Elementare Geometrie Vorlesung 9

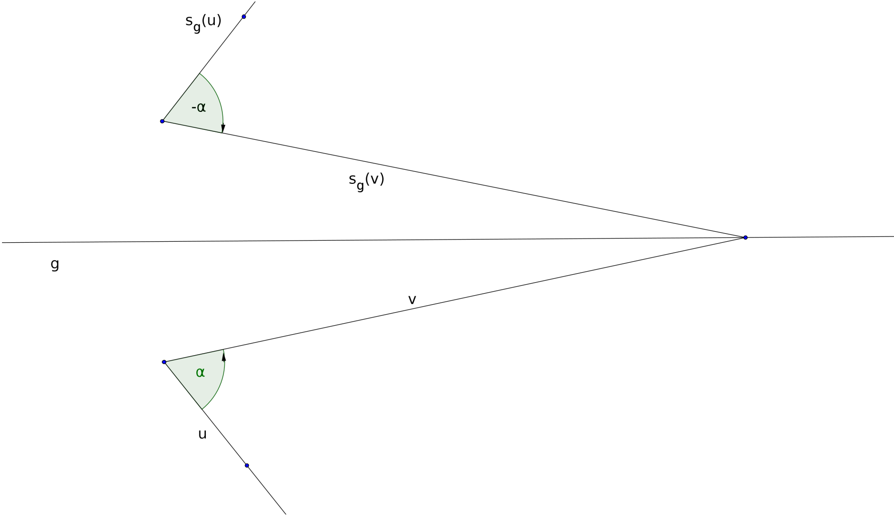
Thomas Zink

22.5.2017

1. Spieglung von Winkeln

Es sei $s_g : E \to E$ die Spieglung an einer Geraden g. Es seien u, v zwei Strahlen. Dann gilt:

$$\sphericalangle(s_g(u), s_g(v)) = -\sphericalangle(u, v).$$



$s_g(u)$
$-\alpha$
$s_g(v)$
g
v
α
u

2. Winkel bei Isometrien

Allgemein gilt für eine Isometrie $f : E \to E$

$$\sphericalangle(f(u), f(v)) = \begin{cases} \sphericalangle(u, v) & \text{wenn } f \text{ nichtspiegelnd} \\ -\sphericalangle(u, v) & \text{wenn } f \text{ spiegelnd} \end{cases}$$

In der Tat, eine spiegelnde Bewegung ist ein Kompositum einer Bewegung und einer Spieglung an einer Geraden.

2. Winkel bei Isometrien

Allgemein gilt für eine Isometrie $f : E \to E$

$$\sphericalangle(f(u), f(v)) = \begin{cases} \sphericalangle(u, v) & \text{wenn } f \text{ nichtspiegelnd} \\ -\sphericalangle(u, v) & \text{wenn } f \text{ spiegelnd} \end{cases}$$

In der Tat, eine spiegelnde Bewegung ist ein Kompositum einer Bewegung und einer Spieglung an einer Geraden.

Für geometrische Winkel gilt

$$\angle(f(u), f(v)) = \angle(u, v).$$

3.Winkel zwischen zwei Geraden

Wir haben den Drehwinkel und den geometrischen Winkel zwischen zwei Strahlen in einer Ebene E definiert, aber wir können nicht vom Winkel zwischen zwei Geraden g und h reden.

3.Winkel zwischen zwei Geraden

Wir haben den Drehwinkel und den geometrischen Winkel zwischen zwei Strahlen in einer Ebene E definiert, aber wir können nicht vom Winkel zwischen zwei Geraden g und h reden.

Wir wählen auf g einen beliebiegen Strahl u und auf h einen beliebigen Strahl v.
Behauptung: Der Drehwinkel $2\sphericalangle(u, v)$ ist unabhängig von der Wahl von u und v.

3.Winkel zwischen zwei Geraden

Wir haben den Drehwinkel und den geometrischen Winkel zwischen zwei Strahlen in einer Ebene E definiert, aber wir können nicht vom Winkel zwischen zwei Geraden g und h reden.

Wir wählen auf g einen beliebiegen Strahl u und auf h einen beliebigen Strahl v.
Behauptung: Der Drehwinkel $2\sphericalangle(u,v)$ ist unabhängig von der Wahl von u und v.

Man definiert

$$2\sphericalangle(g,h) = 2\sphericalangle(u,v).$$

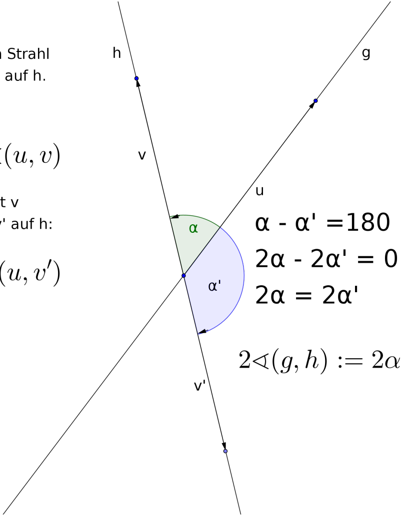
W''ahle einen Strahl
u auf g und v auf h.

Es sei

$$\alpha = \sphericalangle(u, v)$$

W''ahle statt v
den Strahl v' auf h:

$$\alpha' = \sphericalangle(u, v')$$



α - α' =180 ⇒
2α - 2α' = 0 ⇒
2α = 2α'

$$2\sphericalangle(g, h) := 2\alpha = 2\alpha'$$

4. Zwei Spieglungen

Es seien $\phi, \psi : E \to E$ zwei spiegelnde Isometrien. Dann ist $\psi \circ \phi$ nichtspiegelnd und folglich eine Bewegung.

4. Zwei Spieglungen

Es seien $\phi, \psi : E \to E$ zwei spiegelnde Isometrien. Dann ist $\psi \circ \phi$ nichtspiegelnd und folglich eine Bewegung.

Wir betrachten zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt S schneiden. Es sei s_g die Spieglung an g und s_h die Spieglung an h. Die Bewegung $s_h \circ s_g$ hat den Fixpunkt S und ist folglich eine Drehung um S.

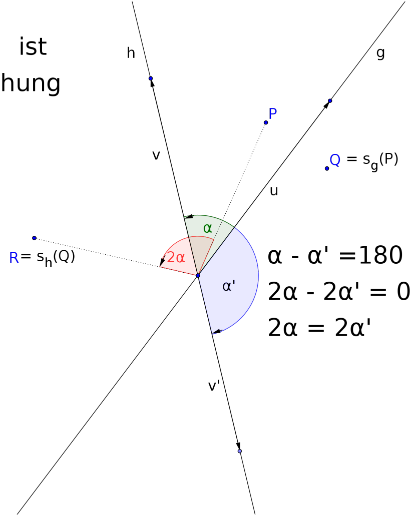
4. Zwei Spieglungen

Es seien $\phi, \psi : E \to E$ zwei spiegelnde Isometrien. Dann ist $\psi \circ \phi$ nichtspiegelnd und folglich eine Bewegung.

Wir betrachten zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt S schneiden. Es sei s_g die Spieglung an g und s_h die Spieglung an h. Die Bewegung $s_h \circ s_g$ hat den Fixpunkt S und ist folglich eine Drehung um S.

$$\vartheta(s_h \circ s_g) = 2\sphericalangle(g, h).$$

$s_h \circ s_g$ ist
die Drehung
um 2α



α - α' =180 $\Rightarrow$
2α - $2\alpha'$ = 0 $\Rightarrow$
$2\alpha = 2\alpha'$

Beweis von 4.

Wir wissen, dass $s_h \circ s_g$ eine Drehung um den Punkt S ist. Wir müssen den Drehwinkel berechnen. Wir wählen einen Punkt $P \in g$, $P \neq S$. Es sei u der Strahl von S in Richung P. Der Drehwinkel ist nach Definition

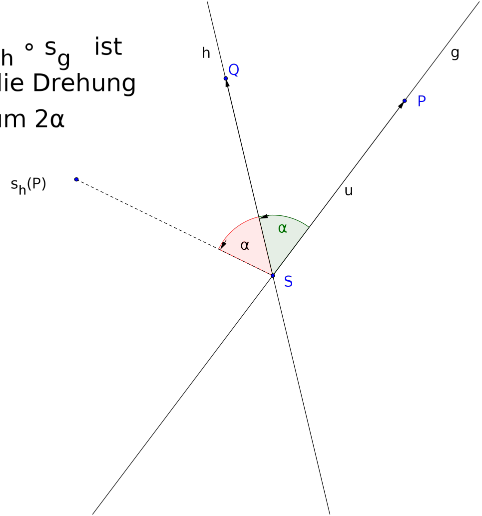
Beweis von 4.

Wir wissen, dass $s_h \circ s_g$ eine Drehung um den Punkt S ist. Wir müssen den Drehwinkel berechnen. Wir wählen einen Punkt $P \in g$, $P \neq S$. Es sei u der Strahl von S in Richung P. Der Drehwinkel ist nach Definition

$$\theta := \sphericalangle(u, s_h \circ s_g(u))$$

Es gilt $(s_h \circ s_g)(P) = s_h(P)$. Daher ist $s_h \circ s_g(u)$ der Strahl von S in Richtung $s_h(P)$.

$s_h \circ s_g$ ist die Drehung um 2α



Beweis von 4.

Also gilt: $\quad \theta := \sphericalangle(PSs_h(P)).$

Es sei $Q \in h$.

$$\theta = \sphericalangle(PSs_h(P)) = \sphericalangle(PSQ) + \sphericalangle(QSs_h(P)).$$

Beweis von 4.

$$\text{Also gilt:} \qquad \theta := \sphericalangle(PSs_h(P)).$$

Es sei $Q \in h$.

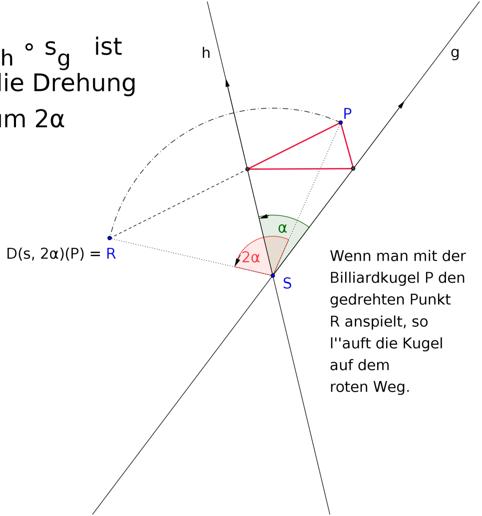
$$\theta = \sphericalangle(PSs_h(P)) = \sphericalangle(PSQ) + \sphericalangle(QSs_h(P)).$$

Da s_h Drehwinkel auf ihr Negatives abbildet, gilt

$$\sphericalangle(QSP) = -\sphericalangle(QSs_h(P)),$$

$$\theta = \sphericalangle(PSQ) - \sphericalangle(QSP) = 2\sphericalangle(PSQ) = 2\sphericalangle(g, h).$$

$s_h \circ s_g$ ist die Drehung um 2α

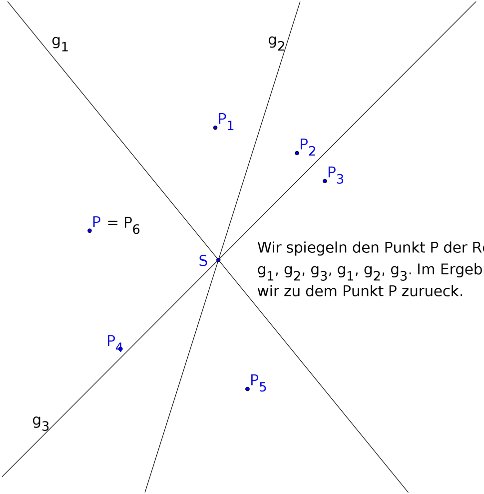


Wenn man mit der Billiardkugel P den gedrehten Punkt R anspielt, so l''auft die Kugel auf dem roten Weg.

5. Spieglungen an 3 Geraden

Wir betrachten 3 Geraden g_1, g_2 und g_3 in der Ebene E, die durch einen Punkt S gehen. Dann gilt

$$s_{g_3} \circ s_{g_2} \circ s_{g_1} \circ s_{g_3} \circ s_{g_2} \circ s_{g_1} = \mathrm{id}_E \, .$$



Wir spiegeln den Punkt P der Reihe nach an g_1, g_2, g_3, g_1, g_2, g_3. Im Ergebnis kehren wir zu dem Punkt P zurueck.

6. Beweis zu Spieglungen an 3 Geraden

Das Kompositum der Spieglungen kann man als Kompositum von drei Drehungen ansehen:

$$\left(s_{g_3} \circ s_{g_2}\right) \circ \left(s_{g_1} \circ s_{g_3}\right) \circ \left(s_{g_2} \circ s_{g_1}\right).$$

6. Beweis zu Spieglungen an 3 Geraden

Das Kompositum der Spieglungen kann man als Kompositum von drei Drehungen ansehen:

$$(s_{g_3} \circ s_{g_2}) \circ (s_{g_1} \circ s_{g_3}) \circ (s_{g_2} \circ s_{g_1}).$$

Diese Drehungen haben von links nach rechts die folgenden Drehwinkel

$$2\sphericalangle(g_2, g_3), \quad 2\sphericalangle(g_3, g_1), \quad 2\sphericalangle(g_1, g_2).$$

Man sieht leicht (Übung), dass die Summe dieser Drehwinkel 360^o ist.

7.Die Gleitspieglung

Es sei m eine Gerade. Eine Translation T nennt man parallel zu m, wenn m eine invariante Gerade von T ist. Dann kann man schreiben:

$$T = \overrightarrow{AB}, \quad \text{wo } A, B \in m.$$

7.Die Gleitspieglung

Es sei m eine Gerade. Eine Translation T nennt man parallel zu m, wenn m eine invariante Gerade von T ist. Dann kann man schreiben:

$$T = \vec{AB}, \quad \text{wo } A, B \in m.$$

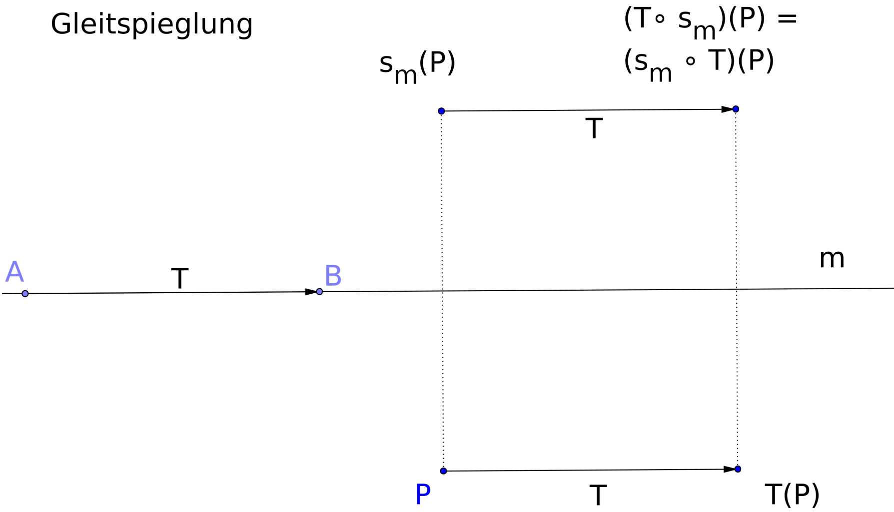
Definition

Es sei m eine Gerade und es sei T parallel zu m. Dann gilt:

$$s_m \circ T = T \circ s_m.$$

Wenn $T \neq 0$ heißt dieses Kompositum eine Geleitspieglung.

Gleitspieglung



8.Der 2.Hauptsatz über Isometrien

Theorem

Es sei $f : E \to E$ eine Isometrie. Dann gibt es für f nur vier Möglichkeiten

(1) *f ist eine Translation.*

(2) *f ist eine Drehung.*

(3) *f ist die Spieglung an einer Geraden.*

(4) *f ist eine Gleitspieglung bezüglich einer Geraden m.*

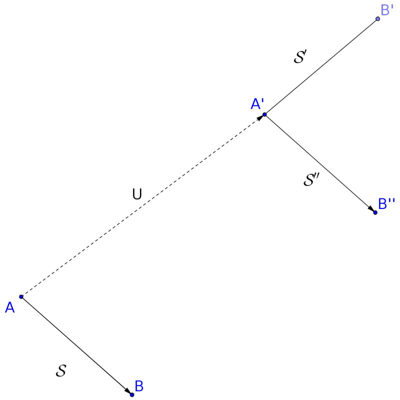
9. Beweis:

Eine nichtspiegelnde Isometrie ist nach Definition eine Bewegung. Es sei $f : E \to E$ eine spiegelnde Isometrie. Wir müssen zeigen, dass f eine Spieglung oder eine Gleitspieglung ist. Wir wählen eine rechtsbeseitete Strecke $(\overline{AB}, \mathcal{S})$. Es sei $(\overline{A'B'}, \mathcal{S}')$ ihr Bild bei f. Die letzte Strecke ist dann linkssbeseitet.

9. Beweis:

Eine nichtspiegelnde Isometrie ist nach Definition eine Bewegung. Es sei $f : E \to E$ eine spiegelnde Isometrie. Wir müssen zeigen, dass f eine Spieglung oder eine Gleitspieglung ist. Wir wählen eine rechtsbeseitete Strecke $(\overline{AB}, \mathcal{S})$. Es sei $(\overline{A'B'}, \mathcal{S}')$ ihr Bild bei f. Die letzte Strecke ist dann linkssbeseitet.

Es sei $U = \overset{\rightarrow}{AA'}$. Es sei $U(A) = A' = A''$ $U(B) = B''$ und $U(\mathcal{S}) = \mathcal{S}''$. Dann ist $(\overline{A''B''}, \mathcal{S}'')$ eine rechtsbeseitete Strecke.


B'
$\mathcal{S}'$
A'
$\mathcal{S}''$
U
B''
A
$\mathcal{S}$
B

10. Beweis:

Es sei g die Mittelsenkrechte zu B' und B''. Es sei h die Parallele zu g durch den Punkt A und es sei A_1 der Fußpunkt des Lots von A' auf h. Dann verläuft m in der Mitte zwischen g und h.

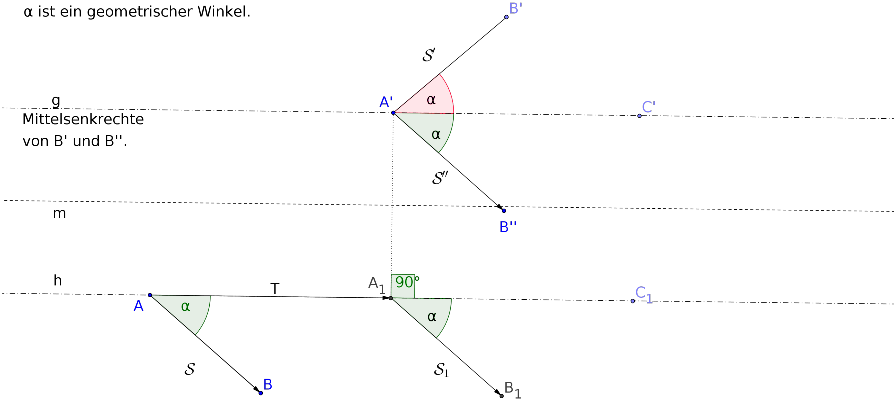
10. Beweis:

Es sei g die Mittelsenkrechte zu B' und B''. Es sei h die Parallele zu g durch den Punkt A und es sei A_1 der Fußpunkt des Lots von A' auf h. Dann verläuft m in der Mitte zwischen g und h.

Wir behaupten, dass $s_m(\overline{A_1B_1}) = \overline{A'B'}$. Dann würde gelten:

$$s_m \circ T(\overline{AB}) = s_m(\overline{A_1B_1}) = \overline{A'B'}$$

α ist ein geometrischer Winkel.



11. Beweis:

Da die Tranlationen U und T und s_g geometrische Winkel erhalten, haben alle eingezeichneten Winkel die Größe α. Nach Konsruktion gilt $s_m(A_1) = A'$. Also bildet s_m den Winkel $\angle(B_1A_1C_1)$ auf den Winkel $\angle(B'A'C')$ ab.

12.Der Satz von Hjemslev

Es sei g eine Gerade in der Ebene E. Wir versehen g mit einem Maßstab (= Koordinate) x. Wir bewegen die Gerade g und erhalten eine Gerade h, die dann auch mit einem Maßstab versehen ist.
Es sei $P \in g$ ein Punkt mit der Koordinate x und $P' \in h$ der Punkt mit der gleichen Koordinate. Es sei M_P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PP'}$.
Dann liegen alle Punkte M_P für $P \in g$ auf einer Geraden.

Der Satz von Hjemslev