Elementare Geometrie Wiederholung 4

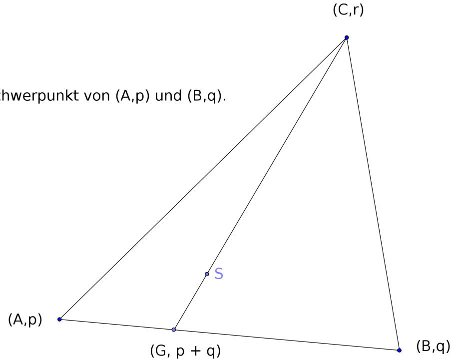
Thomas Zink

12.7.2017

Schwerpunkt V13Blatt18 und V13Blatt24,

Der Schwerpunkt S von drei gewichteten Punkten (A, p), (B, q), (C, r).
Es sei $G \in AB$ der Schwerpunkt von (A, p) und (B, q). Dann liegt S auf der Geraden CG.

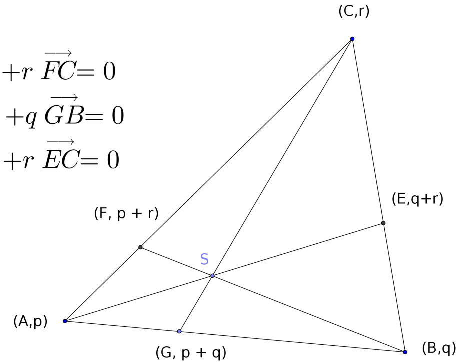
G ist der Schwerpunkt von (A,p) und (B,q).



S ist auch der Schwerpunkt von (C,r) und (G,p+q).

Schwerpunkt von 3 gewichteten Punkten

$$p\ \overrightarrow{FA}\ +r\ \overrightarrow{FC} = 0$$
$$p\ \overrightarrow{GA}\ +q\ \overrightarrow{GB} = 0$$
$$q\ \overrightarrow{EB}\ +r\ \overrightarrow{EC} = 0$$



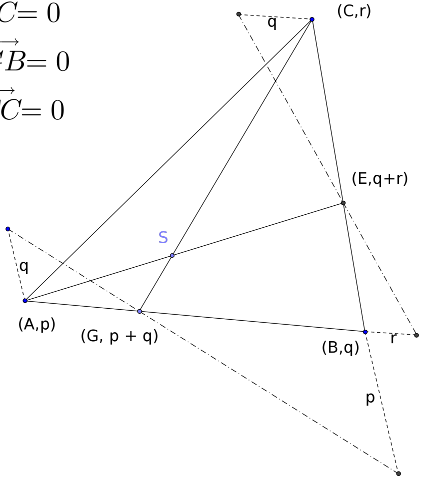
vgl. ''Ubung 7,3

Konstruktion von S

$$p\,\overrightarrow{FA} + r\,\overrightarrow{FC} = 0$$

$$p\,\overrightarrow{GA} + q\,\overrightarrow{GB} = 0$$

$$q\,\overrightarrow{EB} + r\,\overrightarrow{EC} = 0$$



Der Satz des Apolloniuskreis, V19Blatt10

Proposition

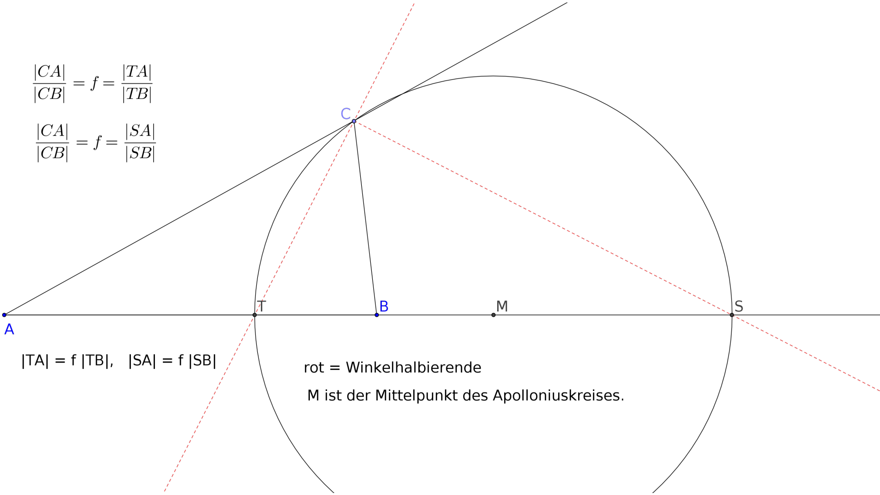
Es seien A und B zwei Punkte. Es sei $f > 0$, $f \neq 1$ eine reelle Zahl.
Dann ist die Menge aller Punkte P, so dass

$$|AP| = f|BP| \tag{1}$$

ein Kreis (Apolloniuskreis).
Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt auf der Geraden AB.

$$\frac{|CA|}{|CB|} = f = \frac{|TA|}{|TB|}$$

$$\frac{|CA|}{|CB|} = f = \frac{|SA|}{|SB|}$$



$|TA| = f\,|TB|, \quad |SA| = f\,|SB|$

rot = Winkelhalbierende

M ist der Mittelpunkt des Apolloniuskreises.

Es sei C ein Punkt auf dem Apolloniuskreis. Dann gilt:

$$\frac{|CA|}{|CB|} = f = \frac{|TA|}{|TB|} = \frac{|SA|}{|SB|}$$

Nach dem Satz über die Winkelhalbierenden (V12, 4 und V19, 15) geht die Winkelhalbierende von ACB durch T und die Winkelhalbierende des Außenwinkels durch S.

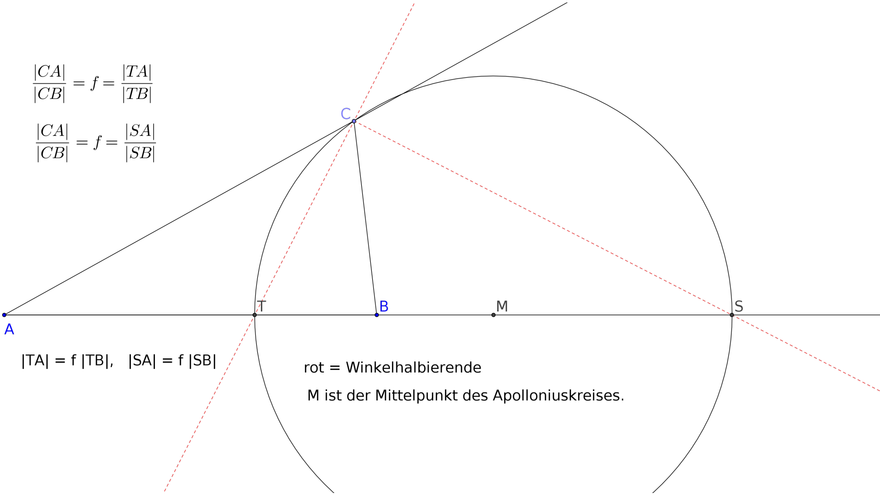
Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke. Es sei C ein Punkt. Wir suchen einen Apolloniuskreis zu A, B und einer geeigneten Zahl $f > 1$, der durch C geht.

Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke. Es sei C ein Punkt. Wir suchen einen Apolloniuskreis zu A, B und einer geeigneten Zahl $f > 1$, der durch C geht.

Lösung: Man nimmt
$$f = \frac{|AC|}{|BC|}.$$
Angenommen $C \notin AB$. Dann zeichnet man die Winkelhalbierenden durch C und die Winkelhalbierende des Außenwinkels durch C.

$$\frac{|CA|}{|CB|} = f = \frac{|TA|}{|TB|}$$

$$\frac{|CA|}{|CB|} = f = \frac{|SA|}{|SB|}$$



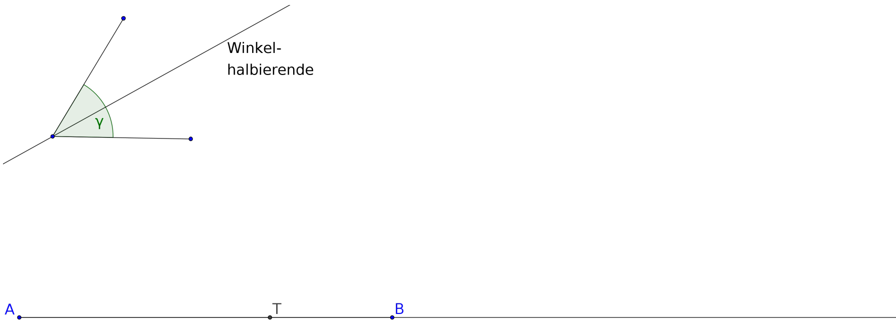
$|TA| = f\,|TB|, \quad |SA| = f\,|SB|$

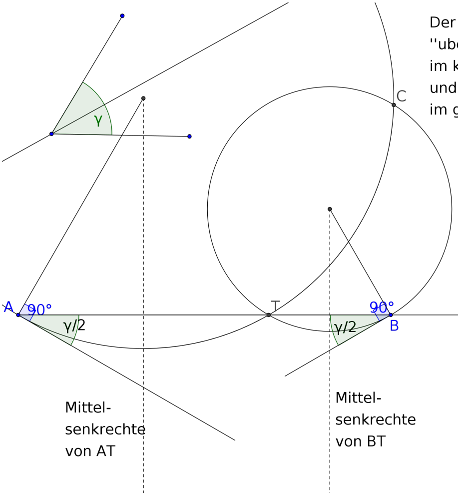
rot = Winkelhalbierende

M ist der Mittelpunkt des Apolloniuskreises.

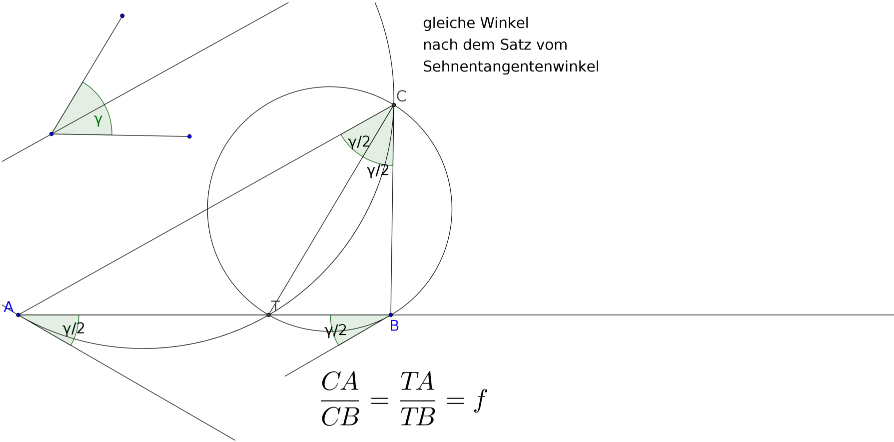
Aufgabe: Es sei γ ein Winkel. Man konstruiere einen Punkt C auf dem Apolloniuskreis zu $(\overline{AB}, T)$, so dass

$$\angle ACB = \gamma.$$


Winkel-
halbierende
γ
A
T
B

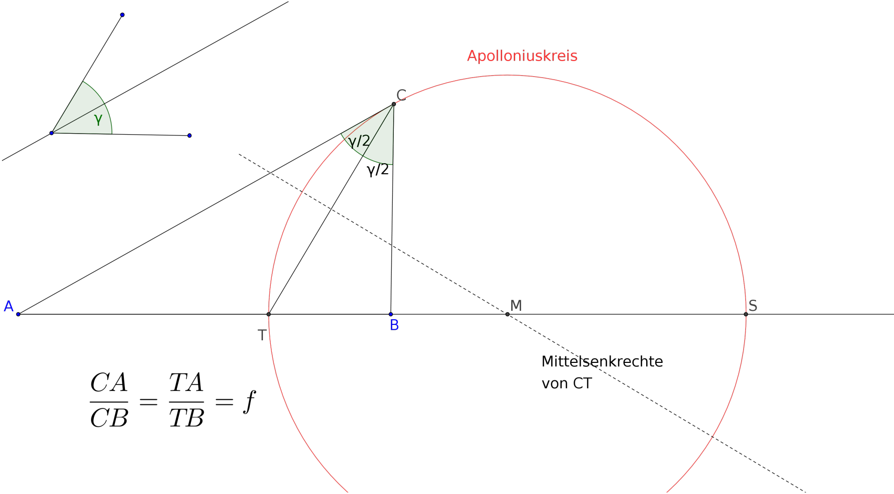


Der Peripheriewinkel
''uber der Sehne BT
im kleinen Kreis ist γ/2
und ''uber der Sehne AT
im grossen Kreis ist γ/2.



gleiche Winkel
nach dem Satz vom
Sehnentangentenwinkel

$$\frac{CA}{CB} = \frac{TA}{TB} = f$$



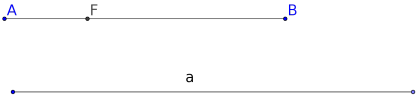
$$\frac{CA}{CB} = \frac{TA}{TB} = f$$

Übung 10,4: Von einem Dreieck ABC sei die Seite $\overline{AB}$ und der Schnittpunkt $F \in \overline{AB}$ der Winkelhalbierenden des Winkels im Punkt C mit der Geraden AB gegeben. Weiter sei die Länge $a = |BC|$ bekannt.
Man konstruiere das Dreieck.

Übung 10,4: Von einem Dreieck ABC sei die Seite $\overline{AB}$ und der Schnittpunkt $F \in \overline{AB}$ der Winkelhalbierenden des Winkels im Punkt C mit der Geraden AB gegeben. Weiter sei die Länge $a = |BC|$ bekannt.
Man konstruiere das Dreieck.

Lösung: Man konstruiert den Apolloniuskreis zu $(\overline{AB}, F)$.

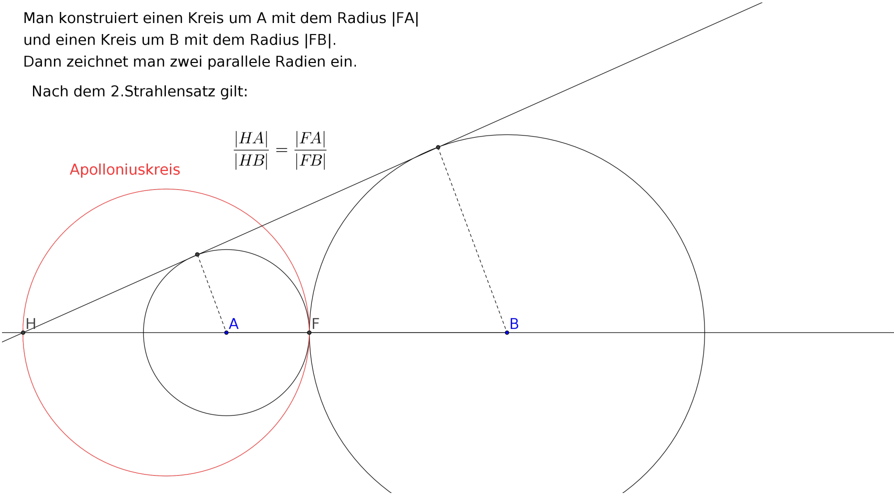
Aufgabe 4



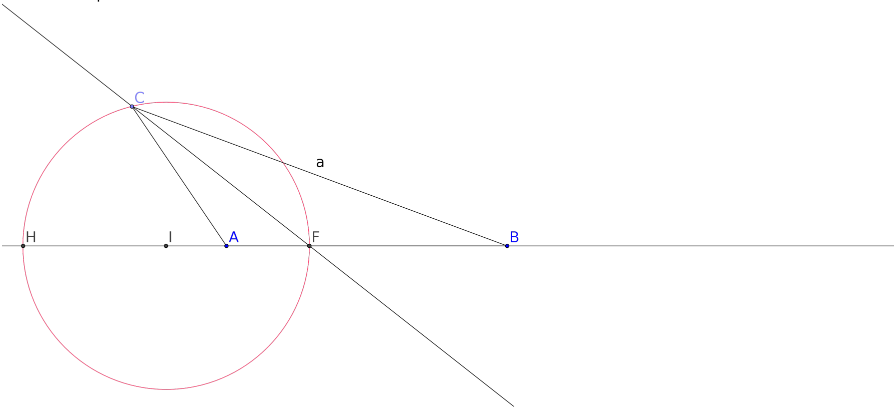
Man konstruiert einen Kreis um A mit dem Radius |FA|
und einen Kreis um B mit dem Radius |FB|.
Dann zeichnet man zwei parallele Radien ein.

Nach dem 2.Strahlensatz gilt:

$$\frac{|HA|}{|HB|} = \frac{|FA|}{|FB|}$$



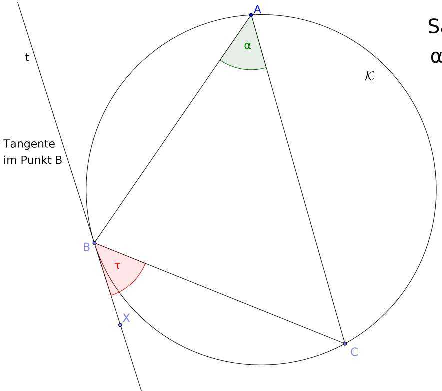
Man schneidet den Kreis um B mit dem Radius a
mit dem Apolloniuskreis und erh''alt den Punkt C.



Der Satz vom Sehnentangentenwinkel, V5

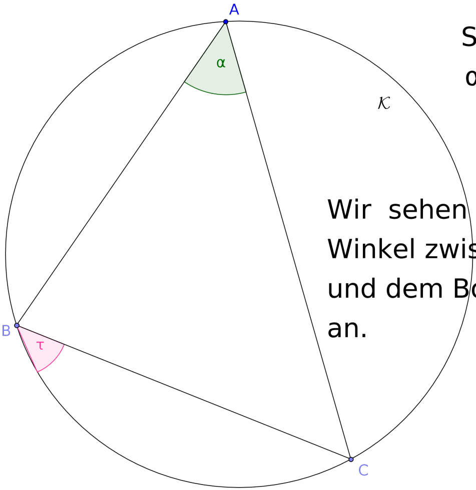
Es sei ABC ein Dreieck und $\mathcal{K}$ sein Umkreis. Es sei t die Tangente an B. Es sei $X \in t$ ein Punkt, so dass A und X auf verschiedenen Seiten der Geraden BC liegen. Dann gilt:

$$\angle BAC = \angle XBC.$$



Satz:

α = τ

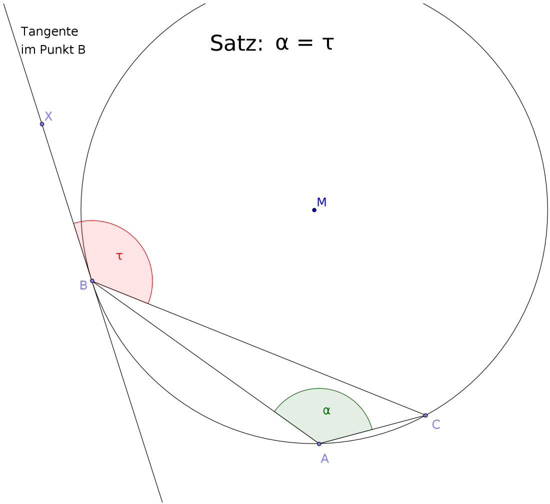


Satz:

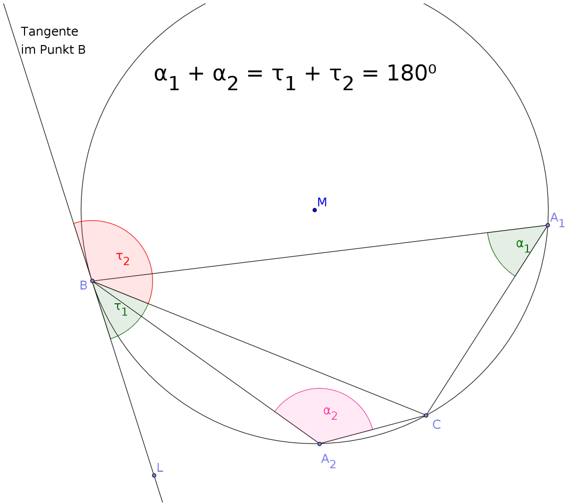
$\alpha = \tau$

Wir sehen τ als Winkel zwischen $\overrightarrow{BC}$ und dem Bogen BC an.

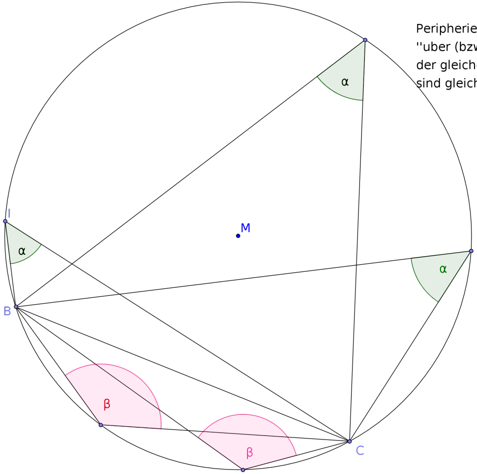
Ein Fall von Sehnentangentenwinkel



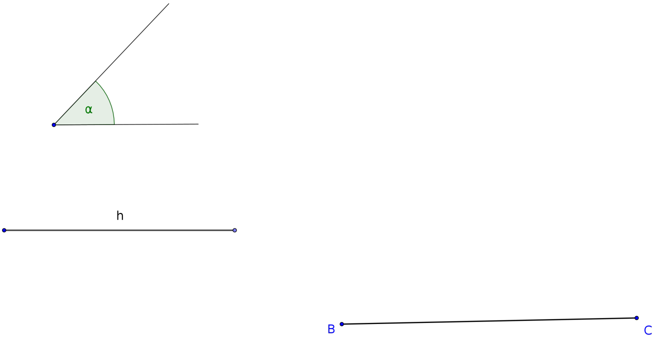
Gegenüberliegende Peripheriewinkel

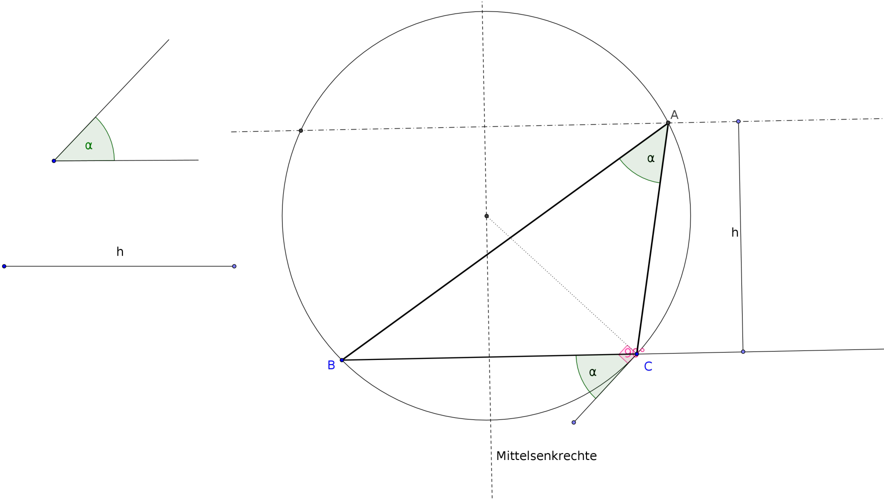


Peripheriewinkel
''uber (bzw. unter)
der gleichen Sehne
sind gleich.



Aufgabe: Von einem Dreieck ABC sei die Länge $|BC|$ bekannt, der Winkel $\alpha = \angle CAB$ und die Länge h der Höhe von C aus. Man konstruiere ein solches Dreieck.


α
h
B
C


α
h
A
α
h
B
C
α
90°
Mittelsenkrechte

Der Satz vom Peripheriewinkel, V3

Proposition

Es sei $\overline{AB}$ eine Sehne in einem Kreis mit dem Mittelpunkt M. Es sei
S ein Punkt auf dem Kreisumfang, der auf der gleichen Seite von AB liegt wie M.
Dann gilt für die Winkel

$$2\angle ASB = \angle AMB.$$

Der Satz vom Peripheriewinkel, V3

Proposition

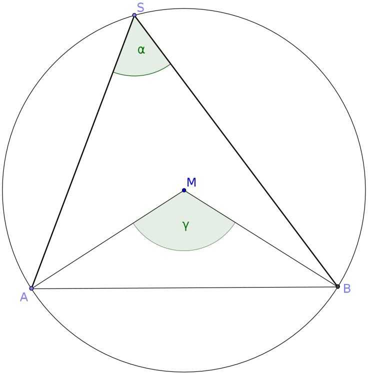
Es sei $\overline{AB}$ eine Sehne in einem Kreis mit dem Mittelpunkt M. Es sei
S ein Punkt auf dem Kreisumfang, der auf der gleichen Seite von AB liegt wie M.
Dann gilt für die Winkel

$$2\angle ASB = \angle AMB.$$

In der folgenden Zeichnung ist

$$\alpha = \angle ASB, \quad \gamma = \angle AMB.$$

Der Zentriwinkel γ und
der Peripheriewinkel α
''uber einer Sehne AB
eines Kreises mit
dem Mittelpunkt M.



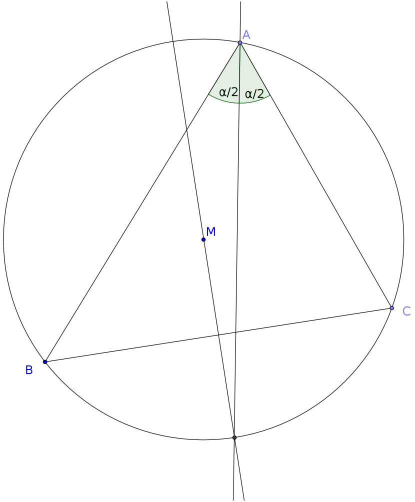
Satz: Der Punkt S und
der Mittelpunkt M
m''ogen auf der
gleichen Seite von
AB liegen. Dann gilt:

$$\gamma = 2\alpha$$

Wenn zwei Peripheriewinkel über verschiedenen Sehnen gleich groß sind, so sind die Sehnen gleich lang und dann auch die Bögen über den Sehnen.

Wenn zwei Peripheriewinkel über verschiedenen Sehnen gleich groß sind, so sind die Sehnen gleich lang und dann auch die Bögen über den Sehnen.

Insbesondere schneiden sich Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende auf dem Umkreis:


A
α/2
α/2
M
B
C

Es sei ABC ein Dreieck. Es sei A' der Schnittpunkt der Höhe durch A mit dem Umkreis. Es sei C' der Schnittpunkt der Höhe durch C mit dem Umkreis. Dann halbiert der Punkt B den Bogen $A'C'$.

Es sei ABC ein Dreieck. Es sei A' der Schnittpunkt der Höhe durch A mit dem Umkreis. Es sei C' der Schnittpunkt der Höhe durch C mit dem Umkreis. Dann halbiert der Punkt B den Bogen $A'C'$.

In der Tat, nach dem Satz über die Winkelsumme (V4) im Dreieck gilt:

$$\angle BAA' = \angle BCC'.$$

Die B''ogen
BC' und BA'
sind gleich lang.