Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 2

Aufgabe 1
Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass für $x, y \in K$ mit $x \neq y$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}\,.$$

Aufgabe 2
Geben Sie kombinatorische Interpretationen der Aufgaben 1(c) und 1(d) von Übungsblatt 1 an. Wir hatten in der Vorlesung gesehen, dass $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass für jeden angeordneten Körper K auch das (kartesische) Produkt $K \times K$ von K mit sich selbst zu einem Körper wird, indem man setzt

$$(x, y) \oplus (x', y') := (x + x', y + y')$$

und

$$(x, y) \odot (x', y') := (xx' - yy', xy' + x'y)\,.$$

Was sind die neutralen Elemente bzgl. dieser Verknüpfungen?

Aufgabe 4
Sei K ein Körper. Beweisen Sie das folgende Potenzgesetz.

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

für alle $x \in K$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Identität im Fall $x \neq 0$ sogar für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Hinweis. Verwenden Sie das Beweisprinzip der vollständigen Induktion und ggf. die Potenzgesetze aus Aufgabe 2 auf Übungsblatt 2.

Aufgabe 5
Geben Sie die Verknüpfungstafeln für den Körper $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ mit drei Elementen an. Ebenso für $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Aufgabe 6
Sei K ein angeordneter Körper und seien $x, y \in K$ nicht-negativ (d.h. $x, y \geq 0$). Zeigen Sie, dass gilt

$$(1 + x)(1 + y) \geq 1 + x + y\,.$$