Elementare Geometrie Wiederholung 1

Thomas Zink

3.7.2017

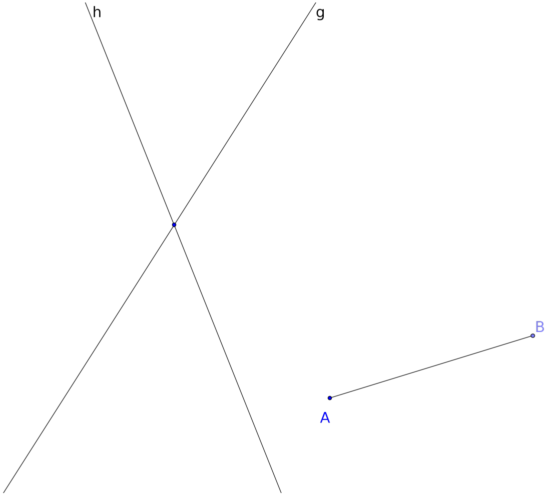
Parallelverschiebung, Aufgabe 1

Es seien g und h zwei Geraden. Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke.
Man zeichne eine Strecke $\overline{A_1B_1}$, die die beiden Geraden g und h verbindet und so dass $|AB| = |A_1B_1|$ und A_1B_1 zu AB parallel ist.

Parallelverschiebung, Aufgabe 1

Es seien g und h zwei Geraden. Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke.
Man zeichne eine Strecke $\overline{A_1B_1}$, die die beiden Geraden g und h verbindet und so dass $|AB| = |A_1B_1|$ und A_1B_1 zu AB parallel ist.

Es sei $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Es sei $B_1 = h \cap (g + \vec{u})$. Es sei $A_1 = B_1 - \vec{u}$.
Dann ist A_1B_1 eine L"osung.

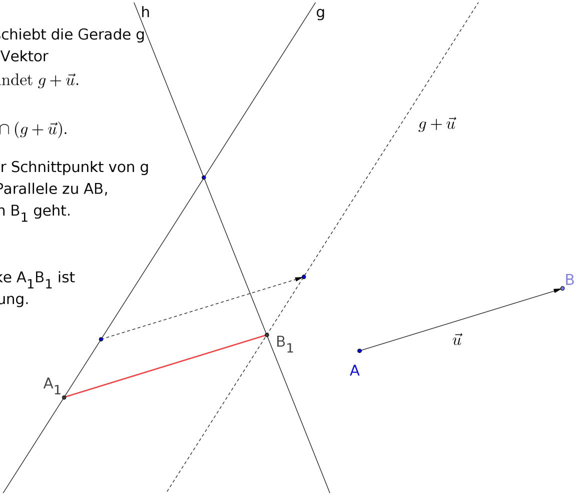

h
g
B
A

Man verschiebt die Gerade g mit dem Vektor $\vec{u}$. Man findet $g + \vec{u}$.

$$B_1 = h \cap (g + \vec{u}).$$

A_1 ist der Schnittpunkt von g mit der Parallele zu AB, die durch B_1 geht.

Die Strecke A_1B_1 ist eine L''osung.



2. Lösung der Aufgabe 1

Begründung: Es gibt einen Punkt $A' \in g$, so dass

$$A' + \vec{u} = B_1 \in g + \vec{u}.$$

Nach Definition von A_1 ist $A' = A_1$. Also ist $A_1 \in g$ und $B_1 \in h$, d.h. $\overrightarrow{A_1 B_1}$ verbindet g und h.

2. Lösung der Aufgabe 1

Begründung: Es gibt einen Punkt $A' \in g$, so dass

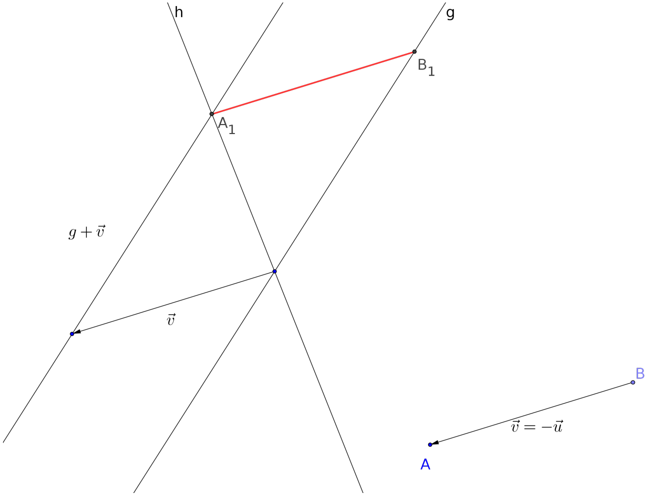
$$A' + \vec{u} = B_1 \in g + \vec{u}.$$

Nach Definition von A_1 ist $A' = A_1$. Also ist $A_1 \in g$ und $B_1 \in h$, d.h. $\overrightarrow{A_1B_1}$ verbindet g und h.

Da

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = \overrightarrow{A_1B_1},$$

sind beide Strecken gleichlang und parallel.


h
g
B_1
A_1
$g+\vec{v}$
$\vec{v}$
B
$\vec{v}=-\vec{u}$
A

3.Parallelverschiebung, Aufgabe 2

Gegeben seien zwei Kreise $\mathcal{K}$, $\mathcal{C}$ und eine Strecke $\overline{AB}$.
Man zeichne eine Strecke $\overline{A_1B_1}$, die beide Kreise verbindet und so dass die Strecken parallel sind und die Gleiche Länge haben.

3.Parallelverschiebung, Aufgabe 2

Gegeben seien zwei Kreise $\mathcal{K}$, $\mathcal{C}$ und eine Strecke $\overline{AB}$.
Man zeichne eine Strecke $\overline{A_1 B_1}$, die beide Kreise verbindet und so dass die Strecken parallel sind und die Gleiche Länge haben.

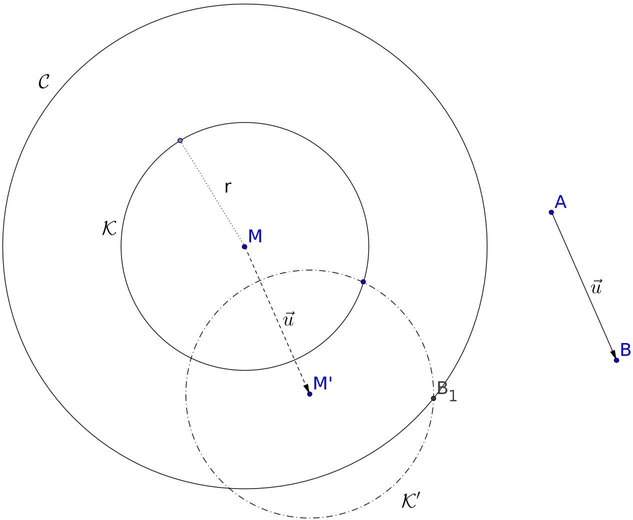
Man verschiebt $\mathcal{K}$ mit dem Vektor $u = \overrightarrow{AB}$ und erhält einen Kreis $\mathcal{K}'$. Dann kann man für B_1 jeden Schnittpunkt von $\mathcal{C} \cap \mathcal{K}'$ nehmen.

4.Lösung der Aufgabe 2

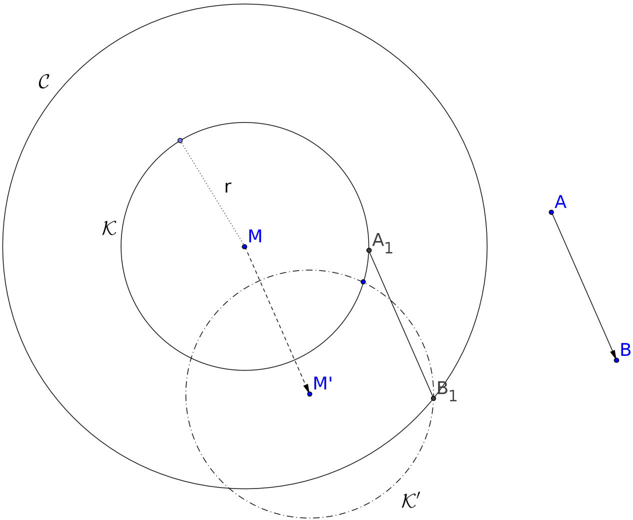
Begr"undung: Es muss einen Punkt $A_1 \in \mathcal{K}$ geben, so dass $A_1 + \vec{u} = B_1$. Da

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = \overrightarrow{A_1B_1},$$

hat die Strecke $\overline{A_1B_1}$ die gewünschten Eigenschaften.



$\mathcal{C}$
r
$\mathcal{K}$
M
$\vec{u}$
M'
B_1
$\mathcal{K}'$
A
$\vec{u}$
B

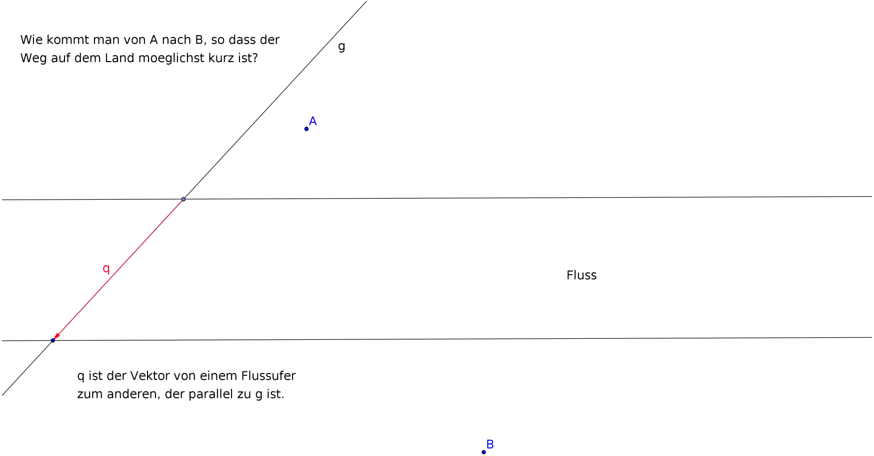


$\mathcal{C}$
r
$\mathcal{K}$
M
A_1
A
B
M'
B_1
$\mathcal{K}'$

5.Aufgabe: Flussüberquerung

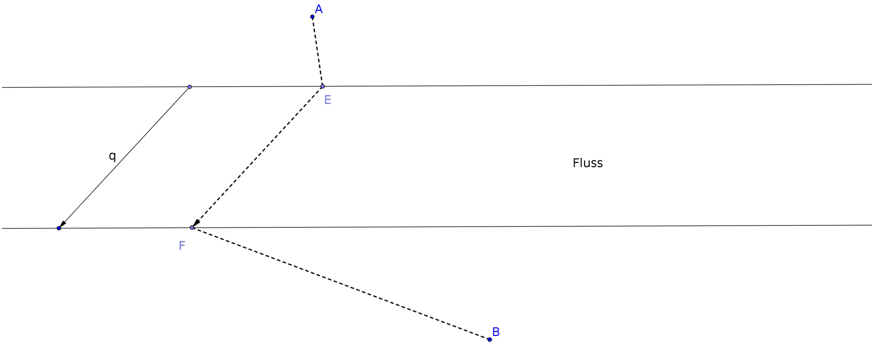
Zwischen den Punkten A und B liegt ein Fluss. Man möchte von A nach B, so dass die Strecke, die man auf dem Land zurücklegt möglichst kurz ist.
Bei der Überquerung des Flusses bewegt man sich wegen der Strömung auf einer Geraden, die parallel zu einer gegebenen Gerade g ist.
Welchen Weg muss man nehmen?

Wie kommt man von A nach B, so dass der Weg auf dem Land moeglichst kurz ist?



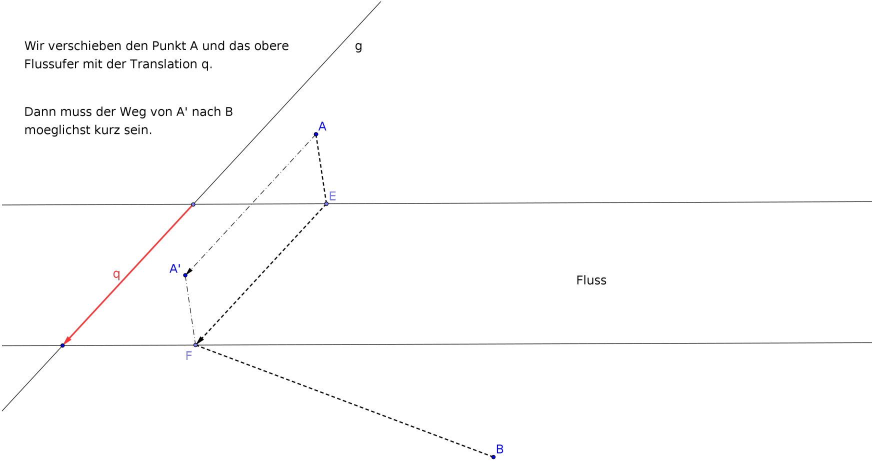
q ist der Vektor von einem Flussufer zum anderen, der parallel zu g ist.

Ein Beispielweg.



Wir verschieben den Punkt A und das obere Flussufer mit der Translation q.

Dann muss der Weg von A' nach B moeglichst kurz sein.



Lösung für die Flussüberquerung

Es sei $\vec{q}$ der Vektor, der parallel zu g ist und der das Flussufer auf der Seite von A in das Flussufer auf der Seite von B verschiebt. Seine Länge bezeichnen wir mit $|\vec{q}|$. Es sei

$$A' = A + \vec{q}$$

Lösung für die Flussüberquerung

Es sei $\vec{q}$ der Vektor, der parallel zu g ist und der das Flussufer auf der Seite von A in das Flussufer auf der Seite von B verschiebt. Seine Länge bezeichenen wir mit $|\vec{q}|$. Es sei

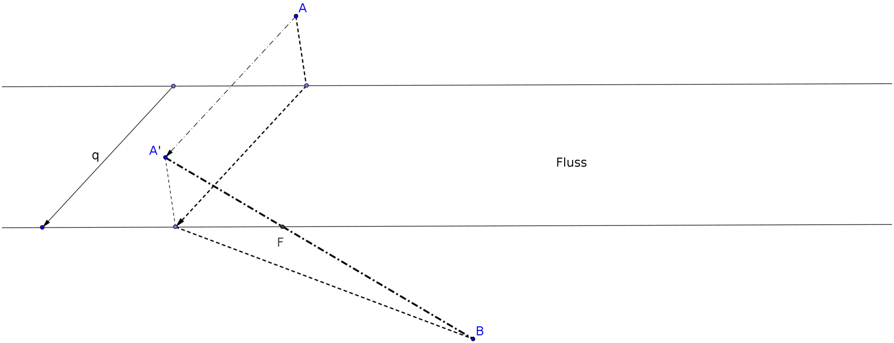
$$A' = A + \vec{q}$$

Es sei $AEFB$ beliebiger Weg, so dass E, F Punkte an den Flussufern sind und $\vec{q} = \overrightarrow{EF}$. Dann ist die Länge des Weges $AEFB$

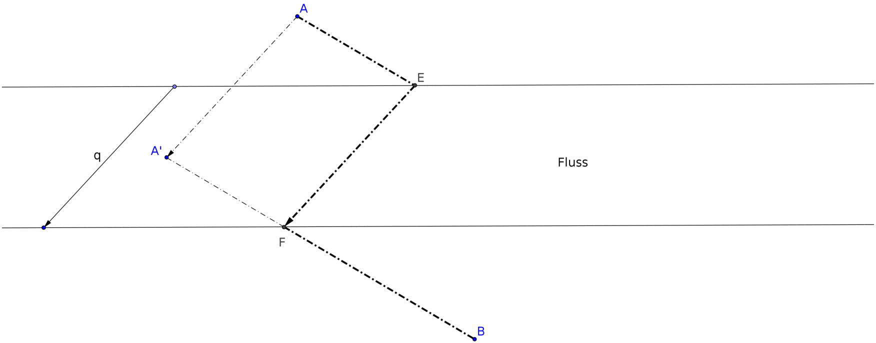
$$|\vec{q}| + |A'F| + |FB|.$$

Also erhält man den kürzesten Weg, wenn F auf $\overline{AB}$.

Den kuerzesten Weg erhalten wir, wenn
wir A' und B durch eine Strecke verbinden.



Der Landweg ist am kuerzesten, wenn
wir im Punkt F am anderen Ufer landen.



6. Aufgabe 3

Es seien g und h zwei Geraden und es sei P ein Punkt. Man konstruiere eine Gerade ℓ durch P, so dass für die Schnittpunkte $A = \ell \cap g$ und $B = \ell \cap h$ gilt:

$$3|PA| = |PB|.$$

6. Aufgabe 3

Es seien g und h zwei Geraden und es sei P ein Punkt. Man konstruiere eine Gerade ℓ durch P, so dass für die Schnittpunkte $A = \ell \cap g$ und $B = \ell \cap h$ gilt:

$$3|PA| = |PB|.$$

Es sei $h(P, 3)$ die zentrale Homothetie. Wenn man einen Punkt $A \in g$ und $B \in h$ findet, so dass

$$h(P, 3)(A) = B, \text{ d.h. } \overrightarrow{PB} = 3\overrightarrow{PA}.$$

so ist $\ell = AB$ eine Lösung.

7. Lösung der Aufgabe 3

$g_1 := h(3, P)(g)$ ist eine Parallele zu g, die B enthält, da $A \in g$. Also findet man $B = g_1 \cap h$. Die Gerade $\ell = PB$ ist die Lösung.

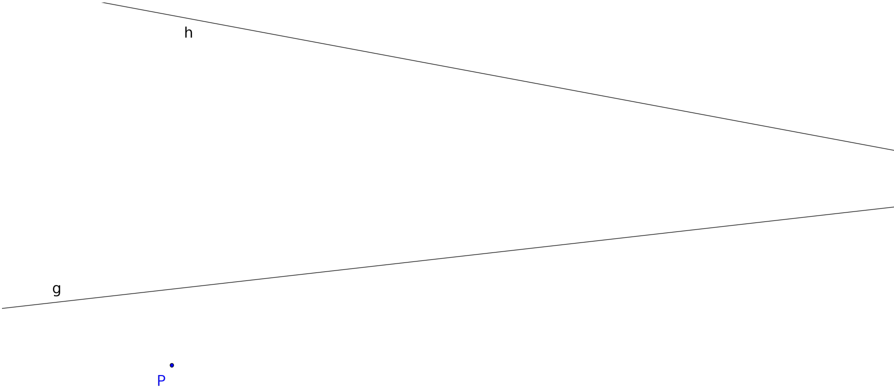
7. Lösung der Aufgabe 3

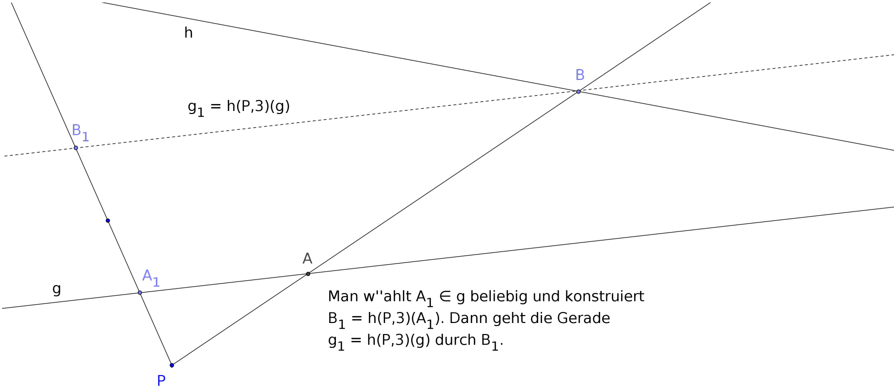
$g_1 := h(3, P)(g)$ ist eine Parallele zu g, die B enthält, da $A \in g$. Also findet man $B = g_1 \cap h$. Die Gerade $\ell = PB$ ist die Lösung.

Man kann auch A und B so suchen, dass

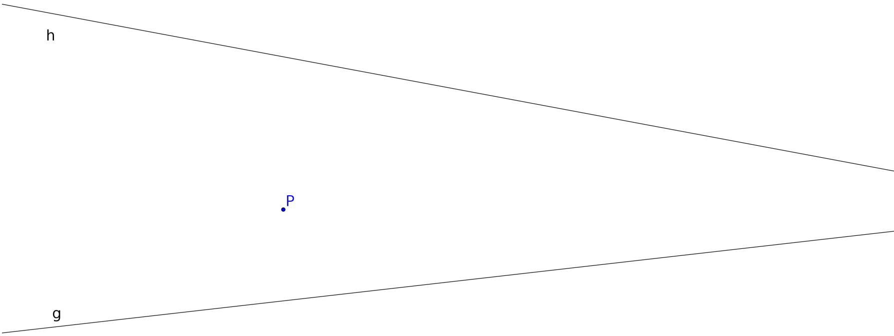
$$h(P, -3)(A) = B, \text{ d.h. } \overrightarrow{PB} = -3\overrightarrow{PA}.$$

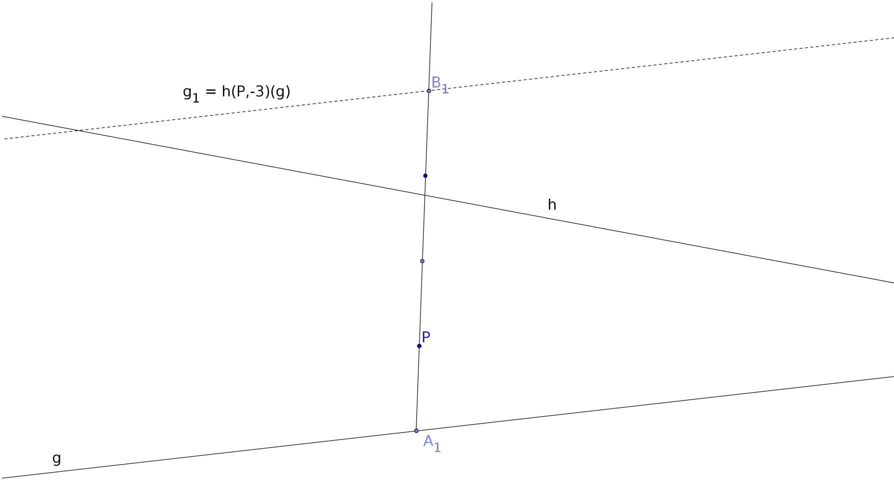
Wieder ist $\ell = AB$ eine Lösung.


h
g
P

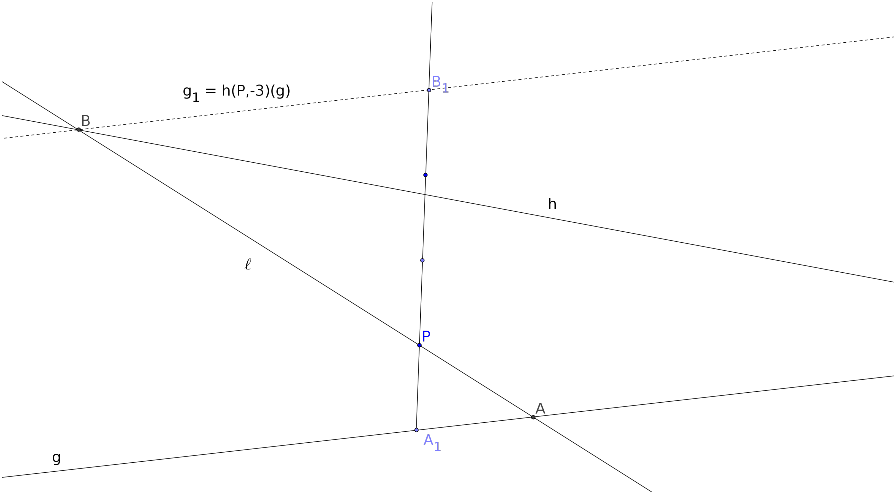


Man w''ahlt $A_1 \in g$ beliebig und konstruiert
$B_1 = h(P,3)(A_1)$. Dann geht die Gerade
$g_1 = h(P,3)(g)$ durch B_1.


h
P
g



g1 = h(P,-3)(g)
B1
h
P
A1
g



$g_1 = h(P,-3)(g)$
B_1
B
h
ℓ
P
A
A_1
g

8. Die Aufgabe 4

Es sei g eine Gerade und es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis. Es sei P ein Punkt. Man konstruiere eine Gerade ℓ durch P, so dass für den Schnittpunkt $A = \ell \cap g$ und einen Schnittpunkt $B \in \ell \cap \mathcal{K}$ gilt:

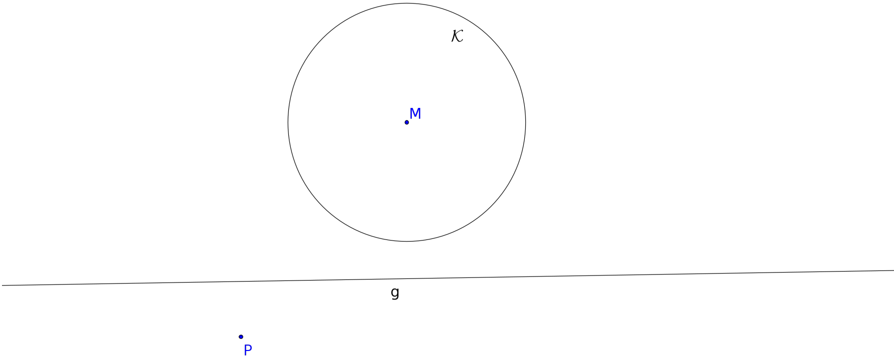
$$3|PA| = |PB|.$$

8. Die Aufgabe 4

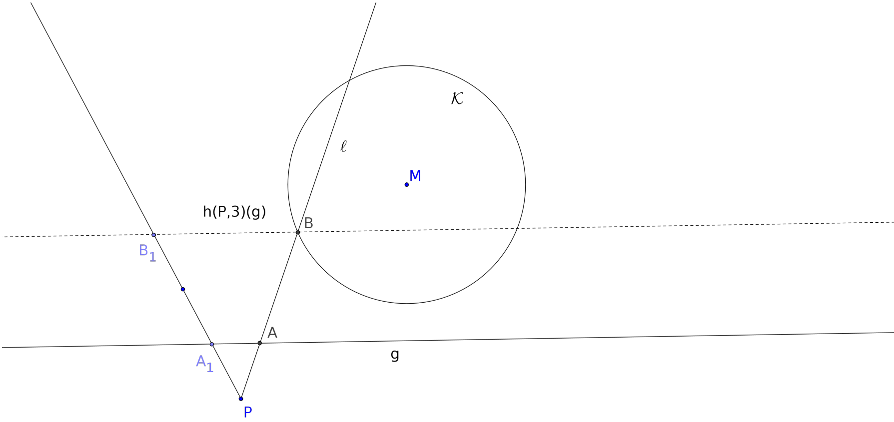
Es sei g eine Gerade und es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis. Es sei P ein Punkt. Man konstruiere eine Gerade ℓ durch P, so dass für den Schnittpunkt $A = \ell \cap g$ und einen Schnittpunkt $B \in \ell \cap \mathcal{K}$ gilt:

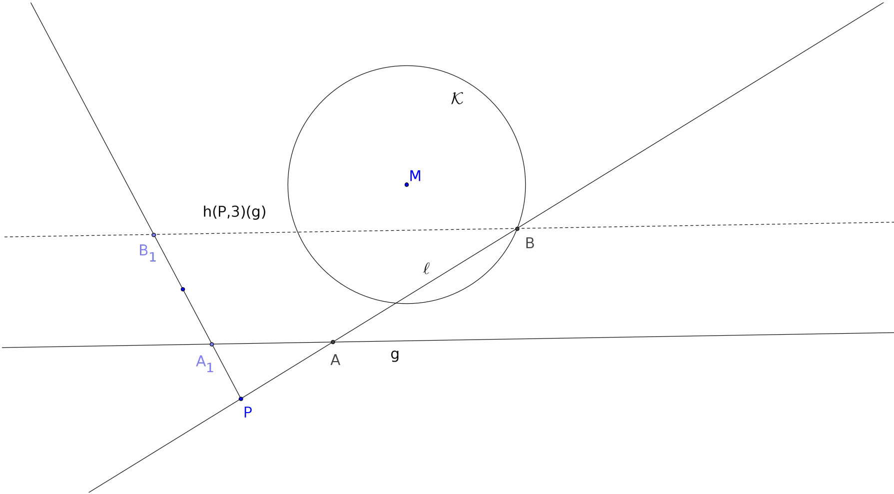
$$3|PA| = |PB|.$$

Lösung: Man konstruiert $g_1 = h(P, 3)(g)$ und erhält B als einen Schnittpunkt von g_1 mit $\mathcal{K}$. (Manchmal muss man $h(P, -3)$ benutzen.)



𝒦
M
g
P


$\mathcal{K}$
ℓ
M
h(P,3)(g)
B
B_1
A
A_1
g
P



𝒦
M
h(P,3)(g)
B
B_1
ℓ
A_1
A
g
P

9. Die Übung 9,3

Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis. Es sei P ein Punkt innerhalb des Kreises. Man lege durch P eine Gerade g, so dass für die beiden Schnittpunkte A, B von g und $\mathcal{K}$ gilt:

$$|PB| = 3|AP|.$$

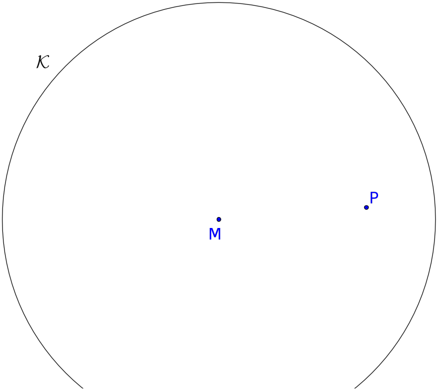
9. Die Übung 9,3

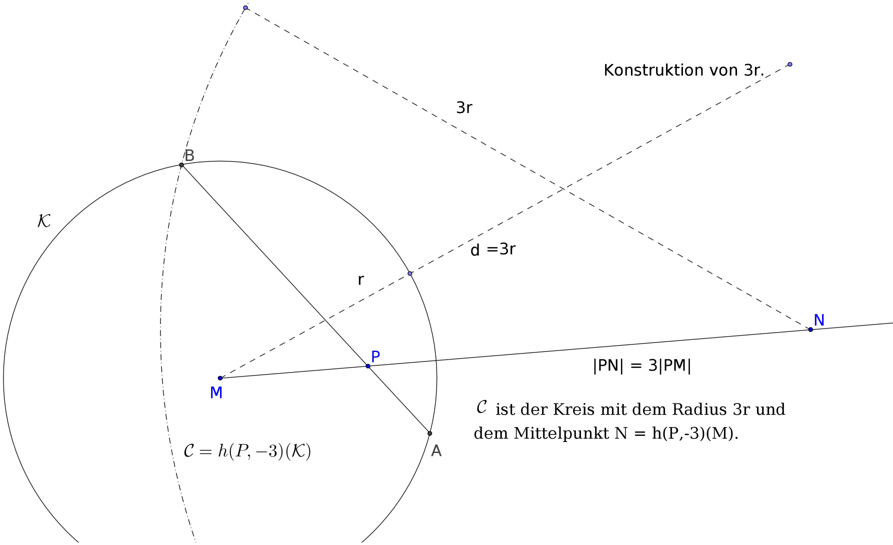
Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis. Es sei P ein Punkt innerhalb des Kreises. Man lege durch P eine Gerade g, so dass für die beiden Schnittpunkte A, B von g und $\mathcal{K}$ gilt:

$$|PB| = 3|AP|.$$

Lösung: Man sucht Punkte A, B auf dem Kreis $\mathcal{K}$, so dass $h(P, -3)(A) = B$. Es muss gelten $B \in h(P, -3)(\mathcal{K}) \cap \mathcal{K}$. Man konstruiert einen Schnittpunkt der letzten beiden Kreise und nennt ihn B. Die gesuchte Gerade ist PB.

Aufgabe 3




Konstruktion von 3r.
3r
B
$\mathcal{K}$
d =3r
r
N
P
|PN| = 3|PM|
M
$\mathcal{C}$ ist der Kreis mit dem Radius 3r und dem Mittelpunkt N = h(P,-3)(M).
A
$\mathcal{C} = h(P, -3)(\mathcal{K})$

10.Die Konstruktion von einem Trapez

Vorlesung 3, Blatt 4: Die Konstruktion von einem Trapez.