Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 11

Aufgabe 1
Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

erfüllen.

Aufgabe 2
Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

(a) $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, falls $a > 1$.

(b) $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, falls $a > 1$.

(c) $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$, falls $a > 1$.

(d) $\lim_{x\searrow 0} \log_a(x) = -\infty$, falls $a > 1$.

(e) $\lim_{x\searrow 0} x^k a^{\frac{1}{x}} = \infty$, falls $k \in \mathbb{N}$ und $a > 1$.

(f) $\lim_{x\searrow 0} x^\alpha = 0$, falls $\alpha > 0$.

(g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a(x)}{x^\alpha} = 0$, falls $\alpha > 0$ und $a \neq 1$.

(h) $\lim_{x\searrow 0} x^\alpha \log_a(x) = 0$, falls $\alpha > 0$ und $a \neq 1$.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass fuer eine komplexe Zahl $z \neq 0$ gilt:

(a) $\mathrm{Re}(z^{-1}) = \frac{1}{|z|^2}\,\mathrm{Re}(z)$.

(b) $\mathrm{Im}(z^{-1}) = -\frac{1}{|z|^2}\,\mathrm{Im}(z)$.

(c) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.