Elementare Geometrie Vorlesung 7

Thomas Zink

15.5.2017

1.Bewegungen

Proposition

Es seien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei Strecken in E, so dass

$$|AB| = |CD| \neq 0.$$

Dann gibt es genau eine Bewegung $f : E \to E$, so dass $f(A) = C$ und $f(B) = D$.

2.Eine Bewegung mit Fixpunkt ist eine Drehung

Corollary

Es sei $f : E \to E$ eine Bewegung, die einen Fixpunkt besitzt. Dann ist f eine Drehung.

3.Eine Bewegung ohne Fixpunkt ist eine Translation

Proposition

Es sei $f : E \to E$ *eine Bewegung, die keinen Fixpunkt besitzt. Dann ist* f *eine Translation.*

Folgender Begriff ist nützlich.

Definition

Es sei $f : E \to E$ *eine Bewegung. Eine Gerade* $g \subset E$ *heißt invariant, wenn* $f(g) = g$.

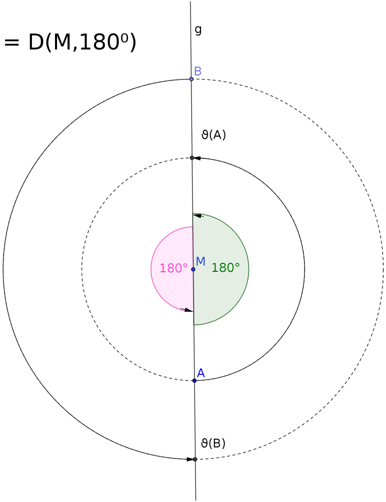
Die letzte Gleichung bedeutet:

$$P \in g \quad \Rightarrow \quad f(P) \in g$$

4. Eine 180^o-Drehung heißt Punktspieglung

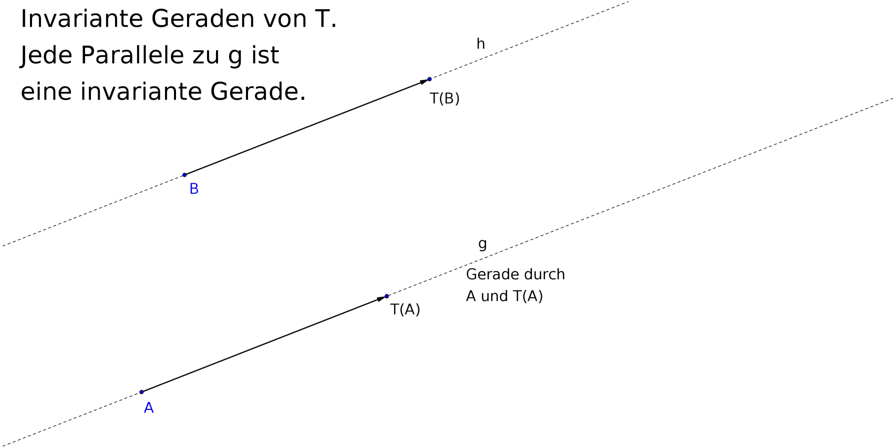
Eine Drehung ϑ = D(M,180⁰)
heisst auch
Punktspieglung
um M.

Es sei g
eine Gerade
durch M.
Dann gilt:
ϑ (g) = g.



5. Die Invarianten Geraden einer Translation

Invariante Geraden von T.
Jede Parallele zu g ist
eine invariante Gerade.



6. Beweis der Proposition Blatt 3

f möge keinen Fixpunkt haben. Es sei $A \in E$. Wir behaupten, dass die Punkte $A, f(A), f^2(A) := (f \circ f)(A)$ auf einer Geraden liegen. Wenn das nicht der Fall ist liegen sie auf einem Kreis und sind alle verschieden. Da

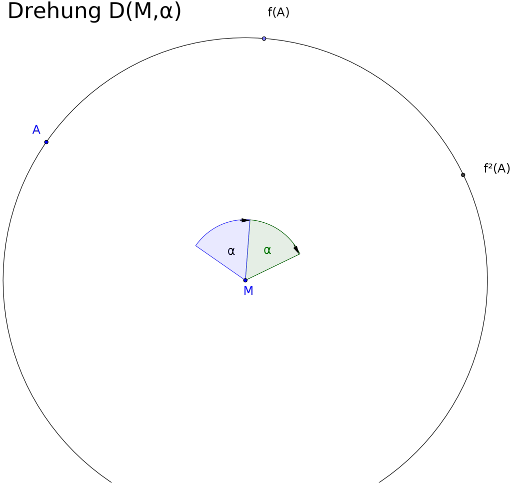
$$|Af(A)| = |f(A)f^2(A)|,$$

gibt es eine Drehung ϑ um den Mittelpunkt M des Kreises, so dass

$$\vartheta(A) = f(A), \quad \vartheta(f(A)) = f^2(A).$$

7. Beweis der Proposition Blatt 3

ϑ ist die Drehung $D(M,\alpha)$



8. Beweis der Proposition Blatt 3

Da sowohl f als auch ϑ die Strecke $\overline{Af(A)}$ auf die Strecke $\overline{f(A)f^2(A)}$ abbilden, folgt $f = \vartheta$. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass f keinen Fixpunkt hat.

Die Punkte A, $f(A)$, $f^2(A)$ liegen also stets auf einer Geraden.

9. Beweis der Proposition Blatt 3

Es sei g die Gerade $Af(A)$. Auf der Geraden $f(g)$ liegen die Punkte $f(A), f^2(A) \in g$. Also gilt $f(g) = g$.

9. Beweis der Proposition Blatt 3

Es sei g die Gerade $Af(A)$. Auf der Geraden $f(g)$ liegen die Punkte $f(A), f^2(A) \in g$. Also gilt $f(g) = g$.

Also geht durch jeden Punkt $A \in E$ eine invariante Gerade und alle invarianten Geraden sind parallel, da f keine Fixpunkte hat.

10. Beweis der Proposition Blatt 3

Wir fixieren einen Punkt $P \in E$ und betrachten die Translation $S : E \to E$, so dass $S(f(P)) = P$. Die Translation S hat die gleichen invarianten Geraden wir f, nämlich die Parallelen zu $Pf(P)$. Damit hat auch $S \circ f$ diese invarianten Geraden.

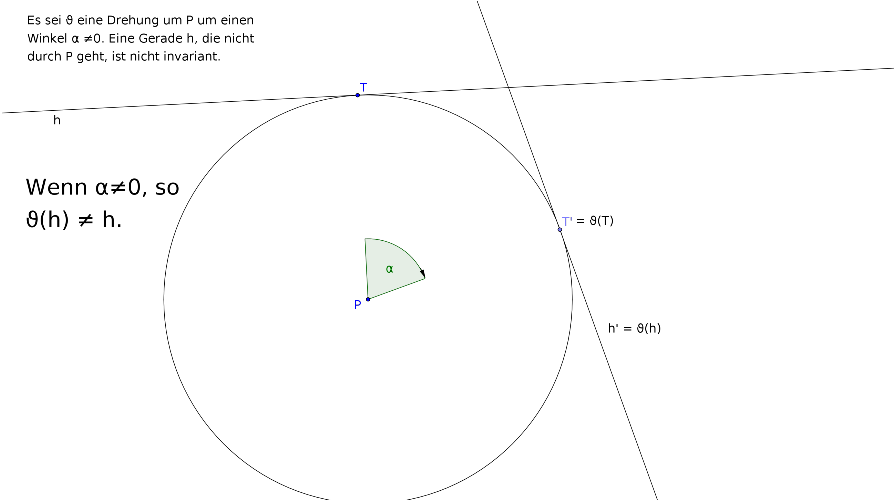
10. Beweis der Proposition Blatt 3

Wir fixieren einen Punkt $P \in E$ und betrachten die Translation $S : E \to E$, so dass $S(f(P)) = P$. Die Translation S hat die gleichen invarianten Geraden wir f, nämlich die Parallelen zu $Pf(P)$. Damit hat auch $S \circ f$ diese invarianten Geraden.

Andrerseits hat $S \circ f$ den Fixpunkt P und ist somit eine Drehung ϑ. Es sei h eine invariante Gerade, die nicht durch P geht. Da $\vartheta(h) = h$ muss der Drehwinkel von ϑ gleich 0 sein.

Es sei ϑ eine Drehung um P um einen Winkel α ≠0. Eine Gerade h, die nicht durch P geht, ist nicht invariant.

Wenn $\alpha \neq 0$, so $\vartheta(h) \neq h$.



11.Bewegungen sind Translationen oder Drehungen

Wir finden $S \circ f = \vartheta = \mathrm{id}_E$. Wenn wir die Gleichung mit S^{-1} multiplizieren, so folgt
$$S^{-1} = f.$$
Also ist f eine Translation. Aus den letzten Propositionen folgt:

11.Bewegungen sind Translationen oder Drehungen

Wir finden $S \circ f = \vartheta = \mathrm{id}_E$. Wenn wir die Gleichung mit S^{-1} multiplizieren, so folgt

$$S^{-1} = f.$$

Also ist f eine Translation. Aus den letzten Propositionen folgt:

Theorem

Eine Bewegung $f : E \to E$ ist eine Drehung oder eine Translation.

12. Bewegungen erhalten Drehwinkel

Proposition

Es sei $f : E \to E$ eine Bewegung. Es seien s und t Strahlen in der Ebene E. Dann gilt

$$\sphericalangle(s, t) = \sphericalangle(f(s), f(t))$$

12. Bewegungen erhalten Drehwinkel

Proposition

Es sei $f : E \to E$ eine Bewegung. Es seien s und t Strahlen in der Ebene E. Dann gilt

$$\sphericalangle(s,t) = \sphericalangle(f(s), f(t))$$

Wir beweisen jetzt, dass der Drehwinkel $\sphericalangle(s, f(s))$ für alle Strahlen in der Ebene E gleich groß ist.

13.Der Drehwinkel von Bewegungen

Es sei t ein weiterer Strahl in E. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sphericalangle(t,f(t)) &= \sphericalangle(t,s)+\sphericalangle(s,f(s))+\sphericalangle(f(s),f(t))\\ &= \sphericalangle(t,s)+\sphericalangle(s,f(s))+\sphericalangle(s,t) \qquad = \sphericalangle(s,f(s))\end{aligned}$$

13.Der Drehwinkel von Bewegungen

Es sei t ein weiterer Strahl in E. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sphericalangle(t, f(t)) &= \sphericalangle(t, s) + \sphericalangle(s, f(s)) + \sphericalangle(f(s), f(t)) \\ &= \sphericalangle(t, s) + \sphericalangle(s, f(s)) + \sphericalangle(s, t) \qquad = \sphericalangle(s, f(s))\end{aligned}$$

Definition

Es sei $f : E \to E$ eine Bewegung. Wir definieren den Drehwinkel

$$\vartheta(f) = \sphericalangle(s, f(s))$$

wobei s ein beliebig gewählter Strahl von E ist.

14. Komposita von Bewegungen

Proposition

Es seien $f, g : E \to E$ *zwei Bewegungen. Dann gilt:*

$$\vartheta(f \circ g) = \vartheta(f) + \vartheta(g).$$

Eine Bewegung f *ist eine Translation, wenn* $\vartheta(f) = 0$ *und eine Drehung, wenn* $\vartheta(f) \neq 0$.

15. Beweis zu Blatt 14

Wir wählen einen Strahl s. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\vartheta(f \circ g) = \\
&\sphericalangle(s, (f \circ g)(s)) = \sphericalangle(s, g(s)) + \sphericalangle(g(s), f(g(s))) \\
&= \vartheta(g) + \vartheta(f).
\end{aligned}
$$

15. Beweis zu Blatt 14

Wir wählen einen Strahl s. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\vartheta(f \circ g) = \\
&\qquad \sphericalangle(s, (f \circ g)(s)) = \sphericalangle(s, g(s)) + \sphericalangle(g(s), f(g(s))) \\
&\qquad = \vartheta(g) + \vartheta(f).
\end{aligned}$$

Die zweite Aussage der Proposition ist klar, weil eine Bewegung eine Translation oder eine Drehung ist.

16. Drehung einer Translation

Es sei $D = D(F, \phi) : E \to E$ die Drehung um den Punkt F und um den Winkel ϕ. Dann ist $D^{-1} = D(F, -\phi)$ die inverse Abbildung:

$$D(A) = B \quad \Leftrightarrow \quad D^{-1}(B) = A, \qquad A, B \in E.$$

Proposition

Es seien $P, Q \in E$. Es gilt

$$D \circ \vec{PQ} \circ D^{-1} = \overrightarrow{D(P)D(Q)}$$

Drehung einer Translation

Der Drehwinkel des Kompositums $D \circ \overrightarrow{PQ} \circ D^{-1}$ ist

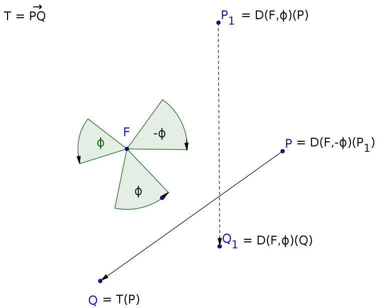
$$\vartheta(D) + \vartheta(\overrightarrow{PQ}) + \vartheta(D^{-1}) = \phi + 0 - \phi = 0.$$

Also ist dieses Kompositum eine Translation. Wir haben

$$D \circ \overrightarrow{PQ} \circ D^{-1}(D(P)) = D \circ \overrightarrow{PQ}(P) = D(Q).$$

Damit ist das Kompositum $\overrightarrow{D(P)D(Q)}$.

Drehung einer Translation



17. Das Parallelogramm

Es seien $A, B, C, D \in E$ vier Punkte in einer Ebene E, die nicht auf einer Geraden liegen und so dass

$$AB \parallel DC, \quad BC \parallel AD.$$

Dann ist $ABCD$ ein Parallelogramm.
Wenn $A, B, C, D \in E$ vier Punkte in einer Ebene E sind, die nicht auf einer Geraden liegen, so ist $ABCD$ genau dann ein Parallelogramm, wenn

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

18.Das Parallelogramm

Es sei $T = \vec{AB}$. Dann gilt $T(A) = B$ und $T(D) = C$.

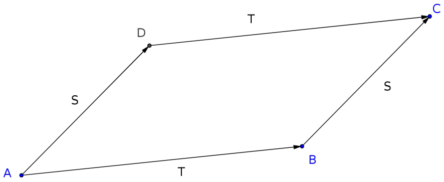
Es sei $S = \vec{BC}$. Dann gilt $S(B) = C$ und $S(A) = D$.

Also gilt : $T = \vec{AB} = \vec{DC}, \quad S = \vec{BC} = \vec{AD}.$

Es gilt: $(S \circ T)\,(A) = S(B) = C, \quad (T \circ S)(A) = T(D) = C.$

$S \circ T = T \circ S$

Denn beide Seiten sind Translationen, die A auf C abbilden.



19. Mittelpunkt des Parallelogramm

Proposition

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Es sei M der Schnittpunkt der Geraden AC und BD. Dann halbiert M die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.

Beweis: In einem Parallelogramm gilt:

$$|AB| = |CD|$$

Also gibt es eine Bewegung ρ, so dass

$$\rho(A) = C, \qquad \rho(B) = D.$$

20. Mittelpunkt des Parallelogramms

Es sei $s = \overset{\mapsto}{AB}$. Nach Definition gilt $\rho(s) = \overset{\mapsto}{CD}$. Wir finden der Drehwinkel von ρ:

$$\vartheta(\rho) = \sphericalangle(s, \rho(s)) = \sphericalangle(\overset{\mapsto}{AB}, \overset{\mapsto}{CD}) = 180^o.$$

Also ist ρ eine Drehung um 180^o und ihr Fixpunkt M hat die gewünschten Eigenschaften.

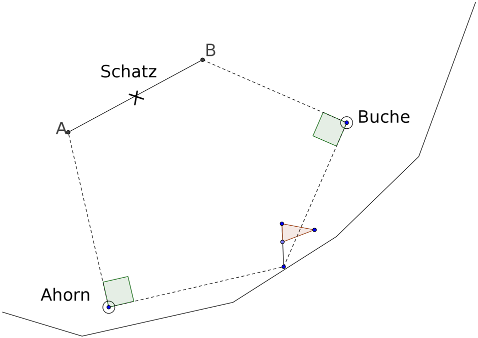
21.Aufgabe: Schatzsuche

1) Für einen Ausflug hat ein Lehrer ein Schatzsuchespiel vorbereitet:
“Fahrt mit dem Boot zur Insel. Am Ufer findet ihr ein rotes Fähnchen, dort steigt ihr aus. Es gibt auf der Insel einen Ahornbaum und eine Buche.

22.Aufgabe: Schatzsuche

Zählt die Schritte vom Fähnchen bis zum Ahornbaum, dort biegt ihr im rechten Winkel nach rechts ab, und geht nun die gleiche Anzahl von Schritten geradeaus. Markiert diesen Punkt. Geht zurück zum Fähnchen und zählt nun die Schritte bis zur Buche, diesmal biegt ihr dort im rechten Winkel nach links ab und geht wieder die gleiche Anzahl von Schritten geradeaus. Markiert auch diesen Punkt.
Der Schatz befindet sich genau in der Mitte zwischen den beiden markierten Punkten."

23.Schatzkarte



Als die Schüler auf der Insel ankommen, ist das rote Fähnchen nicht mehr da. Wieso können sie den Schatz trotzdem finden?
Antwort: Es sei D_{Ahorn} die Drehung um -90^o um den Ahornbaum. Dann ist $D_{Ahorn}(A) =$ Fähnchen. Es sei D_{Buche} die Drehung um -90^o um die Buche. Dann gilt D_{Buche}(Fähnchen) $= B$. Also gilt

$$(D_{Buche} \circ D_{Ahorn})(A) = B$$

Aber $D_{Buche} \circ D_{Ahorn}$ ist eine Drehung um $(-90^o) + (-90^o) = 180^o$. Also ist der Fixpunkt dieser Drehung der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Dort liegt der Schatz.

24. Schatz ist im Fixpunkt

Also ist der Schatz im Fixpunkt der Punktspieglung (=Drehung um 180^o) $D_{Buche} \circ D_{Ahorn}$. Dieser Fixpunkt hängt nicht von der Lage des Fähnchens ab.