Elementare Geometrie Wiederholung 2

Thomas Zink

5.7.2017

1.Drehung, Aufgabe 1

Es sei E eine Ebene. Es seien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei Strecken in E, so dass $|AB| = |CD|$. Dann gibt es genau eine Bewegung $f : E \to E$, so dass

$$f(A) = C, \quad f(B) = D.$$

Man entscheide, ob f eine Drehung ist. Wenn das so ist, konstruiere man den Fixpunkt und den Drehwinkel.

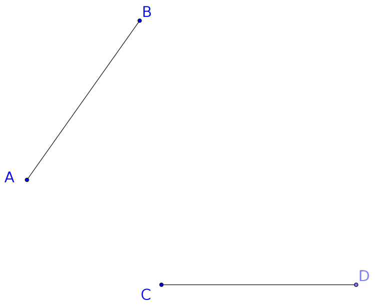
2.Drehung, Aufgabe 1

Die Bewegung $f \neq \mathrm{id}$ ist eine Drehung, wenn sich die Mittelsenkrechten m_{AC} von $\overline{AC}$ und m_{BD} von $\overline{BD}$ genau in einem Punkt Z schneiden. Das ist der Fixpunkt von f.

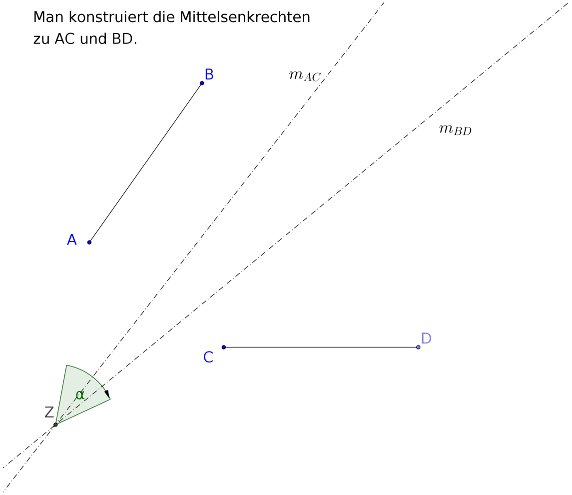
2.Drehung, Aufgabe 1

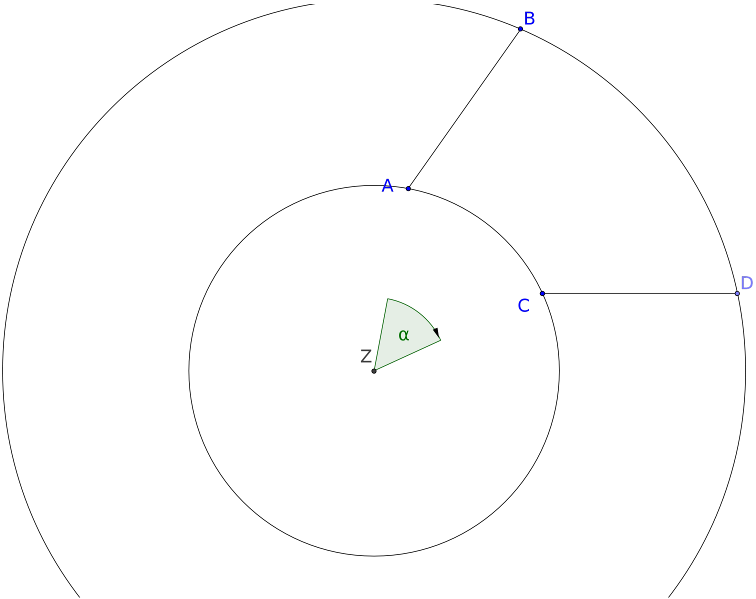
Die Bewegung $f \neq \mathrm{id}$ ist eine Drehung, wenn sich die Mittelsenkrechten m_{AC} von $\overline{AC}$ und m_{BD} von $\overline{BD}$ genau in einem Punkt Z schneiden. Das ist der Fixpunkt von f.

In der Tat, wenn f keine Drehung wäre, so wäre es eine Parallelverschiebung. Dann wäre $ABDC$ ein Parallelogramm und folglich wären die Mittelsenkrechten parallel.
Also ist f eine Drehung und der Fixpunkt Z liegt dann auf den Mittelsenkrechten.

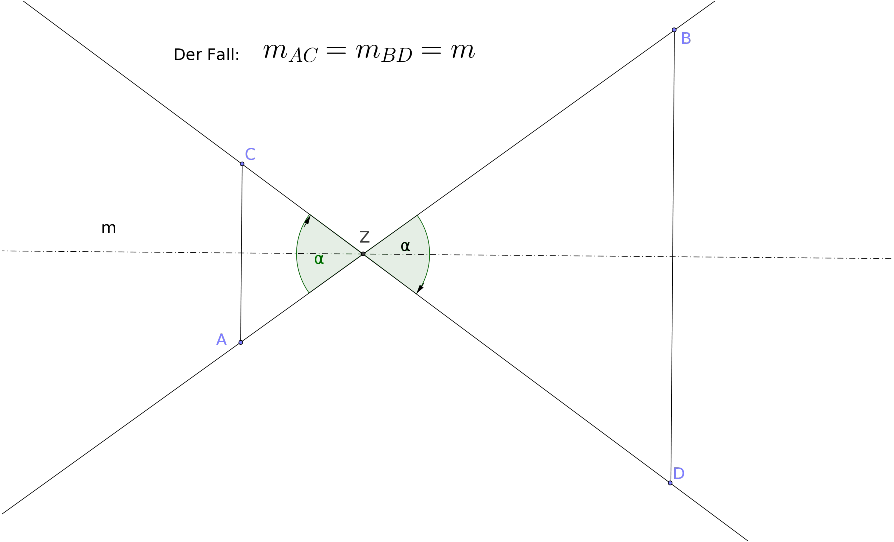

B
A
D
C

Man konstruiert die Mittelsenkrechten
zu AC und BD.

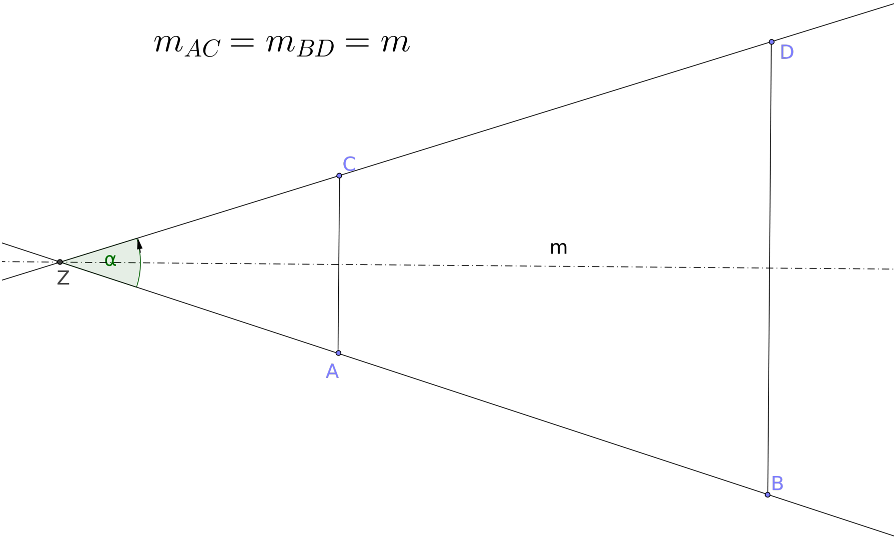



B
A
D
C
α
Z

Der Fall: $m_{AC} = m_{BD} = m$



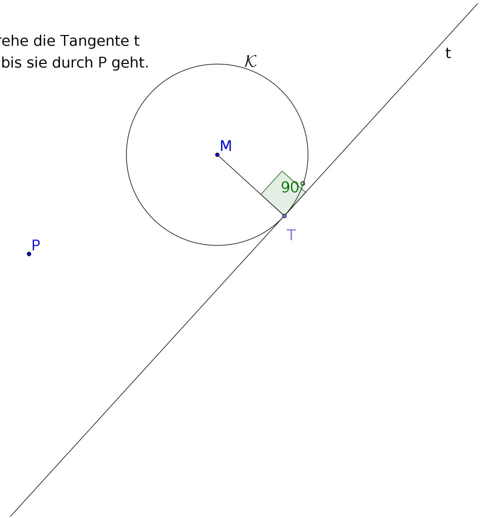
$$m_{AC} = m_{BD} = m$$



3.Tangente an einen Kreis, Aufgabe 2

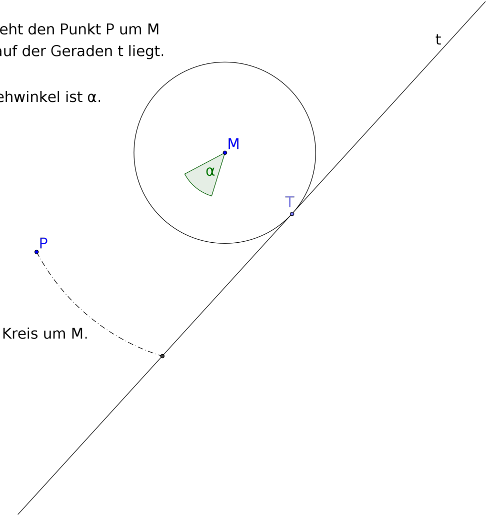
Aufgabe: Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Es sei P ein Punkt außerhalb des Kreises.
Man konstruiere eine Tangente, an den Kreis, die durch P geht.
1.Lösung: Man legt eine beliebige Tangente t an den Kreis $\mathcal{K}$.
Dann dreht man die Gerade t solange um M bis sie durch den Punkt P geht.
2. Lösung: Man legt eine beliebige Gerade g durch P und dreht sie solange um P, bis sie $\mathcal{K}$ berührt.

Man drehe die Tangente t
um M, bis sie durch P geht.

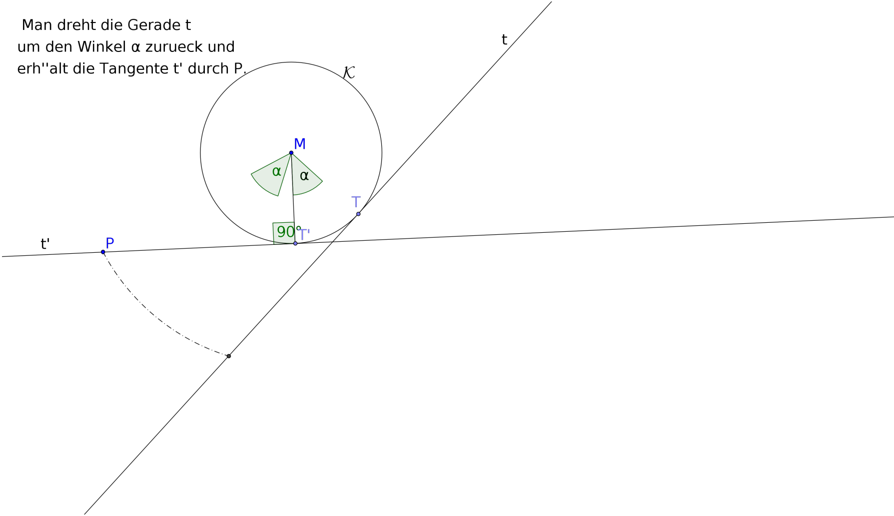


Man dreht den Punkt P um M
bis er auf der Geraden t liegt.

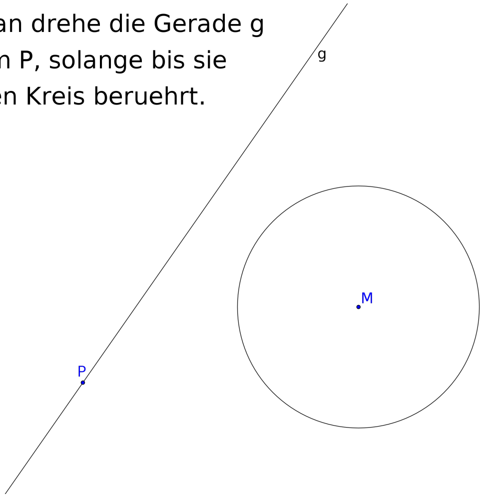
Der Drehwinkel ist α.



Man dreht die Gerade t
um den Winkel α zurueck und
erh''alt die Tangente t' durch P.



Man drehe die Gerade g
um P, solange bis sie
den Kreis beruehrt.

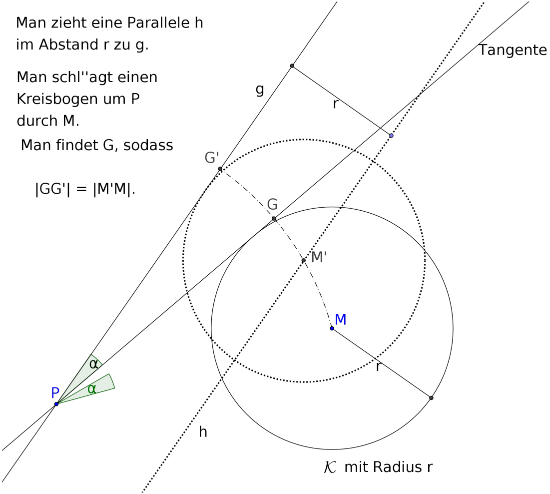


Man zieht eine Parallele h
im Abstand r zu g.

Man schl''agt einen
Kreisbogen um P
durch M.

Man findet G, sodass

$$|GG'| = |M'M|.$$



4.Begründung, Aufgabe 2

1.Lösung: Man dreht den Punkt P um M bis er auf t liegt. Man erhält einen Drehwinkel α. Man dreht t um M um den Drehwinkel $-\alpha$. Dann erhält man eine Tangente t', die durch P geht.

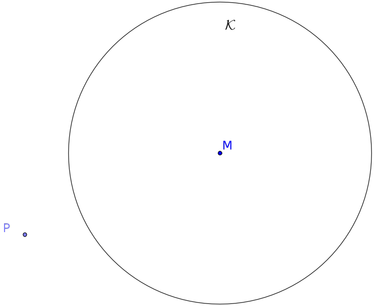
Es sei r der Radius von $\mathcal{K}$. Man zieht eine Parallele h im Abstand r zu g. Jeder Kreis mit dem Radius r, dessen Mittelpunkt auf h liegt, hat g als Tangente.

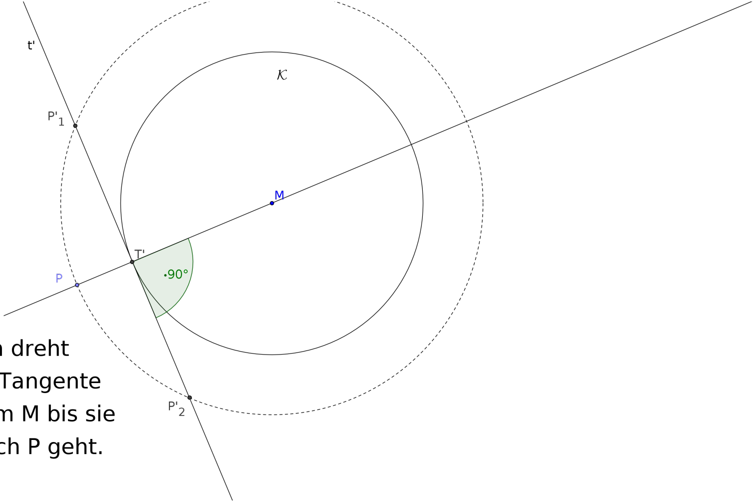
Es sei r der Radius von $\mathcal{K}$. Man zieht eine Parallele h im Abstand r zu g. Jeder Kreis mit dem Radius r, dessen Mittelpunkt auf h liegt, hat g als Tangente.

Man legt einen Kreis mit dem Radius $|PM|$ um P. Er schneidet h in M'. Es sei $\mathcal{K}'$ der Kreis mit dem Mittelpunkt M' und dem Radius r. Man dreht $\mathcal{K}'$ samt seiner Tangente g um P bis er mit $\mathcal{K}$ zusammenfällt. Die Drehung von g ist eine Tangente an $\mathcal{K}$.

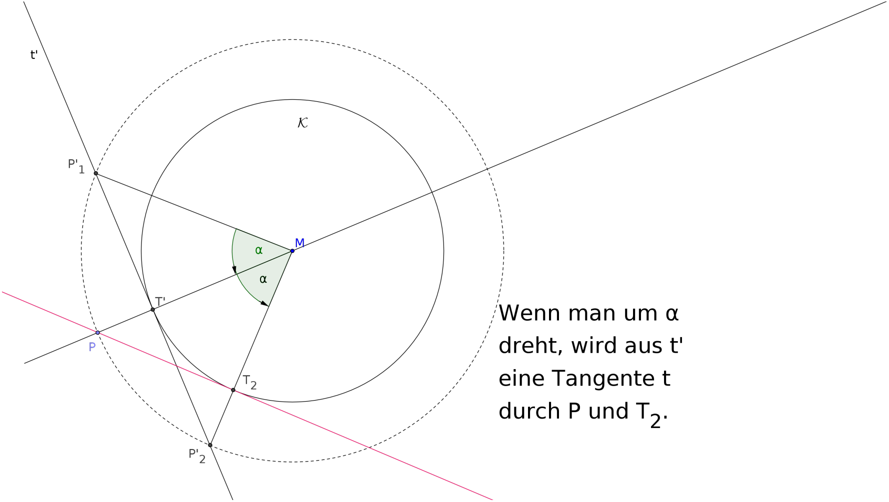
5. Tangentenkonstruktion nach Dürer

Konstruktion der Tangente nach Albrecht Duerer.

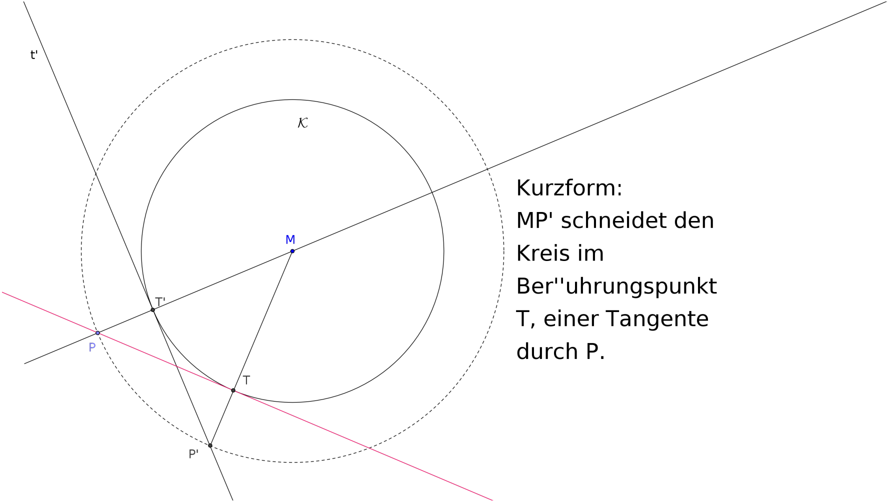




Man dreht
die Tangente
t' um M bis sie
durch P geht.



Wenn man um α dreht, wird aus t' eine Tangente t durch P und T_2.



Kurzform:
MP' schneidet den Kreis im Ber''uhrungspunkt T, einer Tangente durch P.

6.Begründung der Konstruktion von Dürer

Mit Hilfe des vorletzten Bildes. Die Dreiecke $MP_1'T'$ und $MP_2'T'$ sind kogruent, denn eins entsteht aus dem anderen durch Spieglung an der Geraden PM.

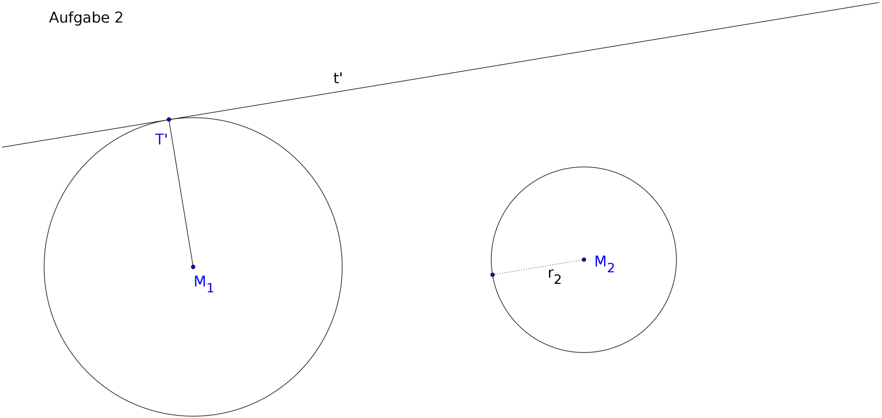
6.Begründung der Konstruktion von Dürer

Mit Hilfe des vorletzten Bildes. Die Dreiecke $MP_1'T'$ und $MP_2'T'$ sind kogruent, denn eins entsteht aus dem anderen durch Spieglung an der Geraden PM.

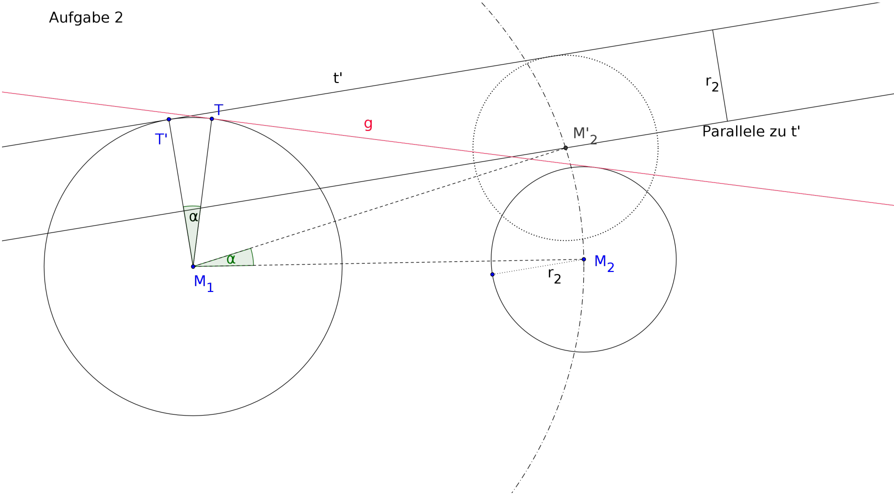
Wenn man um der Winkel α um M dreht wird folglich P_1' auf P und T' auf T gedreht. Da $t' = P_1'T'$ eine Tangente an den Kreis ist, ist auch $t = PT$ eine.

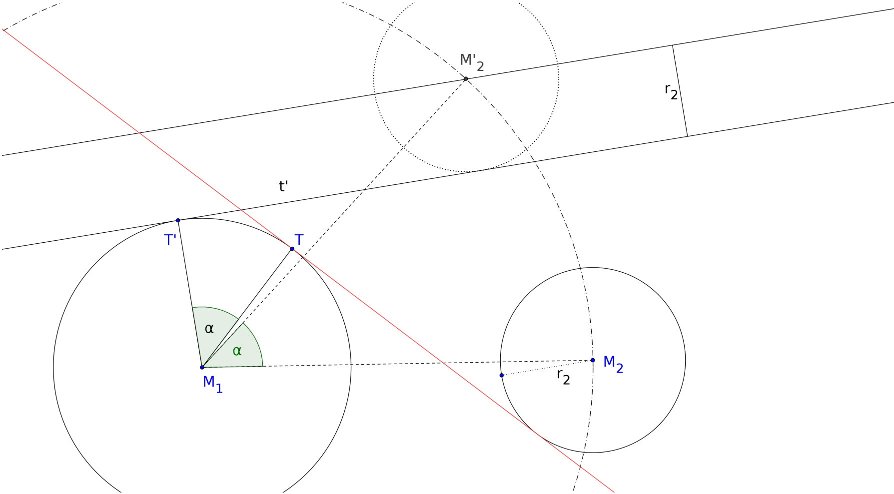
Übung 3,2: Es seien $(\mathcal{K}_1, M_1)$ und $(\mathcal{K}_2, M_2)$ zwei Kreise mit ihren Mittelpunkten. Man konstruiere eine Gerade g, die eine Tangente für beide Kreise ist.

Aufgabe 2



Aufgabe 2




M'2
r2
t'
T'
T
α
α
M1
M2
r2

Es seien $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ zwei Kreise in einer Ebene h. Man finde die Homothetien $h : E \to E$, so dass

$$h(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_2. \tag{1}$$

8.Homothetien und Kreise

Es seien $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ zwei Kreise in einer Ebene h. Man finde die Homothetien $h : E \to E$, so dass

$$h(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_2. \tag{1}$$

Lösung: Man weiß, dass eine Homothetie k einen Kreis $\mathcal{K}_1$ mit dem Mittelpnkt M_1 auf einen Kreis $\mathcal{K}$ mit dem Mittelpunkt $M = k(M_1)$ abbildet.

9. Konstruktion der Homothetien

Wir wählen einen Radius $r_1 = \overline{M_1 A_1}$ des Kreises $\mathcal{K}_1$. Dann muss $h(r_1) = \overline{h(M_1)h(A_1)}$ ein Radius von $\mathcal{K}_2$ sein. Nach Definition einer Homothetie sind die beiden orientierten Strecken r_1 und $h(r_1)$ parallel.

9. Konstruktion der Homothetien

Wir wählen einen Radius $r_1 = \overline{M_1 A_1}$ des Kreises $\mathcal{K}_1$. Dann muss $h(r_1) = \overline{h(M_1)h(A_1)}$ ein Radius von $\mathcal{K}_2$ sein. Nach Definition einer Homothetie sind die beiden orientierten Strecken r_1 und $h(r_1)$ parallel.

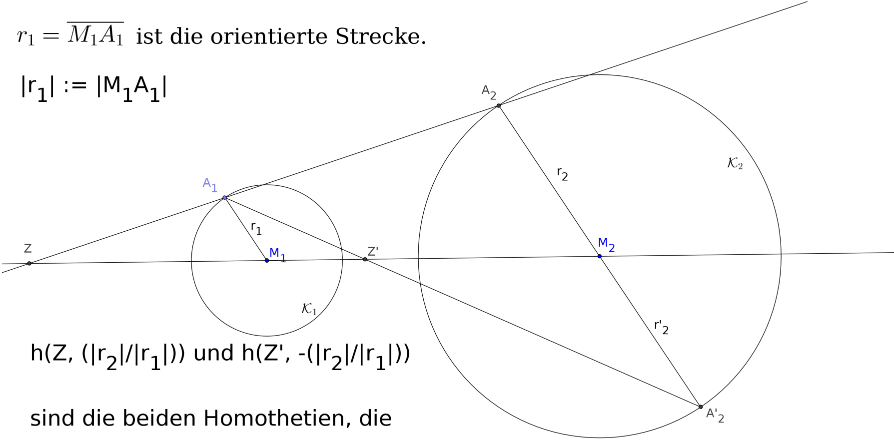
Es gibt genau zwei Radien r_2 und r_2' des Kreises $\mathcal{K}_2$, die zu r_1 parallel sind. Nach dem Satz 16,7 gibt es genau ein Homothetie h mit $h(r_1) = r_2$ und eine Homothetie h' mit $h'(r_1) = r_2'$.

Proposition

Es gibt genau zwei Homothetien h, so dass $h(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_2$

$r_1 = \overline{M_1 A_1}$ ist die orientierte Strecke.

$|r_1| := |M_1 A_1|$



h(Z, ($|r_2|/|r_1|$)) und h(Z', -($|r_2|/|r_1|$))

sind die beiden Homothetien, die

$\mathcal{K}_1$ auf $\mathcal{K}_2$ abbilden.

10.Gemeinsame Tangenten an zwei Kreise

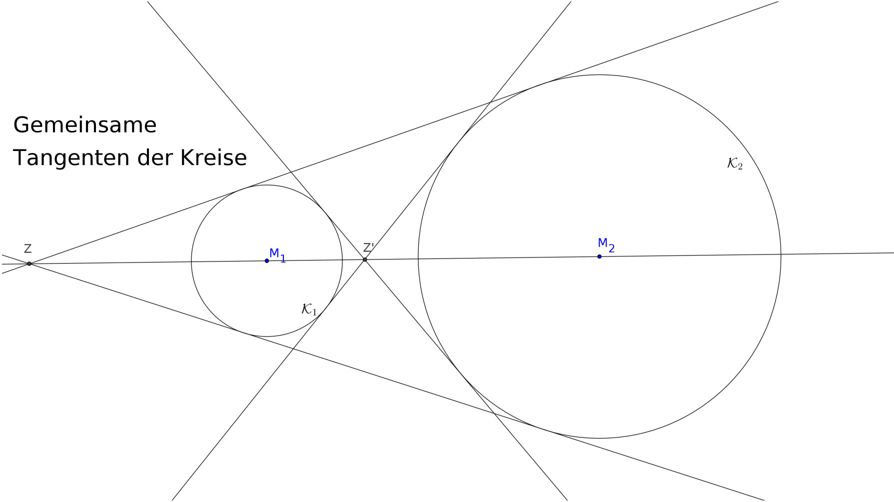
Es seien $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ zwei Kreise. Es sei h eine zentrale Homothetie, so dass $h(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_2$.
Wenn t_1 eine Tangente an $\mathcal{K}_1$ ist, so ist $t_2 = h(t_1)$ eine Tangente an $\mathcal{K}_2$.

10.Gemeinsame Tangenten an zwei Kreise

Es seien $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ zwei Kreise. Es sei h eine zentrale Homothetie, so dass $h(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_2$.
Wenn t_1 eine Tangente an $\mathcal{K}_1$ ist, so ist $t_2 = h(t_1)$ eine Tangente an $\mathcal{K}_2$.

Wenn t_1 durch das Zentrum Z von h geht, so gilt $h(t_1) = t_1$ und folglich ist t_1 eine gemeinsame Tangente an beide Kreise.

Gemeinsame Tangenten der Kreise



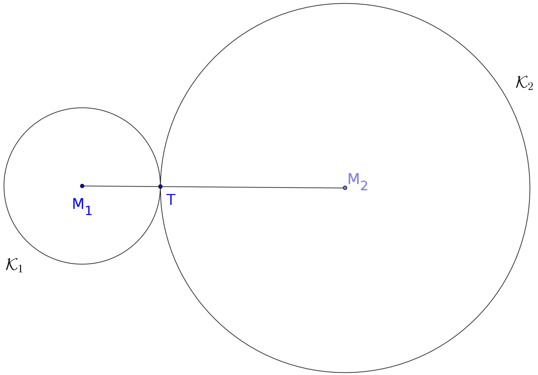
Zwei Kreise, die sich berühren

Wir betrachten zwei Kreise $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$, die sich in einem Punkt T berühren. Das bedeutet, dass durch T eine gemeinsame Tangente geht. Dann sind die Radien M_1T und M_2T parallel.

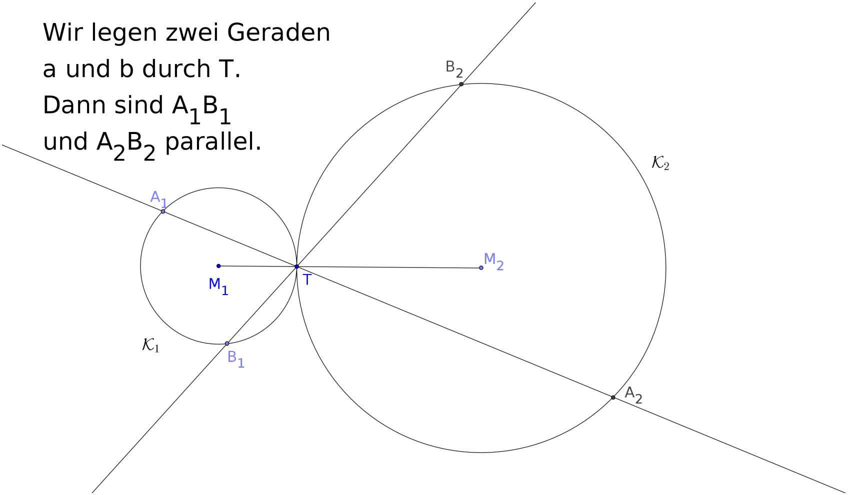
Zwei Kreise, die sich berühren

Wir betrachten zwei Kreise $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$, die sich in einem Punkt T berühren. Das bedeutet, dass durch T eine gemeinsame Tangente geht. Dann sind die Radien M_1T und M_2T parallel.

Folglich gibt es eine zentrale Homothetie h mit dem Fixpunkt T, so dass $h(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_2$.


$\mathcal{K}_2$
M_2
M_1
T
$\mathcal{K}_1$

Wir legen zwei Geraden
a und b durch T.
Dann sind A_1B_1
und A_2B_2 parallel.



Wir beweisen, dass $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Da h das Zentrum T hat, gilt $h(A_1) \in TA_1$. Andererseits gilt $h(A_1) \in \mathcal{K}_2$. Also gilt $h(A_1) = A_2$. Genauso folgt $h(B_1) = B_2$

Wir beweisen, dass $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Da h das Zentrum T hat, gilt $h(A_1) \in TA_1$. Andererseits gilt $h(A_1) \in \mathcal{K}_2$. Also gilt $h(A_1) = A_2$. Genauso folgt $h(B_1) = B_2$

Da eine Homothetie h eine Gerade auf eine dazu parallele Gerade abbildet, folgt

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2.$$