Elementare Geometrie Wiederholung 3

Thomas Zink

10.7.2017

Es seien A, B, C, D Punkte, die auf einer Geraden liegen, und so dass $A \neq B$ und $C \neq D$.

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{AB}{CD}. \tag{1}$$

Hier ist $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl. Wenn (1) erfüllt ist, so gilt für den absoluten Betrag $|\lambda|$

$$|\lambda| = \frac{|AB|}{|CD|}.$$

Es gilt genau dann $\lambda > 0$, wenn die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ in die gleiche Richtung zeigen.

2.Streckung

Die Gleichung

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD}$$

sagt, dass $\overrightarrow{AB}$ eine Streckung des Vektors $\overrightarrow{CD}$ ist. Wenn $A \neq B$ und $C \neq D$ ist, besagt die Gleichung, dass AB und CD parallel sind. Wir schreiben

$$\lambda = \frac{AB}{CD}.$$

3.Affine Abbildungen, V11,8

Definition

Eine bijektive Abbildung $f : g \to g'$ heißt affin, wenn für beliebige Punkte $A, B, C \in g$, die verschieden sind

$$\frac{CA}{CB} = \frac{f(C)f(A)}{f(C)f(B)}.$$

Wenn $A, B, C, D \in g$, so dass $A \neq B$ und $C \neq D$, so gilt für eine affine Abbildung

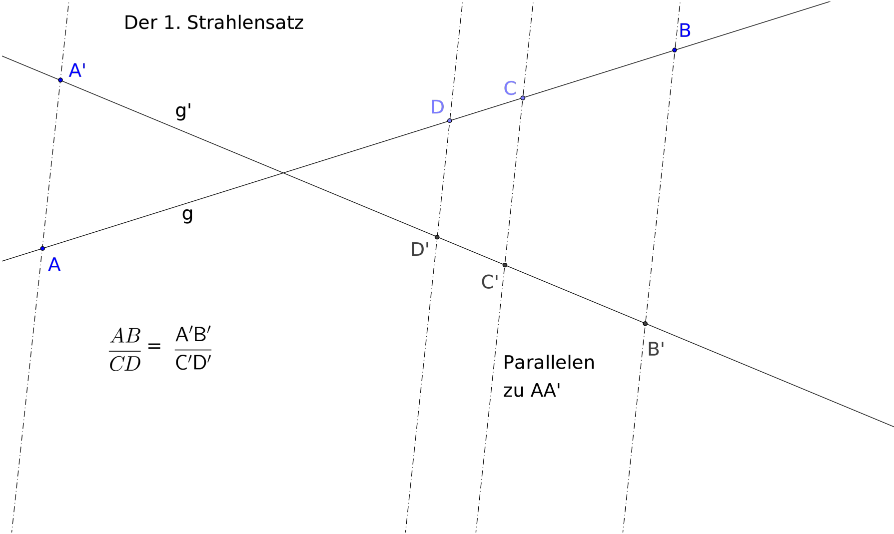
$$\frac{AB}{CD} = \frac{f(B)f(A)}{f(D)f(C)}.$$

4. Der erste Strahlensatz, V11,9

Proposition

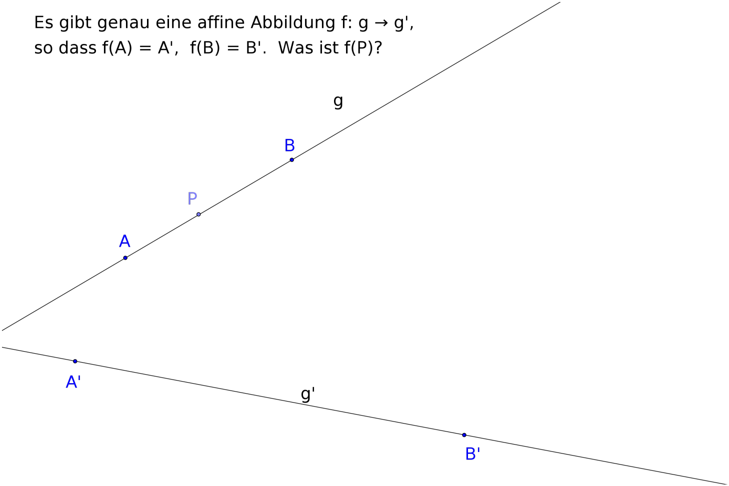
Es seien g *und* g' *Geraden in einer Ebene.*
Eine Parallelprojektion $f : g \to g'$ *ist eine affine Abbildung (1.Strahlensatz).*
Es seien $A, B \in g$ *und* $A', B' \in g'$ *jeweils zwei verschiedene Punkte. Dann gibt es genau eine affine Abbildung* $f : g \to g'$*, so dass* $f(A) = A'$ *und* $f(B) = B'$

Der 1. Strahlensatz



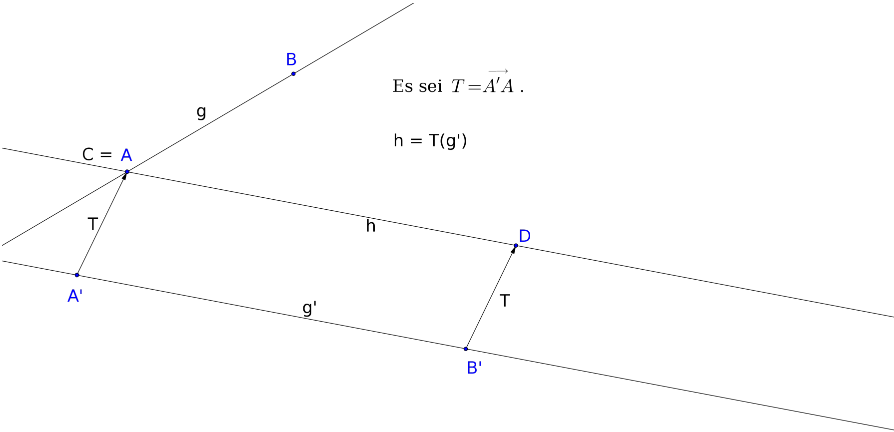
$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Es gibt genau eine affine Abbildung f: g → g',
so dass f(A) = A', f(B) = B'. Was ist f(P)?

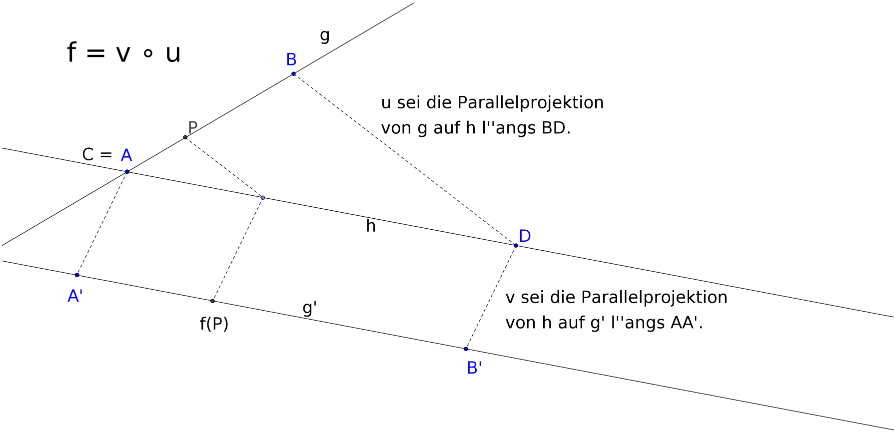


Es sei $T = \overrightarrow{A'A}$.

h = T(g')



$f = v \circ u$



u sei die Parallelprojektion von g auf h l''angs BD.

v sei die Parallelprojektion von h auf g' l''angs AA'.

5.Der zweite Strahlensatz

Proposition

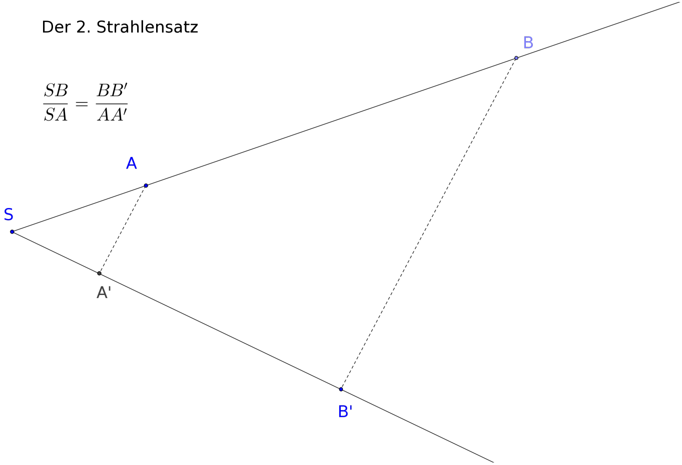
Es seien g und g' zwei Geraden in einer Ebene, die sich genau in einem Punkt S schniden. Es seien $A, B \in g$ zwei Punkte, die von S verschieden sind und $A', B' \in g$ zwei Punkte, die von S verschieden sind.

Es sei $AA' \parallel BB'$. Dann gilt:

$$\frac{SB}{SA} = \frac{BB'}{AA'}$$

Der 2. Strahlensatz

$$\frac{SB}{SA} = \frac{BB'}{AA'}$$



6. Das Teilverhältnis

Geometrisch sehen wir eine Zahl λ als Verhältnis der Längen zweier Strecken an.

$$\lambda = \pm\frac{q}{p}.$$

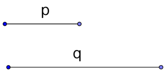
(Eine Länge hat eine Maßeinheit und ist daher nicht einfach eine Zahl.)

Aufgabe: Es seien p und q zwei Längen. Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke. Man konstruiere einen Punkt $S \in AB$, so dass

$$\frac{SA}{SB} = \frac{q}{p}.$$

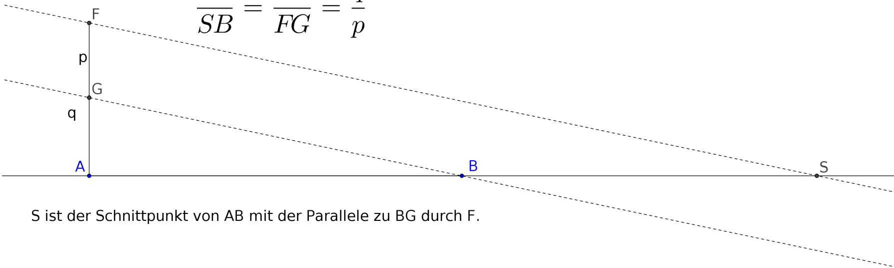
Man konstruiere einen Punkt $T \in AB$, so dass

$$\frac{TA}{TB} = -\frac{q}{p}.$$



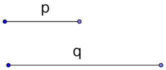
|GF| = p, |AF| = q

$$\frac{SA}{SB} = \frac{FA}{FG} = \frac{q}{p}$$



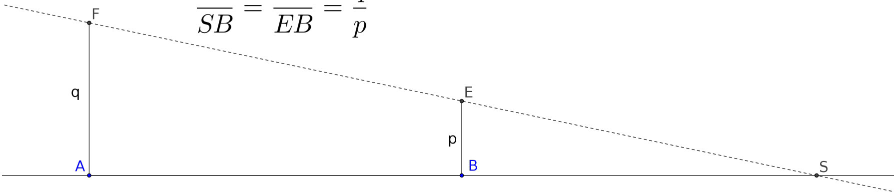
S ist der Schnittpunkt von AB mit der Parallele zu BG durch F.

Konstruktion mit dem zweiten Strahlensatz

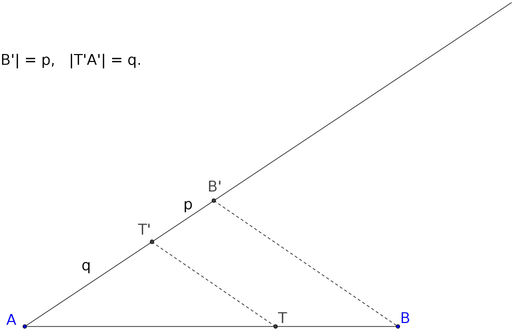


|BE| = p, |AF| = q

$$\frac{SA}{SB} = \frac{FA}{EB} = \frac{q}{p}$$



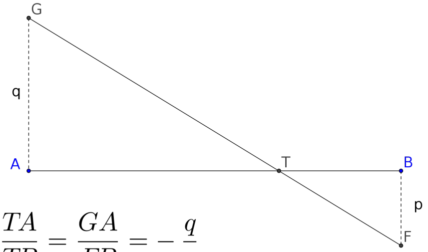
$|T'B'| = p, \quad |T'A'| = q.$



$$\frac{TA}{TB} = \frac{T'A}{T'B'} = -\frac{q}{p}$$

Konstruktion mit dem zweiten Strahlensatz

Man kann auch den 2.Strahlensatz
benutzen, um T zu konstruieren.



$$\frac{TA}{TB} = \frac{GA}{FB} = -\frac{q}{p}$$

Proposition

Es seien (A,p), (B,q) und (C,r) drei gewichtete Punkte in der Ebene, so dass $p+q+r \neq 0$. Dann gibt es genau einen Punkt $S \in E$, so dass für alle Punkte $M \in E$

$$p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB} + r\overrightarrow{MC} = (p+q+r)\overrightarrow{MS}. \tag{2}$$

Man nennt S den Schwerpunkt von (A,p), (B,q) und (C,r).

Wenn $r = 0$ so findet man die Gleichung:

$$p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB} = (p+q)\overrightarrow{MS}.$$

Dann nennt man S den Schwerpunkt von (A, p) und (B, q). Der Schwerpunkt S liegt auf der Geraden AB.

8.Der Schwerpunkt

Wenn man $M = S$ setzt, so findet man die Gleichung:

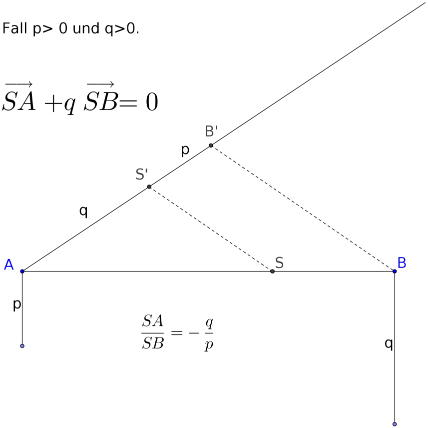
$$p\overrightarrow{SA} + q\overrightarrow{SB} = 0$$

Dafür kann man schreiben:

$$\frac{SA}{SB} = -\frac{q}{p}.$$

Der Fall p> 0 und q>0.

$$p\,\overrightarrow{SA} + q\,\overrightarrow{SB} = 0$$

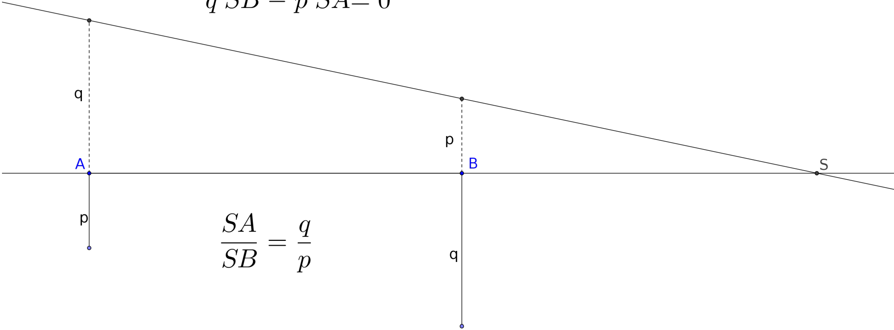


$$\frac{SA}{SB} = -\frac{q}{p}$$

Es sei p > 0 und q >0.

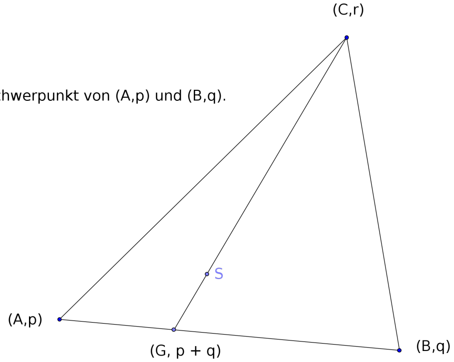
Schwerpunkt von (A,-p) und (B,q)

$$q\,\overrightarrow{SB} - p\,\overrightarrow{SA} = 0$$



$$\frac{SA}{SB} = \frac{q}{p}$$

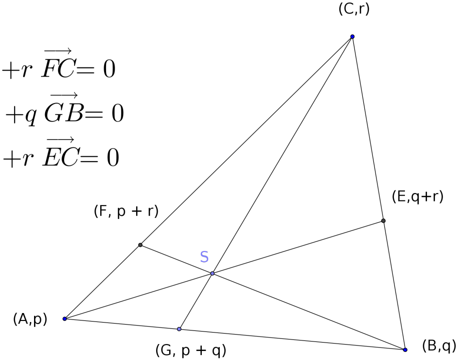
G ist der Schwerpunkt von (A,p) und (B,q).



S ist auch der Schwerpunkt von (C,r) und (G,p+q).

Schwerpunkt von 3 gewichteten Punkten

$$p\,\overrightarrow{FA} + r\,\overrightarrow{FC} = 0$$
$$p\,\overrightarrow{GA} + q\,\overrightarrow{GB} = 0$$
$$q\,\overrightarrow{EB} + r\,\overrightarrow{EC} = 0$$



vgl. ''Ubung 7,3

Der Satz von Ceva, V12,9

Proposition

Es sei ABC *ein Dreieck. Es sei* $G \in AB$, $E \in BC$ *und* $F \in CA$. *Dann schneiden sich die Geraden* AE, BF, CG *genau dann in einem Punkt, wenn*

$$\frac{GA}{GB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = -1.$$

Den Ausdruck auf der linken Seite nennen wir CM-Quotient.

Im Fall von drei gewichteten Punkten $(A,p),(B,q),(C,r)$ findet man den Bezeichnungen das voletzten Blattes:

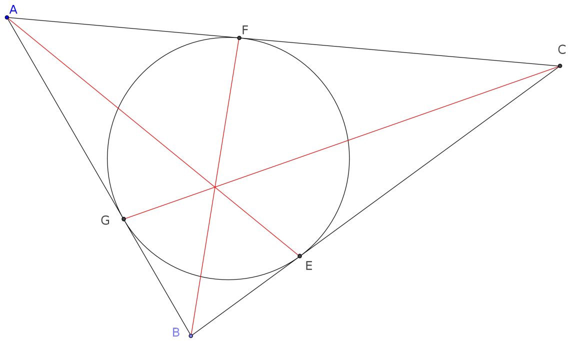
$$\frac{GA}{GB}\cdot\frac{EB}{EC}\cdot\frac{FC}{FA}=(-\frac{q}{p})\cdot(-\frac{r}{q})\cdot(-\frac{p}{r})=-1.$$

Übung 7,4: Es sei ABC ein Dreieck. Es sei $G \in \overline{AB}$, der Punkt, wo der Inkreis die Strecke $\overline{AB}$ berührt, es sei $F \in \overline{AC}$, der Punkt, wo der Inkreis die Strecke $\overline{AC}$ berührt und es sei $E \in \overline{BC}$, der Punkt, wo der Inkreis die Strecke $\overline{BC}$ berührt.

Übung 7,4: Es sei ABC ein Dreieck. Es sei $G \in \overline{AB}$, der Punkt, wo der Inkreis die Strecke $\overline{AB}$ berührt, es sei $F \in \overline{AC}$, der Punkt, wo der Inkreis die Strecke $\overline{AC}$ berührt und es sei $E \in \overline{BC}$, der Punkt, wo der Inkreis die Strecke $\overline{BC}$ berührt.

Man beweise, dass sich die drei Geraden AE, BF, CG in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 4



Beweis: Es gilt:

$$|FA| = |GA|, \quad |FC| = |EC|, \quad |EB| = |GB|,$$

weil der Abstand eines Punktes zu den Berührungspunkten der beiden Tangenten an einen Kreis gleich lang sind. (Tangentenabschnitte sind gleich lang.) Dann gilt:

$$\frac{GA}{GB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = (-\frac{|GA|}{|GB|}) \cdot (-\frac{|GB|}{|FC|}) \cdot (-\frac{|FC|}{|GA|}) = -1$$

Da der CM-Quotient -1 ist, schneiden sich CG, BE und AF in einem Punkt.

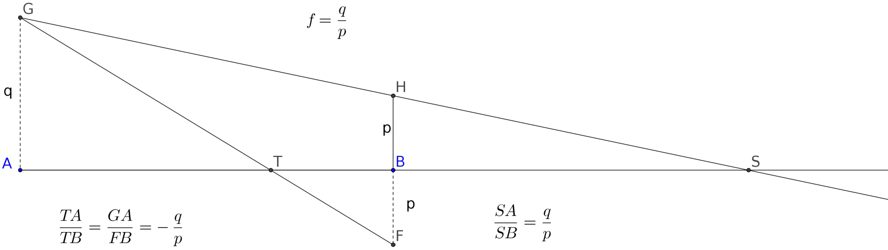
Der Satz des Apolloniuskreis, V19,10

Proposition

Es seien A und B zwei Punkte. Es sei $f > 0$, $f \neq 1$ eine reelle Zahl.
Dann ist die Menge aller Punkte P, so dass

$$|AP| = f|BP| \tag{3}$$

ein Kreis (Apolloniuskreis).
Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt auf der Geraden AB.



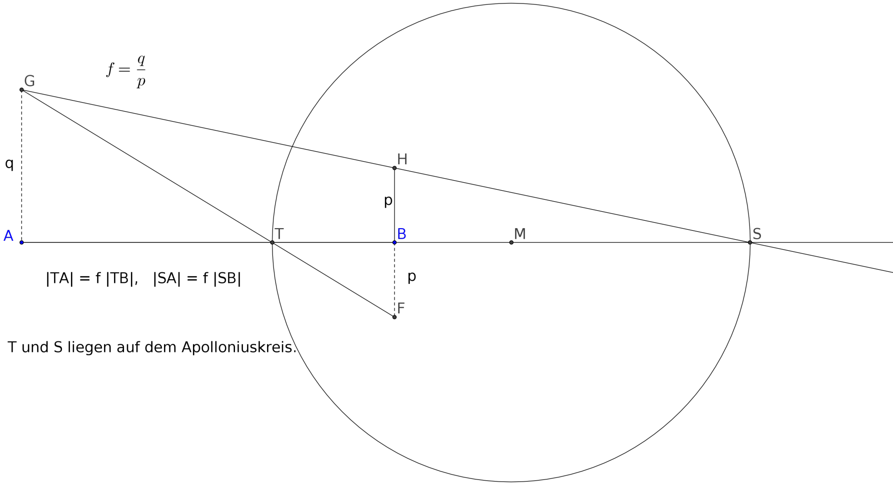
$$f = \frac{q}{p}$$

$$\frac{TA}{TB} = \frac{GA}{FB} = -\frac{q}{p}$$

$$\frac{SA}{SB} = \frac{q}{p}$$

Also gilt: |TA| = f |TB|, |SA| = f |SB|

T und S liegen auf dem Apolloniuskreis.



$f = \frac{q}{p}$

$|TA| = f\,|TB|, \quad |SA| = f\,|SB|$

T und S liegen auf dem Apolloniuskreis.

Es sei C ein Punkt auf dem Apolloniuskreis. Dann gilt:

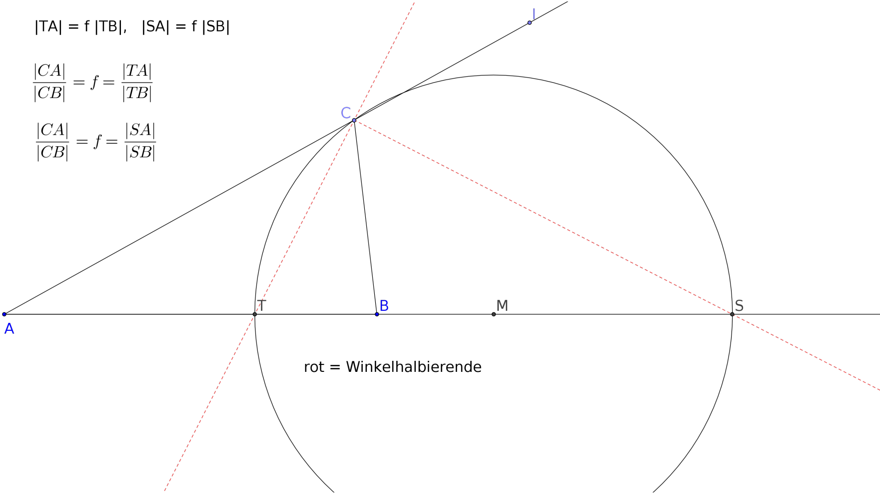
$$\frac{|CA|}{|CB|} = f = \frac{|TA|}{|TB|} = \frac{|SA|}{|SB|}$$

Nach dem Satz über die Winkelhalbierenden (V12, 4 und V19, 15) geht die Winkelhalbierende von ACB durch T und die Winkelhalbierende des Außenwinkels durch S.

|TA| = f |TB|, |SA| = f |SB|

$$\frac{|CA|}{|CB|} = f = \frac{|TA|}{|TB|}$$

$$\frac{|CA|}{|CB|} = f = \frac{|SA|}{|SB|}$$

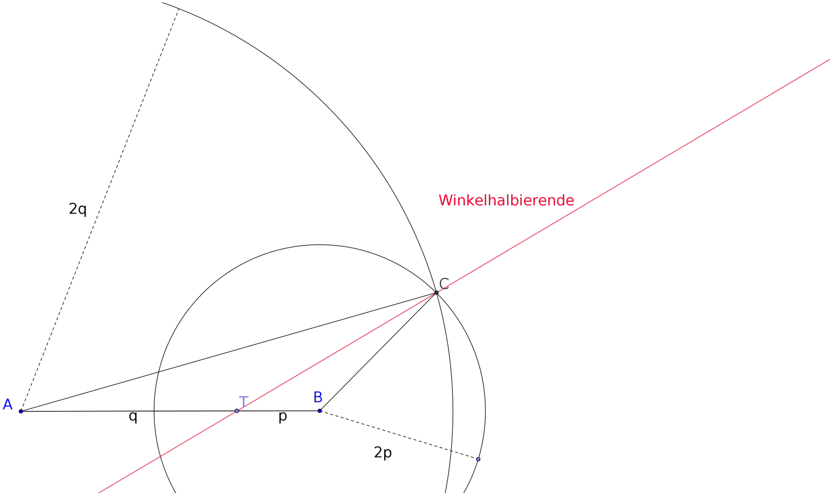


rot = Winkelhalbierende

Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke und es sei $T \in AB$. Den Apolloniuskreis von $(\overline{AB}, T)$ ist nach Definition der Apolloniuskreis aller Punkte C, so dass

$$|CA| = f \cdot |CB|, \quad f = \frac{|TA|}{|TB|}.$$

Einen solchen Punkt C kann man mit dem Satz über die Winkelhalbierende konstruieren.

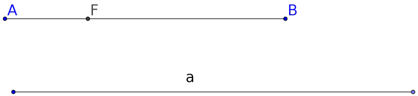

2q
Winkelhalbierende
C
A
T
B
q
p
2p

Übung 10,4: Von einem Dreieck ABC sei die Seite $\overline{AB}$ und der Schnittpunkt $F \in \overline{AB}$ der Winkelhalbierenden des Winkels im Punkt C mit der Geraden AB gegeben. Weiter sei die Länge $a = |BC|$ bekannt.
Man konstruiere das Dreieck.

Übung 10,4: Von einem Dreieck ABC sei die Seite $\overline{AB}$ und der Schnittpunkt $F \in \overline{AB}$ der Winkelhalbierenden des Winkels im Punkt C mit der Geraden AB gegeben. Weiter sei die Länge $a = |BC|$ bekannt.
Man konstruiere das Dreieck.

Lösung: Man konstruiert den Apolloniuskreis zu $(\overline{AB}, F)$.

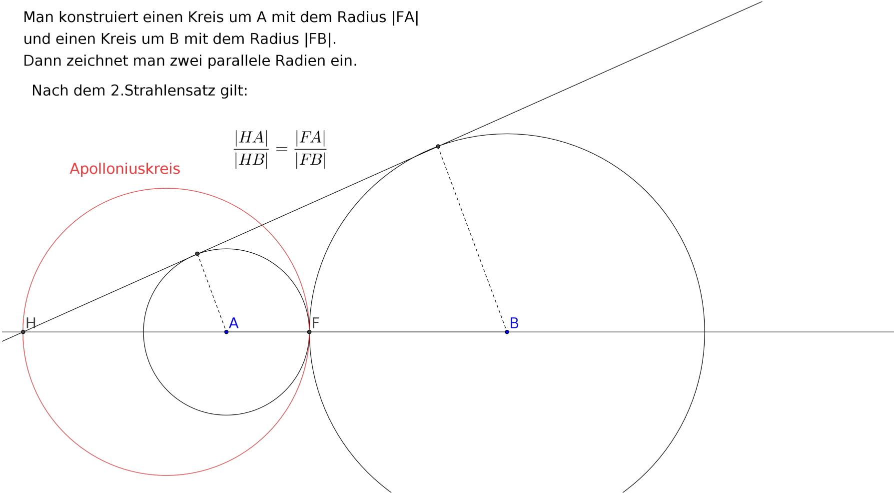
Aufgabe 4



Man konstruiert einen Kreis um A mit dem Radius |FA|
und einen Kreis um B mit dem Radius |FB|.
Dann zeichnet man zwei parallele Radien ein.

Nach dem 2.Strahlensatz gilt:

$$\frac{|HA|}{|HB|} = \frac{|FA|}{|FB|}$$



Man schneidet den Kreis um B mit dem Radius a
mit dem Apolloniuskreis und erh''alt den Punkt C.