Lösungsskizze Klausuraufgaben

Aufgabe 1:

- $a_n \to g$ $:\Leftrightarrow$ In jeder ε-Umgebung von a liegen fast alle Folgeglieder
  $\left(\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - g| < \varepsilon \right)$

- h HP von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $:\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente TF $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, die gegen h konvergiert
  (alternativ $\Leftrightarrow$ In jeder ε-Umgebung von a liegen unendlich viele Folgeglieder)

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n,m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$

- Konvergent $\Rightarrow$ Cauchy: Sei $\lim a_n = g$ und sei $\varepsilon > 0$.
  $\Rightarrow$ $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$

  Für $n, m \geq N$ gilt dann

  $$|a_n - a_m| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - g| + |a_m - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent: Das gilt wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Der Limes g von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann der einzige HP von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 2:

a) Für $n \geq 1$ gilt $a_n = \frac{\cancel{n^2}\left(-1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(4 + \frac{1}{n^2}\right)} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{-1-0-0}{4+0} = -\frac{1}{4}$

b) Wir wissen aus der VL, dass $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Das impliziert die Beh..

c) Wegen $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 + 1 = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ folgt

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty$$

d) $a_n = \frac{\cancel{2^n}\left(\frac{n^2}{2^n} - 1\right)}{\cancel{2^n}\left(\frac{n^3}{2^n} + 1\right)} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{-1}{+1} = -1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$$

e) Für $n \geq 1$ gilt $a_n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$$\xrightarrow[\text{s. VL}]{n \to \infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{e}$$

Aufgabe 3:

a) Die Reihe ist divergent, da $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3} \geq 1$, also insbesondere keine Nullfolge.

b) Wurzelkriterium: $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[\text{s. VL}]{n \to \infty} \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ abs. Konvergent

c) $a_n = \frac{n^2+1}{n^3} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$ ist offenbar monoton fallende Nullfolge, also ist die Reihe nach Leibniz konvergent. Die Reihe ist aber nicht absolut konvergent, denn

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \geq \frac{1}{n}$$

und $\sum \frac{1}{n} = +\infty$.

d) Konvergent nach Leibniz wie in c). Sogar abs. Konvergent, denn

$$\frac{n+1}{n^3} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{2}{n^2} \text{ für fast allen}$$

und $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

e) Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{e^{n+1} - e^{-(n+1)}}{e^n - e^{-n}} \cdot \frac{(2e)^n}{(2e)^{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} e \cdot \frac{1}{2e} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ abs. Konvergenz.

Aufgabe 4: Stetigkeit: Komposition stetiger Funktionen.

Diff'barkeit: Für $x > 0$ ist $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$, also $f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Für $x < 0$ ist $f(x) = \sqrt{-x^3} = (-x)^{\frac{3}{2}}$, also $f'(x) = \frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} \cdot -1 = -\frac{3}{2}\sqrt{-x}$.

$x = 0$: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sqrt{|h^3|} - 0}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \underbrace{\frac{|h|}{h}}_{\pm 1} \sqrt{|h|} = 0$

$\Rightarrow$ f' ist stetig, denn

$$\underbrace{\lim_{x \searrow 0} \tfrac{3}{2}\sqrt{x}}_{f'(x)} = \underbrace{\lim_{x \nearrow 0} -\tfrac{3}{2}\sqrt{-x}}_{f'(x)} = 0 = f'(0)$$

f ist aber nicht 2-mal db, denn z.B. gilt im Nullpunkt:

$$\frac{\frac{3}{2}\sqrt{h} - 0}{h} \xrightarrow{h \searrow 0} +\infty,$$

f' ist also nicht db in $a = 0$.

Aufgabe 5: Streng monoton wachsend: $\tan'(x) \overset{\text{s. VL}}{=} \frac{1}{\cos^2 x} > 0$

für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Bild(tan) $= \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = +\infty$ und

$\lim\limits_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim\limits_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\infty$. Die Beh. folgt aus

dem ZWS.

Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}}_{\neq 0!}} = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\cos^2(y) = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

Aufgabe 6: Klar: f ist stetig als Komposition stetiger Fkt.

f ist stetig auf der kompakten Menge $D = [0,1]$

$\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}$ f ist glm. stetig auf der