# Die Zentralprojektion

Thomas Zink

19.7.2017

# 1.Die Zentralprojektion

Es sei $\mathbb{A}$ der Raum. Es sei $E \subset \mathbb{A}$ eine Ebene und $O$ ein, der nicht zu $E$ gehört.
Man definiert eine Abbildung

$$\pi : \mathbb{A} \to E$$

# 1.Die Zentralprojektion

Es sei $\mathbb{A}$ der Raum. Es sei $E \subset \mathbb{A}$ eine Ebene und $O$ ein, der nicht zu $E$ gehört.
Man definiert eine Abbildung

$$\pi : \mathbb{A} \to E$$

Wenn $P$ ein Punkt ist, so dass $OP$ eine Gerade ist, die $E$ schneidet, so definieren wir

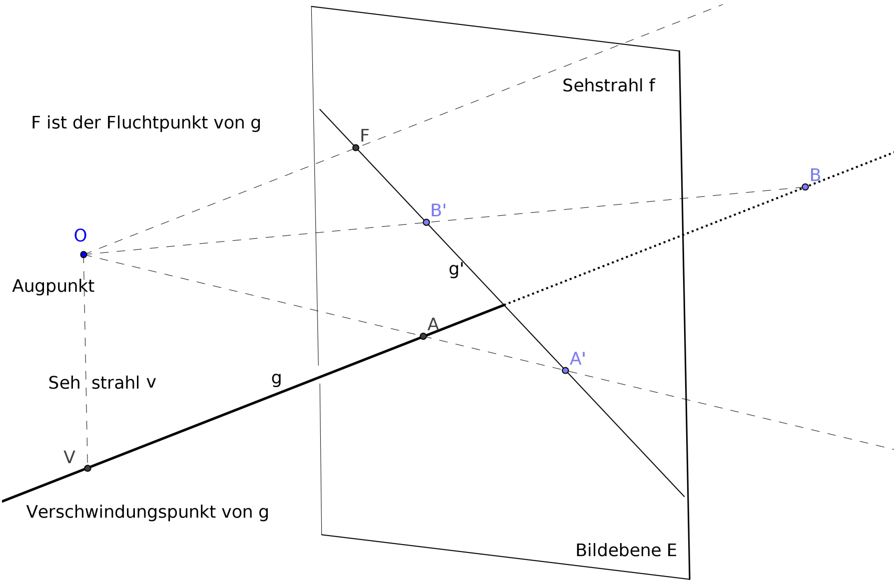
$$\pi(P) = E \cap OP.$$

Wenn $P$ in der Ebene $H$ liegt, die durch $O$ geht und parallel zu $E$ ist, so ist die Definition nicht sinnvoll.

Man nennt $\pi$ die Zentralprojektion mit dem Zentrum $O$. Man nennt $O$ auch den Augpunkt. Die Ebene $H$ nennt man die Verschwindungsebene. Für Punkte $P \in H$ ist $\pi(P)$ nicht definiert.

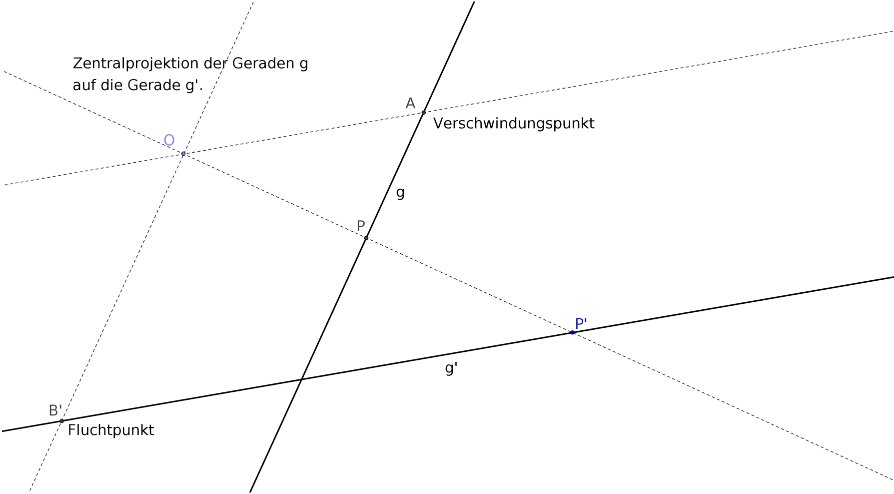
Man nennt $\pi$ die Zentralprojektion mit dem Zentrum $O$. Man nennt $O$ auch den Augpunkt. Die Ebene $H$ nennt man die Verschwindungsebene. Für Punkte $P \in H$ ist $\pi(P)$ nicht definiert.

Man soll sich vorstellen, dass $O$ das Auge eines Malers ist und $E$ die Leinwand. Wir schreiben $P' := \pi(P)$ für die Abbildung des Punktes $P$ auf der Leinwand.



Sehstrahl f
F ist der Fluchtpunkt von g
F
B
B'
O
g'
Augpunkt
A
A'
Seh strahl v
g
V
Verschwindungspunkt von g
Bildebene E

Wir betrachten auch Zentralprojektionen $\pi : g \to g'$ für zwei Geraden, die in einer Ebene liegen. Der Augpunkt soll dann weder auf der Geraden $g$ noch auf der Geraden $g'$ liegen.


Zentralprojektion der Geraden g
auf die Gerade g'.
A
Verschwindungspunkt
O
g
P
P'
g'
B'
Fluchtpunkt

Man stellt sich vor, dass der Verschwindungspunkt $A$ auf den unendlich fernen Punkt von $g'$ abgebildet wird, während der Fluchtpunkt $B' \in g'$ Bild des unendlich fernen Punktes vo $g$ ist.

$$\pi : g \cup \{\infty_g\} \longrightarrow g' \cup \{\infty_{g'}\},$$

wobei $\pi(P) = P'$, $\pi(A) = \infty_{g'}$, $\pi(\infty_g) = B'$.

Es sei $g$ eine Gerade. Es seien $A, B, C, D \in g$ vier verschiedene Punkte. Man wählt eine Projektion

$$\pi : g \to g' \tag{1}$$

so dass $\pi(A) = \infty_{g'}$.

Es sei $g$ eine Gerade. Es seien $A, B, C, D \in g$ vier verschiedene Punkte. Man wählt eine Projektion

$$\pi : g \to g' \tag{1}$$

so dass $\pi(A) = \infty_{g'}$.

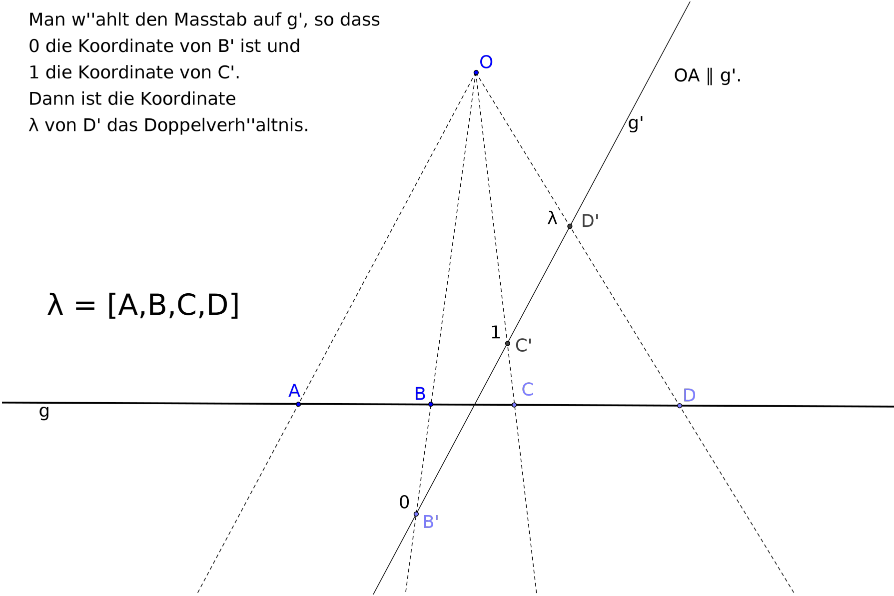
Das Teilverhältnis

$$\frac{D'B'}{C'B'}$$

heißt Doppelverhältnis $[A, B, C, D]$ der vier Punkte $A, B, C, D \in g$.

Man w''ahlt den Masstab auf g', so dass
0 die Koordinate von B' ist und
1 die Koordinate von C'.
Dann ist die Koordinate
λ von D' das Doppelverh''altnis.

$$\lambda = [A,B,C,D]$$



Bemerkung: Aus dem letzten Bild ergibt sich, dass das Doppelverhältnis die Werte $0$ und $1$ nicht annehmen kann.

Bemerkung: Aus dem letzten Bild ergibt sich, dass das Doppelverhältnis die Werte $0$ und $1$ nicht annehmen kann.

**Proposition**

*Das Doppelverhältnis $[A, B, C, D]$ ist unabhängig von der Wahl der Projektion $\pi$ unter (1). Man hat die Formel*

$$[A, B, C, D] = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$

Bemerkung: Aus dem letzten Bild ergibt sich, dass das Doppelverhältnis die Werte $0$ und $1$ nicht annehmen kann.

## Proposition

*Das Doppelverhältnis $[A, B, C, D]$ ist unabhängig von der Wahl der Projektion $\pi$ unter (1). Man hat die Formel*

$$[A, B, C, D] = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$

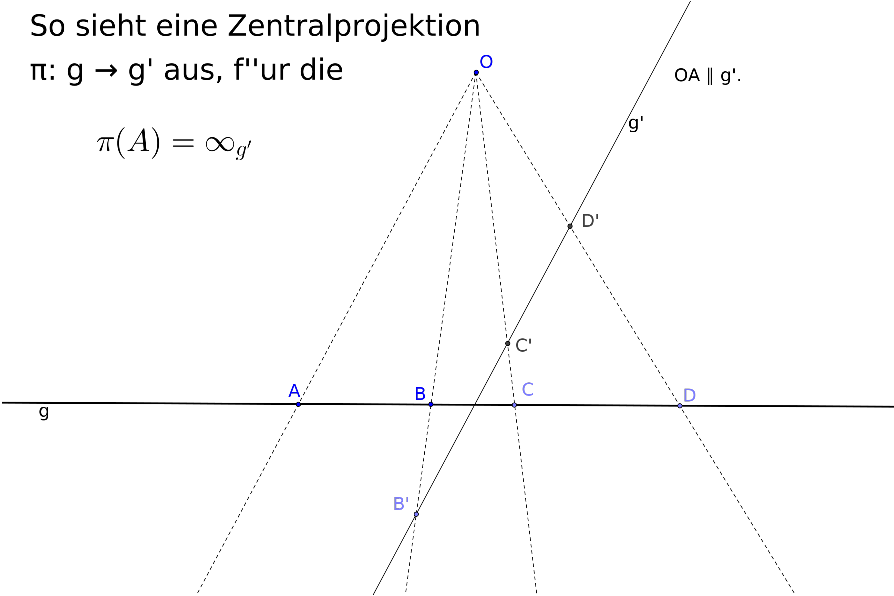
Beweis: Die Projektion $\pi$ sieht im allgemeinen wie folgt aus:

So sieht eine Zentralprojektion

π: g → g' aus, f''ur die

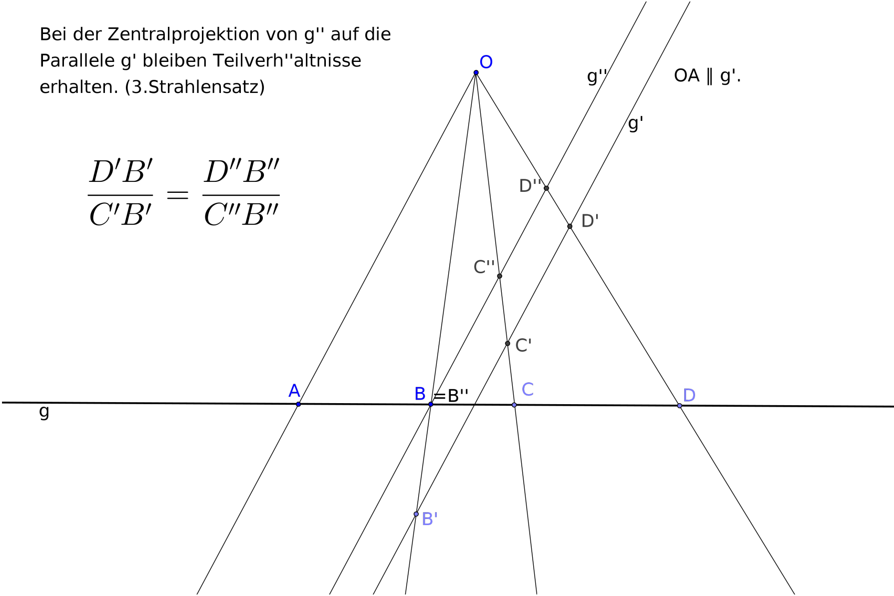
$$\pi(A) = \infty_{g'}$$

OA ∥ g'.



Bei der Zentralprojektion von g'' auf die Parallele g' bleiben Teilverh''altnisse erhalten. (3.Strahlensatz)

$$\frac{D'B'}{C'B'} = \frac{D''B''}{C''B''}$$



Man braucht die Proposition nur in dem Fall zu beweisen, wo die Gerade $g'$ durch den Punkt $B$ geht.

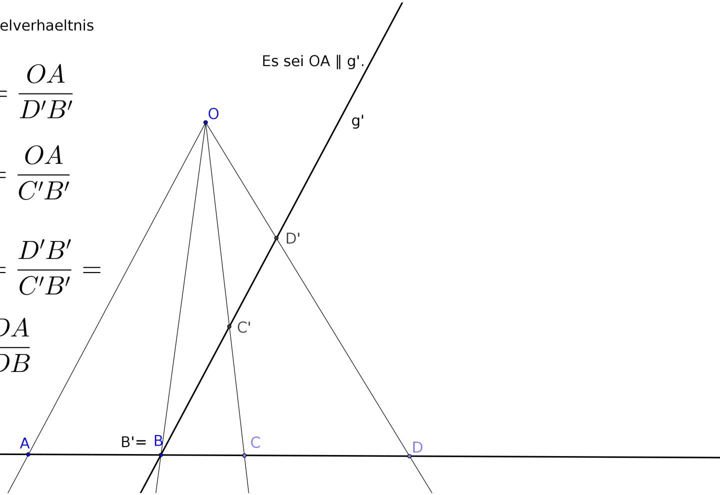
Das Doppelverhaeltnis

$$\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{D'B'}$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{C'B'}$$

$$[A, B, C, D] = \frac{D'B'}{C'B'} =$$

$$= \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

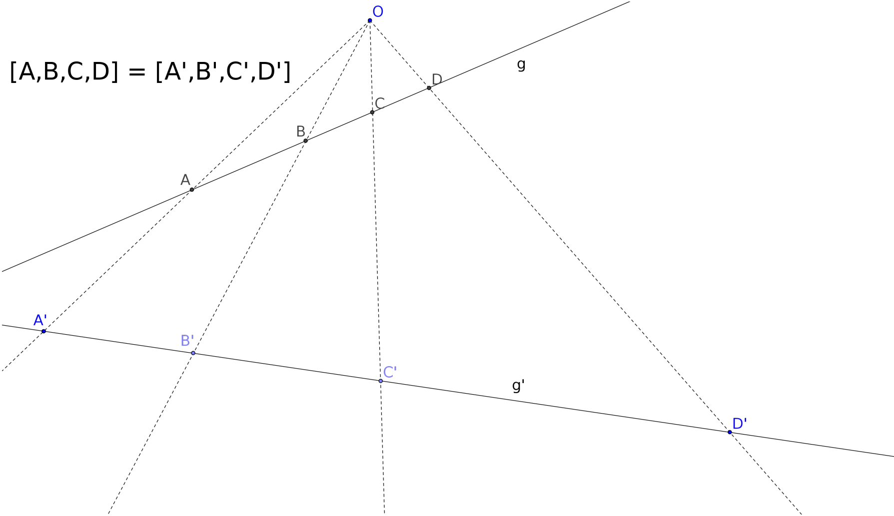


## Proposition

*Es sei* $\pi : g \to g'$ *eine Zentralprojektion von einer Geraden* $g$ *auf eine Gerade* $g'$ *von einem Augpunkt* $O$*.*
*Es seien* $A, B, C, D \in g$ *vier verschiedene Punkte. Es sei* $A' = \pi(A)$, $B' = \pi(B)$, $C' = \pi(C)$, $D' = \pi(D)$*.*
*Dann gilt:*

$$[A, B, C, D] = [A', B', C', D'].$$

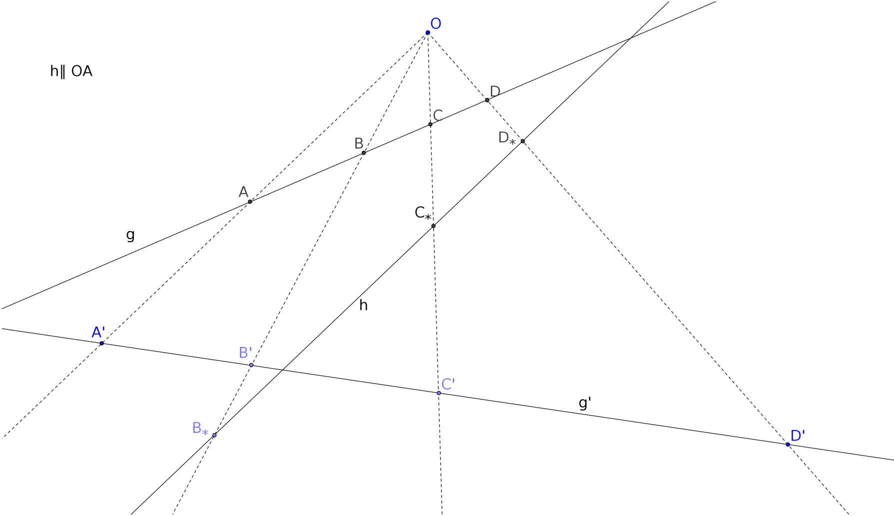
$$[A,B,C,D] = [A',B',C',D']$$



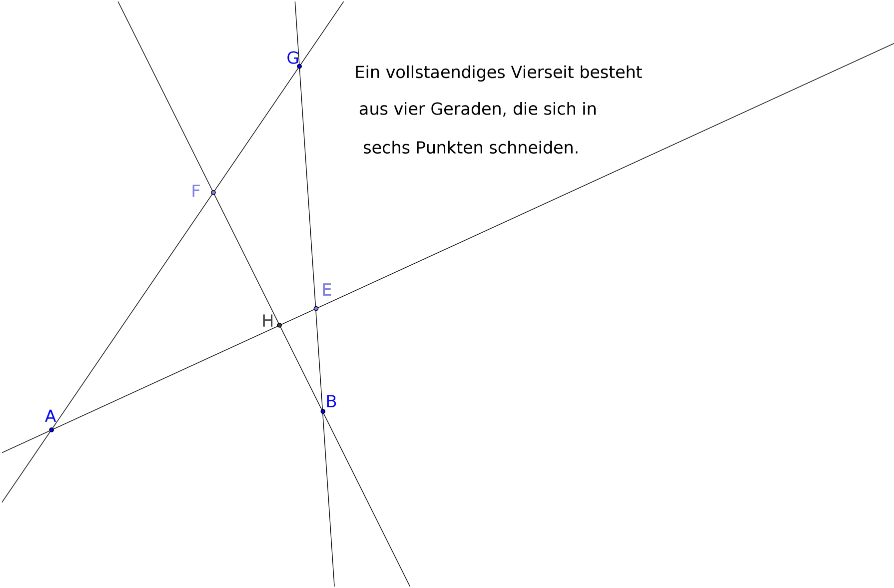
Man w"ahlt eine Gerade $h$, die Parallel zur Gerade $OAA'$ ist. Es seien $B_*$, $C_*$, $D_*$ die Schnittpunkte von $h$ mit den Projektionsstrahlen durch $O$. Dann gilt:

$$[A, B, C, D] = \frac{D_* B_*}{C_* B_*} = [A', B', C', D'].$$

$h \parallel OA$

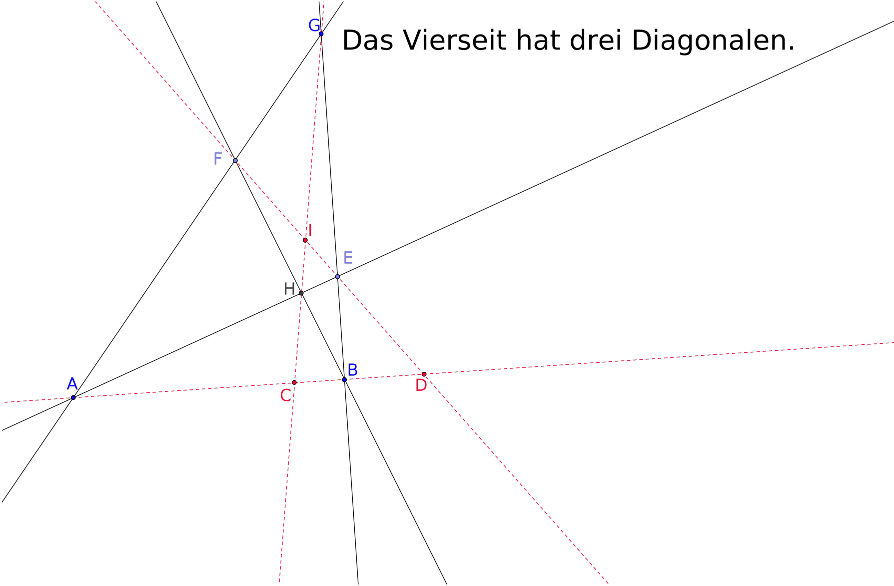


Ein vollständiges Vierseit besteht aus vier Geraden, die sich genau in sechs Punkten schneiden.
Ein vollständiges Vierseit hat drei Diagonalen.




Ein vollstaendiges Vierseit besteht aus vier Geraden, die sich in sechs Punkten schneiden.

Das Vierseit hat drei Diagonalen.



# Der Satz vom vollständigen Vierseit

## Proposition

*Wir betrachten ein Vierseit. Es sei $AB$ eine Diagonale des Vierseits. Die anderen beiden Diagonalen des Viersets mögen $AB$ in den Punkten $C$ und $D$ schneiden. Dann gilt*

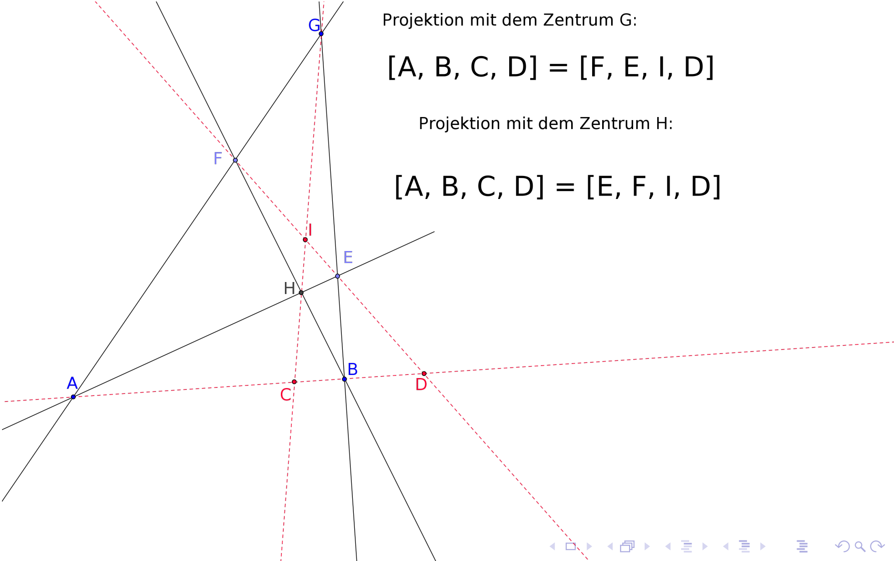
$$[A, B, C, D] = -1$$

Wenn das gilt folgt:

$$[A, B, C, D] = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1 \Leftrightarrow \frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|DA|}{|DB|}$$

Man sagt $C$ und $D$ liegen harmonisch bezüglich $\overline{AB}$.

# Beweis:




Projektion mit dem Zentrum G:

$$[A, B, C, D] = [F, E, I, D]$$

Projektion mit dem Zentrum H:

$$[A, B, C, D] = [E, F, I, D]$$

Es genügt zu beweisen, dass $\lambda := [A, B, C, D] = [A, B, C, D]^{-1}$. Daraus folgt $\lambda^2 = 1$ und daher $\lambda = \pm 1$. Da $\lambda$ den Wert $1$ nicht annehmen kann, gilt also $\lambda = -1$.

Es genügt zu beweisen, dass $\lambda := [A, B, C, D] = [A, B, C, D]^{-1}$. Daraus folgt $\lambda^2 = 1$ und daher $\lambda = \pm 1$. Da $\lambda$ den Wert $1$ nicht annehmen kann, gilt also $\lambda = -1$.

Es gilt

$$[F, E, I, D] = \frac{IF}{IE} : \frac{DF}{DE} = \left( \frac{IE}{IF} : \frac{DE}{DF} \right)^{-1} = [E, F, I, D]^{-1}.$$

Daher gilt nach der Zeichnung: $[A, B, C, D] = [A, B, C, D]^{-1}$.

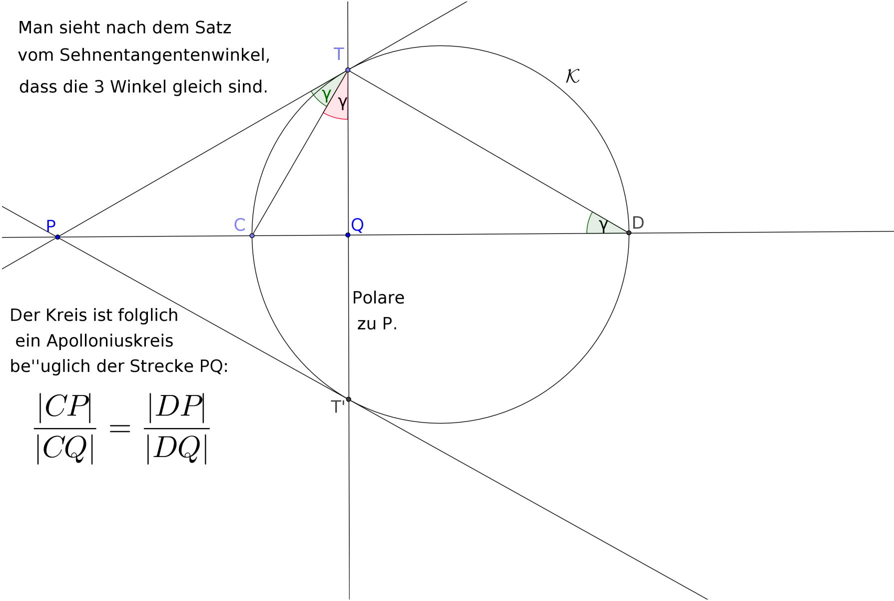
# Die Polare

Es sei $P$ ein Punkt außerhalb eines Kreises $\mathcal{K}$. Es seien $T$ und $T'$ die Berührungpunkte der Tangenten von $P$ aus. Es sei $Q$ der Fußpunkt der Mittelsenkrechte von $P$ auf $\overline{TT'}$. Die Gerade $PQ$ möge den Kreis $\mathcal{K}$ in den Punkten $C$ und $D$ schneiden. Dann gilt

$$[P,Q,C,D] = [C,D,P,Q] = -1. \tag{2}$$

Das folgt aus folgendem Bild:

Man sieht nach dem Satz
vom Sehnentangentenwinkel,
dass die 3 Winkel gleich sind.




Der Kreis ist folglich
ein Apolloniuskreis
be''uglich der Strecke PQ:

$$\frac{|CP|}{|CQ|} = \frac{|DP|}{|DQ|}$$

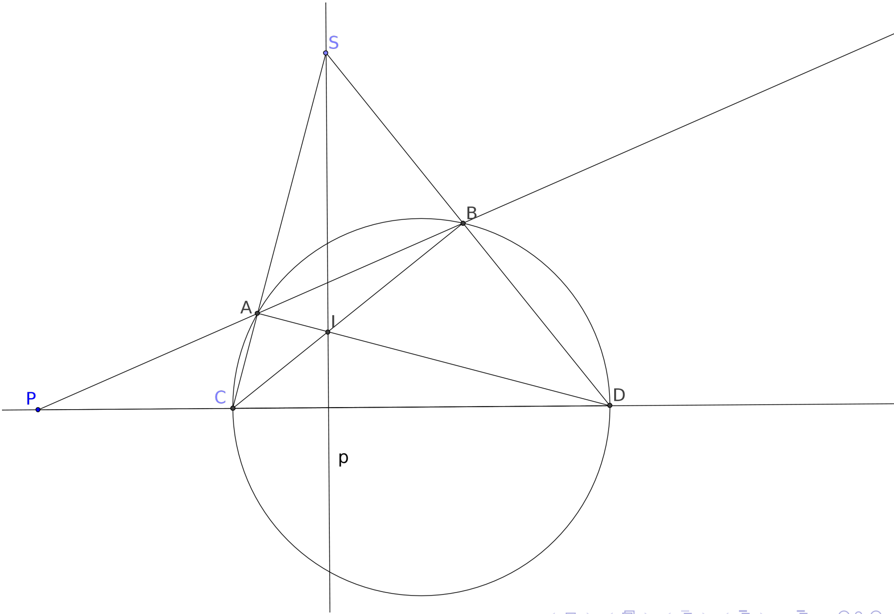
## Der Satz von Steiner

**Proposition**

*Es sei $AB$ eine Sehne des Kreises $\mathcal{K}$, die durch den Punkt $P$ geht. Es sei $P'$ der Schnittpunkt von $AB$ mit der Polare zu $P$. Dann gilt:*

$$[P, P', A, B] = -1.$$

Zum Beweis zeichnet man die folgende Figur:


S
B
A
I
P
C
D
p

Wir betrachten das Dreieck $CDS$. Nach dem Satz des Thales sind $CB$ und $DA$ Höhen in diesem Dreieck. Da sich die Höhen in einem Dreieck in einem Punkt schneiden, ist auch $p$ eine Höhe. Es sei $Q$ der Durchschnitt von $p$ mit $CD$. Nach dem Satz vom vollständigen Vierseit für $SC$, $SD$, $AD$, $BC$ gilt

$$[C.D, P, Q] = -1.$$

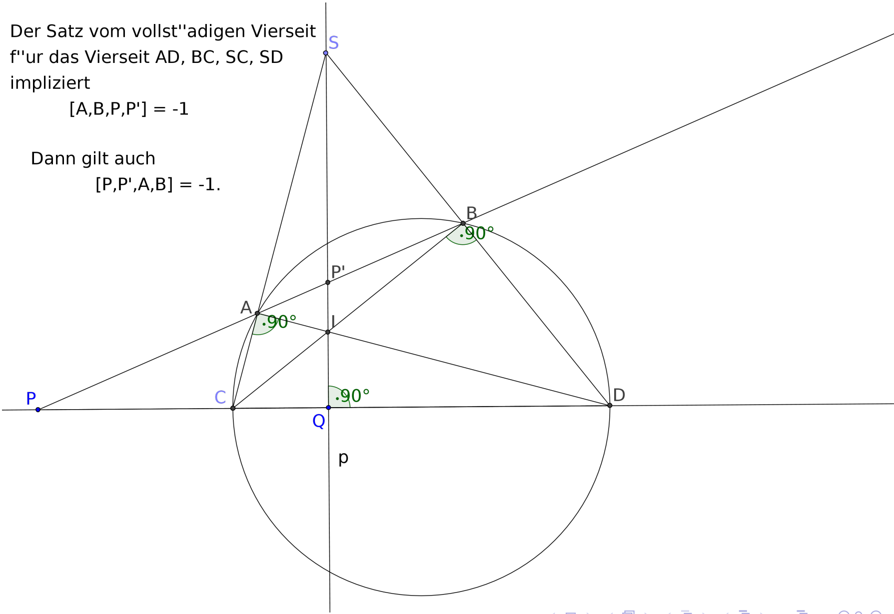
Wenn man das mit (2) vergleicht, folgt dass $p$ die Polare zu $P$ ist. Man erhält folgendes Bild:

Der Satz vom vollst''adigen Vierseit
f''ur das Vierseit AD, BC, SC, SD
impliziert

[A,B,P,P'] = -1

Dann gilt auch

[P,P',A,B] = -1.



Wir legen durch einen Punkt $P$ außerhalb eines Kreises $\mathcal{K}$ zwei Sehnen $AB$ und $CD$ an den Kreis.
Dann liegt der Schnittpunkt der Diagonalen des Kreisvierecks $ABDC$ auf der Polare $p$ zu $P$.

Nach dem Satz vom
vollst''andigen Vierseit gilt:
$[P,P_1,C,D] = -1$, $[P,P_2,C,D] = -1$.

Nach dem Satz von Steiner liegen
$P_1$ und $P_2$ auf der Polare.

Also ist SI die Polare zu P.