Elementare Geometrie Vorlesung 6

Thomas Zink

10.5.2017

Definition

Es sei E eine Ebene. Eine Abbildung $f : E \to E$ heißt eine Bewegung, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

(1) *f ist bijektiv.*

(2) *f bildet Geraden auf Geraden ab.*

(3) *Für alle $A, B \in E$ gilt:*

$$|f(A)f(B)| = |AB|$$

(4) *Es liege P rechts (bzw. links) von der orientierten Strecke $\overline{AB}$. Dann liegt $f(P)$ rechts (bzw. links) von der orientierten Strecke $\overline{f(A)f(B)}$.*

Proposition

Es seien $f, g : E \to E$ *zwei Bewegungen. Dann ist auch das Kompositum* $f \circ g$ *eine Bewegung.*
Es sei $f : E \to E$ *eine Bewegung mit zwei verschiedenen Fixpunkten. Dann gilt* $f = \mathrm{id}_E$.

3. Beweis des ersten Teils der Proposition

Wir zeigen, dass $f \circ g$ die Eigenschaft (3) besitzt. Es seien $A, B \in E$. Es sei $A' = g(A)$ und $B' = g(B)$. Dann gilt

$$(f \circ g)(A) = f(g(A)) = f(A'), \quad (f \circ g)(B) = f(g(B)) = f(B').$$

Da f und g die Eigenschaft (3) haben folgt:

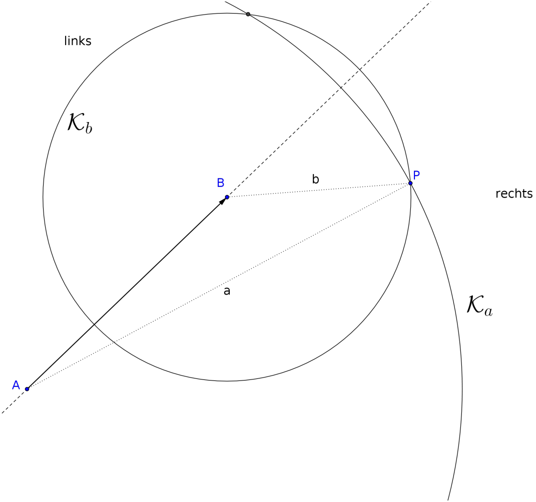
$$|(f \circ g)(A)(f \circ g)(B)| = |f(A')f(B')| = |A'B'| = |g(A)g(B)| = |AB|.$$

4. Beweis der Proposition 2.Teil

Es sei $f(A) = A$, $f(B) = B$, wo $A \neq B$. Es sei P ein Punkt, der rechts von der orientierten Strecke $\overline{AB}$ liegt. Es sei

$$a = |AP|, \quad b = |BP|.$$

Es sei $\mathcal{K}_a$ der Kreis um A mit dem Radius a und es sei $\mathcal{K}_b$ der Kreis um B mit dem Radius b. Genau einer der beiden Schnittpunkte $\mathcal{K}_a \cap \mathcal{K}_b$ liegt rechts von $\overline{AB}$ und das ist P.


links
$\mathcal{K}_b$
B
b
P
rechts
a
$\mathcal{K}_a$
A

5.Beweis der Proposition 2.Teil

Es gilt:

$$a = |f(A)f(P)| = |Af(P)|, \quad b = |f(B)f(P)| = |Bf(P)|$$

Es folgt:

$$f(P) \in \mathcal{K}_a \cap \mathcal{K}_b.$$

Da $f(P)$ rechts von $\overline{f(A)f(B)} = \overline{AB}$ liegt, folgern wir $f(P) = P$. Also: Wenn P außerhalb einer Geraden liegt auf der f zwei Fixpunkte hat, so gilt $f(P) = P$. Folglich $f = \mathrm{id}_E$. $Q.E.D.$

Jede Translation und jede Drehung ist offensichtlich eine Bewegung. Damit ist auch jedes Kompositum von Translationen und Drehungen eine Bewegung.

Proposition

Es seien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei Strecken in E, so dass

$$|AB| = |CD| \neq 0.$$

Dann gibt es genau eine Bewegung $f : E \to E$, so dass $f(A) = C$ und $f(B) = D$.

7.Beweis der Proposition

Wir zeigen zuerst, dass es höchstens eine Bewegung mit den geforderten Eigenschaften geben kann. Es sei g eine Bewegung, so dass $g(A) = C$ und $g(B) = D$. Dann gilt $g^{-1}(C) = A$ und $g^{-1}(D) = B$. Folglich hat die Bewegung $g^{-1} \circ f$ zwei verschiedene Fixpunkte A und B. Nach Proposition Blatt 3 folgt

$$g^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \,.$$

Dann folgt

$$g = g \circ \mathrm{id}_E = g \circ g^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \circ f = f.$$

8.Beweis der Proposition

Wir zeigen jetzt die Existenz der Bewegung f. Es sei $T = \overrightarrow{AC}$. Es sei $B' = T(B)$. Wir haben:

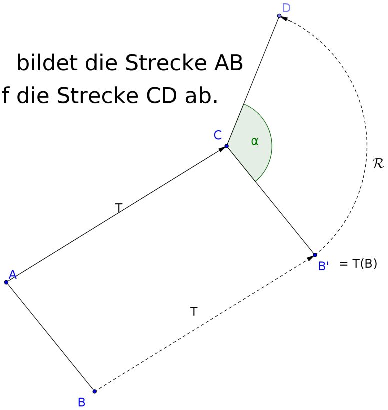
$$|CB'| = |T(A)T(B)| = |AB| = |CD|.$$

Also liegen B' und D auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt C und dem Radius $r := |AB|$. Also existiert eine Drehung $\mathcal{R}$ um den Punkt C, so dass $\mathcal{R}(B') = D$. Dann gilt:

$$(\mathcal{R} \circ T)(A) = C, \quad (\mathcal{R} \circ T)(B) = D.$$

Also ist $f := \mathcal{R} \circ T$ wie gewünscht. $Q.E.D.$

$\mathcal{R} \circ \mathrm{T}$ bildet die Strecke AB auf die Strecke CD ab.



9.Eine Bewegung mit Fixpunkt ist eine Drehung

Corollary

Es sei $f : E \to E$ *eine Bewegung, die einen Fixpunkt besitzt. Dann ist* f *eine Drehung.*

10. Beweis des Korollars

Beweis: Es sei F der Fixpunkt. Es sei $A \neq F$ ein weiterer Punkt. Dann gilt

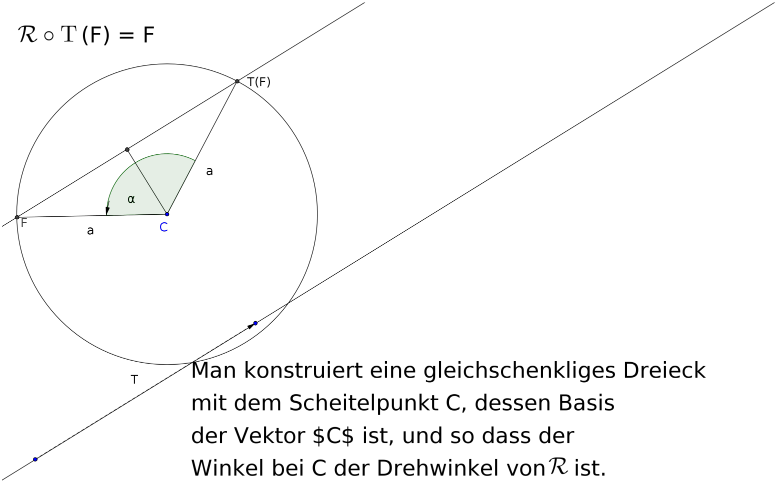
$$|AF| = |f(A)f(F)| = |f(A)F|.$$

Also liegen A und $f(A)$ aus einem Kreis mit dem Mittelpunkt F. Folglich existiert eine Drehung $\mathcal{R}$ mit dem Fixpunkt F, so dass $\mathcal{R}(A) = f(A)$. Da es nach der Proposition Blatt 6 höchstens eine Bewegung gibt, die die orientierte Strecke FA auf $Ff(A)$ abbildet, folgt

$$f = \mathcal{R}, \qquad Q.E.D.$$

11. Fixpunkt von $\mathcal{R} \circ T$

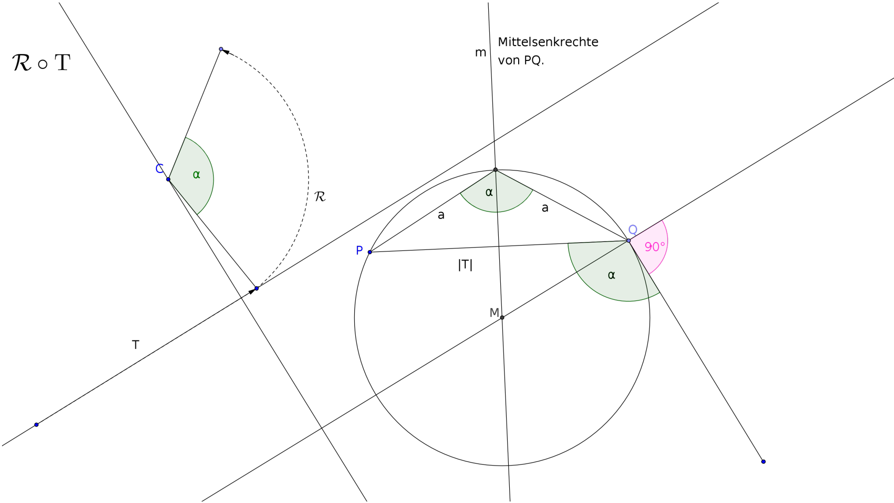
$\mathcal{R} \circ \mathrm{T}\,(F) = F$



Man konstruiert eine gleichschenkliges Dreieck mit dem Scheitelpunkt C, dessen Basis der Vektor C ist, und so dass der Winkel bei C der Drehwinkel von $\mathcal{R}$ ist.

12. Fixpunkt von $\mathcal{R} \circ T$

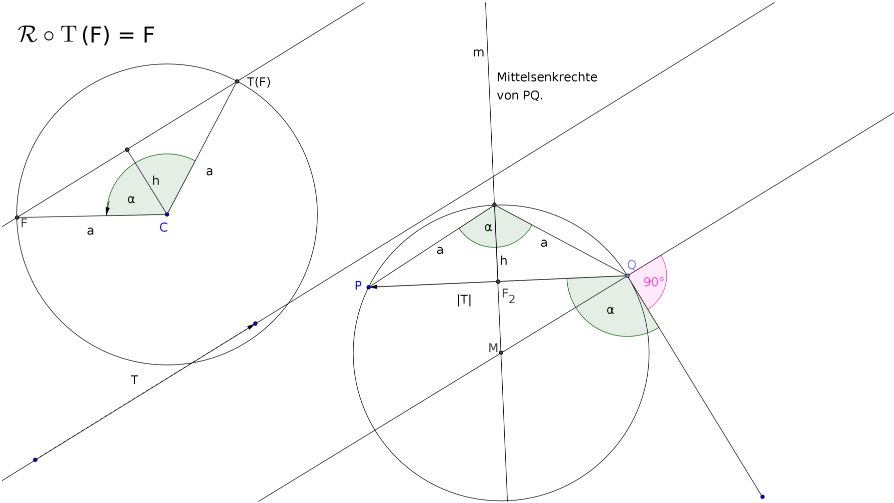
.



13. Fixpunkt von $\mathcal{R} \circ T$

.

$\mathcal{R} \circ \mathrm{T}\,(F) = F$



14.Eine Bewegung ohne Fixpunkt ist eine Translation

Proposition

Es sei $f : E \to E$ eine Bewegung, die keinen Fixpunkt besitzt. Dann ist f eine Translation.

Folgender Begriff ist nützlich.

Definition

Es sei $f : E \to E$ eine Bewegung. Eine Gerade $g \subset E$ heißt invariant, wenn $f(g) = g$.

Die letzte Gleichung bedeutet:

$$P \in g \quad \Rightarrow \quad f(P) \in g$$

15. Invariante Geraden

Lemma

Wenn sich zwei verschiedene invariante Geraden g und h von f in genau einem Punkt P schneiden, so ist P ein Fixpunkt von f.

15. Invariante Geraden

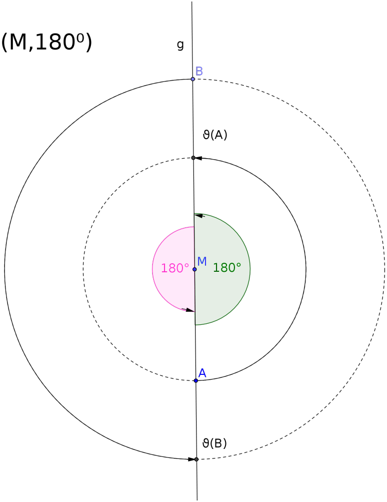
Lemma

Wenn sich zwei verschiedene invariante Geraden g und h von f in genau einem Punkt P schneiden, so ist P ein Fixpunkt von f.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $P = g \cap h$ und weiter $f(P) \in g$ und $f(P) \in h$. Also gilt $f(P) \in g \cap h$. Da es nur einen Schnittpunkt gibt, finden wir $f(P) = P$.
Beispiel: Es sei $M \in E$ und $\vartheta = D(M, 180^o)$ die Drehung um 180^O. Eine Gerade ist genau dann ϑ-invariant, wenn sie durch M geht.

16. Eine 180^o-Drehung heißt Punktspieglung

Eine Drehung D(M,180^0)
heisst auch
Punktspieglung
um M

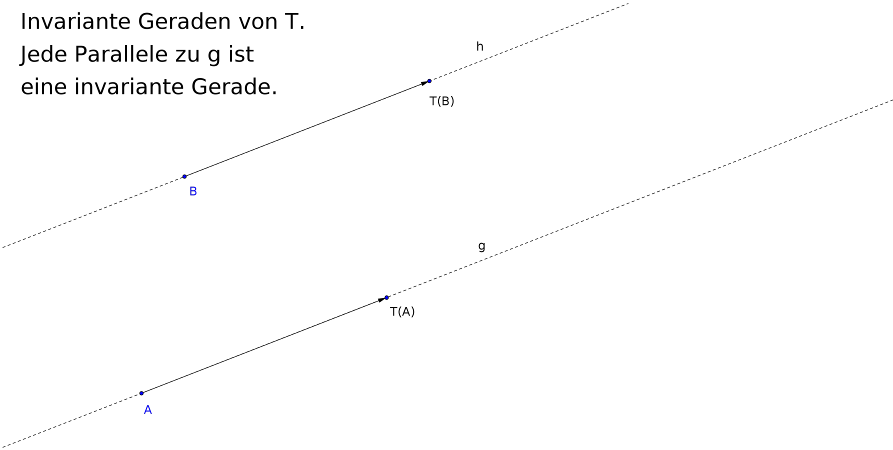


17. Die Invarianten Geraden einer Translation

Es sei $T : E \to E$ eine Translation, so dass $T \neq \mathrm{id}_E$. Dann sind die invarianten Geraden genau die Geraden der Form $AT(A)$. Durch jeden Punkt von E geht genau eine invariante Gerade. Insbesondere sind alle invearianten Geraden parallel.

18. Die Invarianten Geraden einer Translation

Invariante Geraden von T.
Jede Parallele zu g ist
eine invariante Gerade.



18. Beweis der Proposition Blatt 14

f möge keinen Fixpunkt haben. Es sei $A \in E$. Wir behaupten, dass die Punkte $A, f(A), f^2(A) := (f \circ f)(A)$ auf einer Geraden liegen. Wenn das nicht der Fall ist liegen sie auf einem Kreis und sind alle verschieden. Da

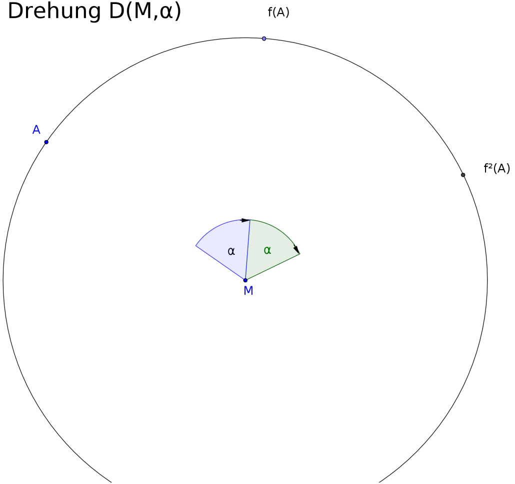
$$|Af(A)| = |f(A)f^2(A)|,$$

gibt es eine Drehung ϑ um den Mittelpunkt M des Kreises, so dass

$$\vartheta(A) = f(A), \quad \vartheta(f(A)) = f^2(A).$$

19. Beweis der Proposition Blatt 14

ϑ ist die Drehung $D(M,\alpha)$



20. Beweis der Proposition Blatt 14

Da sowohl f als auch ϑ die Strecke $\overline{Af(A)}$ auf die Strecke $\overline{Af(A)}$ abbilden, folgt $f = \vartheta$. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass f keinen Fixpunkt hat.

Die Punkte A, $f(A)$, $f^2(A)$ liegen also stets auf einer Geraden.

19. Beweis der Proposition Blatt 14

Es sei g die Gerade $Af(A)$. Auf der Geraden $f(g)$ liegen die Punkte $f(A), f^2(A) \in g$. Also gilt $f(g) = g$.

19. Beweis der Proposition Blatt 14

Es sei g die Gerade $Af(A)$. Auf der Geraden $f(g)$ liegen die Punkte $f(A), f^2(A) \in g$. Also gilt $f(g) = g$.

Also geht durch jeden Punkt $A \in E$ eine invariante Gerade und alle invarianten Geraden sind parallel, da f keine Fixpunkte hat.

19. Beweis der Proposition Blatt 14

Wir fixieren einen Punkt $P \in E$ und betrachten die Translation $S : E \to E$, so dass $S(f(P)) = P$. Die Translation S hat die gleichen invarianten Geraden wir f, nämlich die Parallelen zu $Pf(P)$. Damit hat auch $S \circ f$ diese invarianten Geraden.

19. Beweis der Proposition Blatt 14

Wir fixieren einen Punkt $P \in E$ und betrachten die Translation $S : E \to E$, so dass $S(f(P)) = P$. Die Translation S hat die gleichen invarianten Geraden wir f, nämlich die Parallelen zu $Pf(P)$. Damit hat auch $S \circ f$ diese invarianten Geraden.

Andrerseits hat $S \circ f$ den Fixpunkt P und somit eine Drehung ϑ. Es sei h eine invariante Gerade, die nicht durch P geht. Da $\vartheta(h) = h$ muss der Drehwinkel von ϑ gleich 0 sein.