Elementare Geometrie Vorlesung 17

Thomas Zink

21.6.2017

1.Ähnlichkeiten

Definition

Eine Ähnlichkeit $f : E \to E$ *ist eine bijektive Abbildung, so dass*

(1) *Wenn* $a \subset E$ *eine Gerade ist, so ist auch* $f(a)$ *eine Gerade.*

(2) *Es gibt eine Konstante* $m > 0.$ *so dass für alle Punkte* $A, B \in E$

$$|f(A)f(B)| = m|AB|$$

1.Ähnlichkeiten

Definition

Eine Ähnlichkeit $f : E \to E$ ist eine bijektive Abbildung, so dass

(1) *Wenn $a \subset E$ eine Gerade ist, so ist auch $f(a)$ eine Gerade.*

(2) *Es gibt eine Konstante $m > 0$. so dass für alle Punkte $A, B \in E$*

$$|f(A)f(B)| = m|AB|$$

Es sei f eine Ähnlichkeit. Es sei ABC ein Dreieck. Dann gilt:

$$\angle ABC = \angle f(A)f(B)f(C).$$

2.Winkeltreue von Ähnlichkeiten

Beweis: Wir wählen einen Punkt $O \in E$. Es sei $h = h(O, m)$ die Homothetie. Dann gilt:

$$\begin{gathered} |h(A)h(B)| = m|AB| = |f(A)f(B)|, \\ |h(B)h(C)| = m|BC| = |f(B)f(C)|, \\ |h(C)h(A)| = m|CA| = |f(C)f(A)| \end{gathered}$$

2.Winkeltreue von Ähnlichkeiten

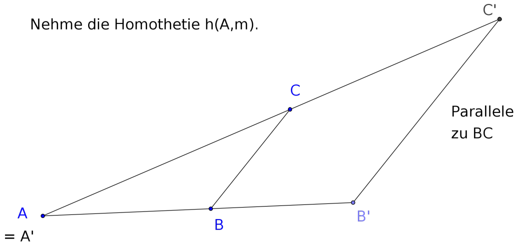
Beweis: Wir wählen einen Punkt $O \in E$. Es sei $h = h(O, m)$ die Homothetie. Dann gilt:

$$
\begin{gathered}
|h(A)h(B)| = m|AB| = |f(A)f(B)|, \\
|h(B)h(C)| = m|BC| = |f(B)f(C)|, \\
|h(C)h(A)| = m|CA| = |f(C)f(A)|
\end{gathered}
$$

Nach (SSS) sind die beiden Dreiecke $h(A)h(B)h(C)$ und $f(A)f(B)f(C)$ kongruent und haben daher die gleichen Winkel. Da wir bereits wissen, dass $h(A)h(B)h(C)$ und ABC die gleichen Winkel haben, folgt die Behauptung.

3.Winkeltreue von Ähnlichkeiten

Nehme die Homothetie h(A,m).



|A' B'| = m |AB|, |A'C'| = m |AC|, |B'C'| = m |BC|

A'B'C' hat die gleichen Winkel wie ABC.
A'B'C' ist kongruent zu f(A) f(B) f(C).

4.Winkeltreue von Ähnlichkeiten

Wir können auch so argumentieren: Es sei $u := h(O, m^{-1}) \circ f$.
Dann gilt:

$$|u(A)u(B)| = m^{-1}|f(A)f(B)| = m^{-1} \cdot m|AB| = |AB|.$$

Also ist u eine Isometrie.

$$h(O, m) \circ u = h(O, m) \circ h(O, m^{-1}) \circ f = f.$$

Proposition

Es sei f eine Ähnlichkeit. Dann gibt es eine Isometrie u und eine Homothetie h, so dass

$$f = h \circ u.$$

5.Winkeltreue von Ähnlichkeiten

Folgerung

Eine Ähnlichkeit f ist eine affine Abbildung. Wenn $s, t \in E$ zwei Strahlen sind, so gilt

$$\angle(f(s)f(t)) = \angle(s, t)$$

5.Winkeltreue von Ähnlichkeiten

Folgerung

Eine Ähnlichkeit f ist eine affine Abbildung. Wenn $s, t \in E$ zwei Strahlen sind, so gilt

$$\angle(f(s)f(t)) = \angle(s, t)$$

Beweis: Man hat $f = h \circ u$. Da u und h affin sind ist auch f affin. Es sei $s' = u(s)$, $t' = u(t)$. Da die Isometrie u geometrische Winkel erhält, gilt $\angle(s', t') = \angle(s, t)$.

$$\angle(f(s)f(t)) = \angle(h(s'), h(t')) = \angle(s', t') = \angle(s, t).$$

6.Ähnliche Dreiecke

Definition

Zwei Dreiecke ABC *und* $A'B'C'$ *in der Ebene* E *heißen ähnlich, wenn es eine Ähnlichkeit* $f : E \to E$ *gibt, so dass*

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C',$$

Die Ähnlichkeit f ist durch die Dreiecke eindeutig bestimmt. In der Tat, weil f eine affine Abbildung ist, ist f eindeutig bestimmt, wenn man $f(A), f(B), f(C)$ für drei Punkte A, B, C kennt, die nicht auf einer Geraden liegen.

7.Ähnlichkeitssatz $S : S : S$

Es sei ABC ein Dreieck. Wir verabreden die folgenden Bezeichnungen:

$$a = |BC|, \quad b = |CA|, \quad c = |AB|.$$

Proposition

($S : S : S$) Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke in der Ebene E. Es sei

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \tag{1}$$

Dann sind die Dreiecke ähnlich.

8.Beweis $S : S : S$

Beweis: Es sei $m = \frac{a'}{a}$. Dann gilt: $a' = ma$, $b' = mb$, $c' = mc$. Es sei $O \in E$. Wir betrachten die Homothetie $h(O, m)$. Es sei $h(O, m)(A) = A_1$, $h(O, m)(B) = B_1$, $h(O, m)(C) = C_1$. Dann gilt $a_1 = ma = a'$, $b_1 = mb = b'$, $c_1 = mc = c'$.

8.Beweis $S:S:S$

Beweis: Es sei $m = \frac{a'}{a}$. Dann gilt: $a' = ma$, $b' = mb$, $c' = mc$. Es sei $O \in E$. Wir betrachten die Homothetie $h(O, m)$. Es sei $h(O, m)(A) = A_1$, $h(O, m)(B) = B_1$, $h(O, m)(C) = C_1$. Dann gilt $a_1 = ma = a'$, $b_1 = mb = b'$, $c_1 = mc = c'$.

Also sind die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A'B'C'$ kongruent. Dann existiert eine Isometrie $u : E \to E$, die das erste Dreieck auf das zweite abbildet. Die Ähnlichkeit $f = u \circ h(O, m)$ bildet ABC auf $A_1B_1C_1$ ab. $Q.E.D.$

9.Ähnlichkeitssatz $S : W : S$

Proposition

Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke in der Ebene E. Es sei

$$\angle CAB = \angle C'A'B', \quad \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \tag{2}$$

Dann sind die Dreiecke ähnlich.

9.Ähnlichkeitssatz $S : W : S$

Proposition

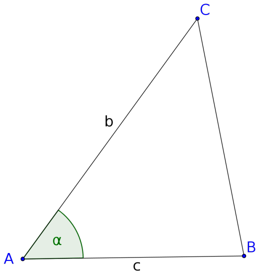
Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke in der Ebene E. Es sei

$$\angle CAB = \angle C'A'B', \quad \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \tag{2}$$

Dann sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis: Genauso. Man vergrößert ABC mit eine Homothetie, so dass $b = b'$ und dann $c = c'$. Dann wendet man SWS an.

10.Ähnlichkeitssatz $S : W : S$



α und (b/c) bestimmen das Dreieck
bis auf ''Ahnlichkeit.

11. Ähnlichkeitssatz WWW

Proposition

Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke in der Ebene E. Es sei

$$\angle CAB = \angle C'A'B', \quad \angle ABC = \angle A'B'C', \quad \angle BCA = \angle B'C'A',. \tag{3}$$

Dann sind die Dreiecke ähnlich.

11. Ähnlichkeitssatz WWW

Proposition

Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke in der Ebene E. Es sei

$$\angle CAB = \angle C'A'B', \quad \angle ABC = \angle A'B'C', \quad \angle BCA = \angle B'C'A',. \tag{3}$$

Dann sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis: Man wendet auf ABC eine Homothetie an, so dass $a = a'$. Dann wendet man WSW an.

12. Ähnlichkeitssatz für rechtwinklige Dreiecke

Proposition

Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke in der Ebene E, so dass bei C bzw. C' jeweils ein rechter Winkel liegt. Es sei

$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \tag{4}$$

Dann sind die Dreiecke ähnlich.

12. Ähnlichkeitssatz für rechtwinklige Dreiecke

Proposition

Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke in der Ebene E, so dass bei C bzw. C' jeweils ein rechter Winkel liegt. Es sei

$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \tag{4}$$

Dann sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis: Nach Anwendung einer Homothetie, kann man $b = b'$ und dann $c = c'$ annehmen. Die Behauptung folgt aus dem Kongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke. (Vorlesung 10, Blatt 12).

13.Das Bild von Flächen bei Ähnlichkeiten

Es sei ABC ein Dreieck. Es sei h_C die Länge der Höhe von C auf AB. Dann gilt:

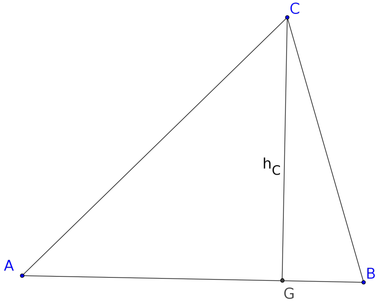
$$\text{Fläche } ABC = \frac{1}{2} h_C |AB|.$$

Proposition

Es sei $f : E \to E$ eine Ähnlichkeit mit dem Vergrößrungsfaktor m. (siehe Blatt 1). Es sei ABC ein Dreieck. Dann gilt:

$$\textit{Fläche } f(A)f(B)f(C) = m^2 \textit{Fläche } ABC. \tag{5}$$

14.Flächeninhalt von Dreiecken

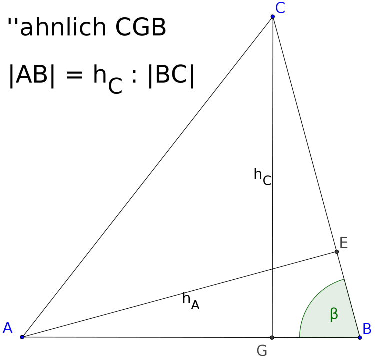


Fl''ache ABC = (1/2) h_c |AB|.

15.Flächeninhalt von Dreiecken

AEB ''ahnlich CGB

$h_A : |AB| = h_C : |BC|$



$(1/2)\ h_C\ |AB| = (1/2)\ h_A\ |BC|$

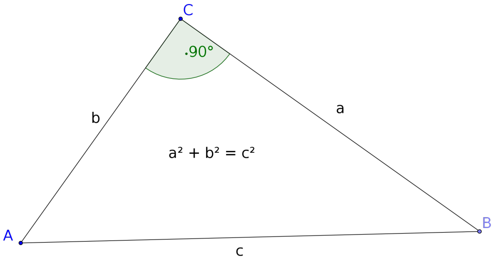
16. Das Bild von Flächen bei Ähnlichkeiten

Beweis: Es sei F der Fußpunkt der Höhe von C aus. Dann gilt $f(F) \in f(A)f(B)$. Da f Winkel erhält steht $f(C)f(F)$ senkrecht auf $f(A)f(B)$. Also ist $f(C)f(F)$ die Höhe im Dreieck $f(A)f(B)f(C)$. Es gilt:

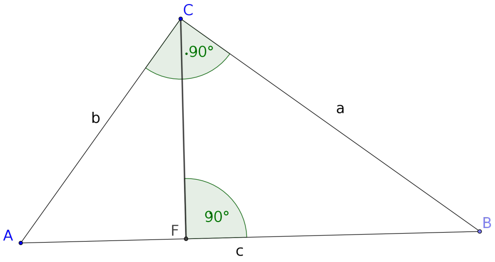
$$|f(A)f(B)| = m|AB|, \quad h_{f(C)} = |f(C)f(F)| = m|CF| = mh_C.$$

Daraus folgt (5).

17.Lehrsatz des Pythagoras



18.Zum Beweis des Pythagoras



19.Lehrsatz des Pythagoras

Proposition

Es sei ABC ein Dreieck mit einem rechten Winkel bei C. Es sei $c = |AB|$, $b = |CA|$, $a = |BC|$. Dann gilt

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Beweis: Es sei F der Fußpunkt der Höhe von C. Es gibt nach WWW eine Ähnlichkeit u, so dass

$$u(A) = A, \ u(C) = F, \ u(B) = C.$$

$$\text{Es gilt:} \quad |u(A)u(B)| = |AC| = \frac{|AC|}{|AB|}|AB| = \frac{b}{c}|AB|.$$

$m_u = (b/c)$ ist der Vergrößerungsfaktor der Ähnlichkeit u.

20. Beweis des Pythagoras

Wir erhalten

$$\text{Fläche}AFC = \left(\frac{b}{c}\right)^2 \text{Fläche}ACB$$

Wieder nach WWW gibt es eine Ähnlichkeit v, so dass

$$v(B) = B,\ v(C) = F,\ v(A) = C$$

Der Vergrößerungsfaktor von v ist $m_v = (a/c)$.

Fläche ABC = Fläche AFC+Fläche BFC = $(m_u^2+m_v^2)$FlächeABC

$$\text{Es folgt:}\quad 1 = m_u^2 + m_v^2 = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2.$$

21.Beweis des Pythagoras

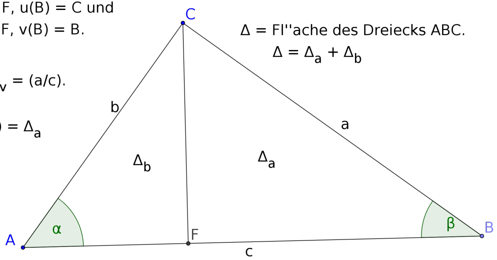
Es gibt nach WWW ''Ahnlichkeiten u und v, so dass
$u(A) = A$, $u(C) = F$, $u(B) = C$ und
$v(A) = C$, $v(C) = F$, $v(B) = B$.

Δ = Fl''ache des Dreiecks ABC.

$\Delta = \Delta_a + \Delta_b$

$m_u = (b/c)$, $m_v = (a/c)$.

$u(\Delta) = \Delta_b$, $v(\Delta) = \Delta_a$



$\Delta = \Delta_a + \Delta_b = (a/c)^2\Delta + (b/c)^2\,\Delta$

Also gilt: $1 = (a/c)^2 + (b/c)^2$

22.Die Potenz von Punkten bezüglich eines Kreises

Proposition

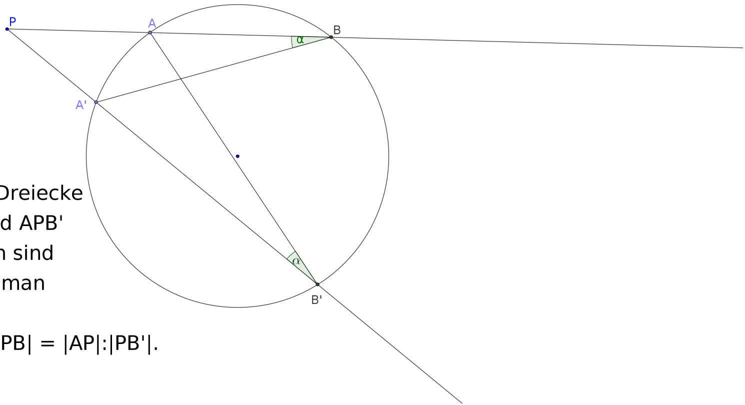
Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis und P ein Punkt der nicht auf dem Kreis liegt. Es seien g und g' zwei Geraden durch den Punkt P. Die Gerade g möge den Kreis in zwei verschiedenen Punkten A und B und die Gerade g' möge den Kreis in zwei verschiedenen Punkten A' und B' treffen. Dann gilt

$$|PA||PB| = |PA'||PB'|$$

Wenn P außerhalb von $\mathcal{K}$ liegt und t eine Tangente an den Kreis ist, die durch P geht und den Kreis in T berührt so gilt

$$|PA||PB| = |PT|^2.$$

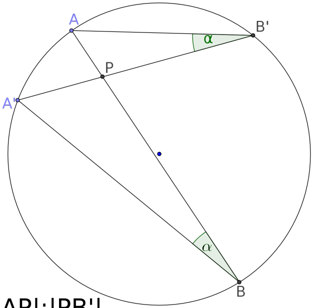
23.Potenz eines Punktes



Da die Dreiecke
A'PB und APB'
''ahnlich sind
erhaelt man

|A'P|:|PB| = |AP|:|PB'|.

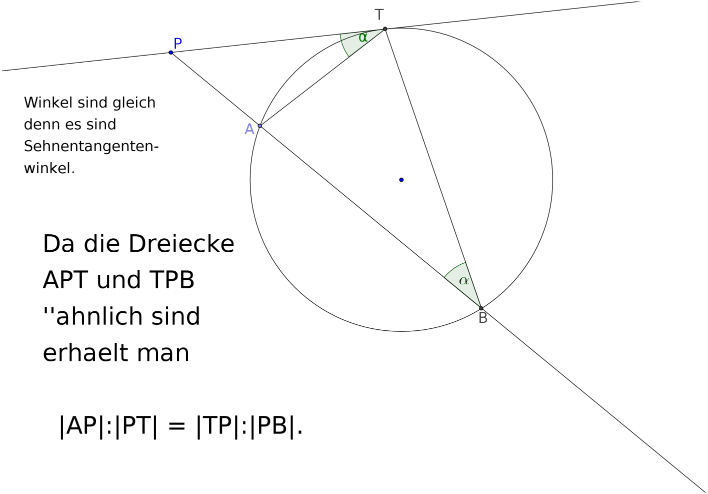
24.Potenz eines Punktes



Da die Dreiecke
A'PB und APB'
''ahnlich sind
erhaelt man

$$|A'P|:|PB| = |AP|:|PB'|.$$

25.Potenz eines Punktes



Winkel sind gleich
denn es sind
Sehnentangenten-
winkel.

Da die Dreiecke
APT und TPB
''ahnlich sind
erhaelt man

|AP|:|PT| = |TP|:|PB|.

26.Potenz eines Punktes

Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis und P ein Punkt. Wir legen eine beliebige Gerade durch P, die den Kreis in zwei Punkten A und B schneiden möge. Wir definieren

$$\text{Potenz}(P) = \begin{cases} |PA||PB|, \text{ wenn } P \text{ außerhalb von } \mathcal{K} \\ -|PA||PB|, \text{ wenn } P \text{ innerhalb von } \mathcal{K} \\ 0. \text{ wenn} P \in \mathcal{K}. \end{cases}$$