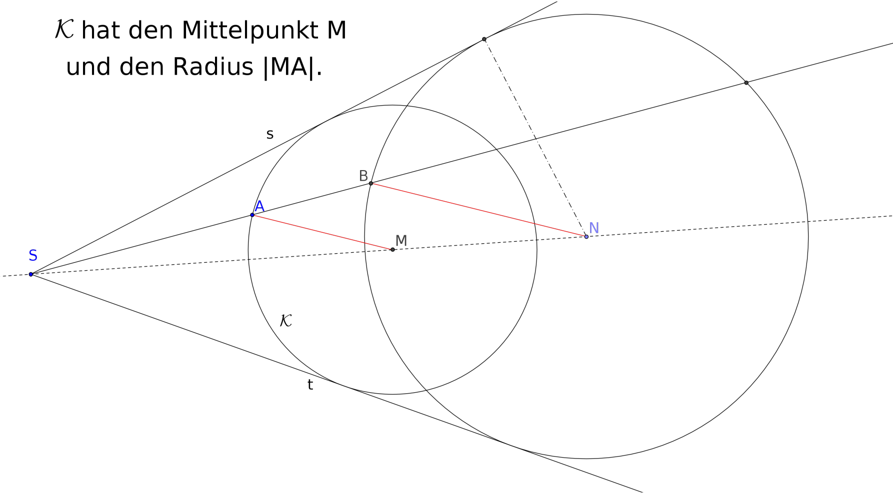
25. Kreis durch Punkte und tangential zu Geraden

Man zieht die Parallele zu BN durch A.



26. Kreis durch Punkte und tangential zu Geraden

$\mathcal{K}$ hat den Mittelpunkt M
und den Radius |MA|.



27. Homothetien erhalten geometrische Winkel

Proposition

Es sei $h : E \to E$ *eine Homothetie. Es seien* s *und* t *zwei Strahlen. Dann gilt für die geometrischen Winkel*

$$\angle(h(s), h(t)) = \angle(s, t). \tag{4}$$

Wir führen den Beweis, wenn s und t einen gemeinsamen Anfangspunkt S haben. Wenn h eine Homothetie mit dem Fixpunkt S ist, ist (4) klar.

Wir führen den Beweis, wenn s und t einen gemeinsamen Anfangspunkt S haben. Wenn h eine Homothetie mit dem Fixpunkt S ist, ist (4) klar.

Im allgemeinen betrachten wir die Translation T, so dass $T(h(S)) = S$. Weil $T \circ h$ eine Homothetie mit dem Fixpunkt S ist, folgt:

$$\angle(s, t) = \angle(T(h(s)), T(h(t)) = \angle(h(s), h(t)).$$

29. Beispiel für eine Homothetie

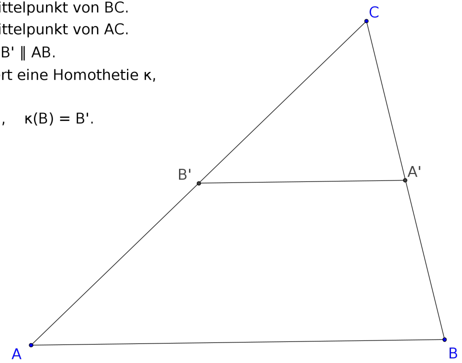
Es sei ABC ein Dreick. Es sei A' der Mittelpunkt von $\overline{BC}$, B' der Mittelpunkt von $\overline{AC}$, C' der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.
Dann gibt es eine Homothetie κ, so dass

$$\kappa(A) = A', \quad \kappa(B) = B' \quad \kappa(C) = C'.$$

30. Beispiel für eine Homothetie

A' sei der Mittelpunkt von BC.
B' sei der Mittelpunkt von AC.
Dann gilt A'B' ∥ AB.
Also existiert eine Homothetie κ,
so dass

$$\kappa(A) = A', \quad \kappa(B) = B'.$$



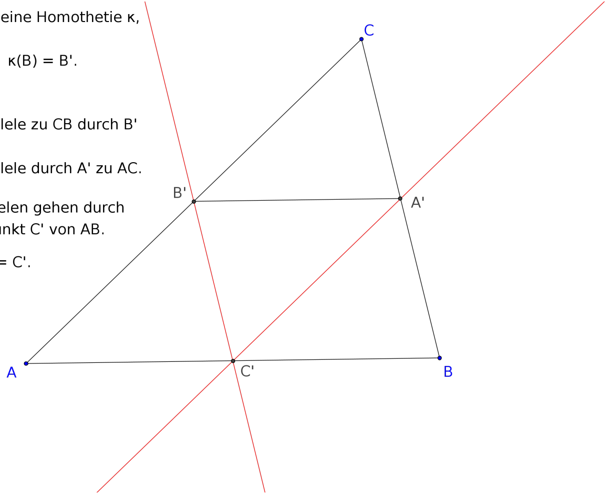
31. Beispiel für eine Homothetie

Also existiert eine Homothetie κ, so dass
$\kappa(A) = A'$, $\kappa(B) = B'$.

$\kappa(C)$ liegt
auf der Parallele zu CB durch B'
und
auf der Parallele durch A' zu AC.

Beide Parallelen gehen durch den Mittelpunkt C' von AB.

Also: $\kappa(C) = C'$.



32. Beispiel für eine Homothetie

Der Fixpunkt S von κ muss auf jeder der Geraden AA', BB' und CC'. Folglich schneiden sich diese Geraden (= Seitenhalbierende) in einem Punkt S.

Man hat nach dem 2.Strahlensatz:

$$\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Also gilt

$$\kappa = h(S, -\frac{1}{2}).$$

33. Beispiel für eine Homothetie

Insbesondere gilt:

$$|SA'| = \frac{1}{2}|SA|.$$

33. Beispiel für eine Homothetie

Insbesondere gilt:

$$|SA'| = \frac{1}{2}|SA|.$$

Es sei h_A das Lot von A auf die Gerade BC. Das ist eine Höhe. Die Gerade $\kappa(h_A)$ geht durch A' und ist nach Definition einer Homothetie parallel zu h_A.
Deshalb steht diese Gerade senkrecht auf BC. Also gilt:

33. Beispiel für eine Homothetie

Insbesondere gilt:

$$|SA'| = \frac{1}{2}|SA|.$$

Es sei h_A das Lot von A auf die Gerade BC. Das ist eine Höhe. Die Gerade $\kappa(h_A)$ geht durch A' und ist nach Definition einer Homothetie parallel zu h_A.
Deshalb steht diese Gerade senkrecht auf BC. Also gilt:

$\kappa(h_A) = m_{A'}$ ist die Mittelsenkrechte von $\overline{BC}$.

34. Beispiel für eine Homothetie

Die Mittelsenkrechten schneiden sich im Mittelpunkt M des Umkreises.
Der Punkt $H = \kappa^{-1}(M)$ liegt auf allen Höhen und ist daher deren gemeinsamer Schnittpunkt.

$$M = h(S, -\frac{1}{2})(H).$$

Deshalb liegen H, S, M auf einer Geraden und es gilt:

$$|SM| = \frac{1}{2}|SH|.$$

35. Beispiel für eine Homothetie