Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 1

Aufgabe 1
Beweisen Sie die folgenden Summenformeln.

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq k \geq 0$ gilt $\sum\limits_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(c) Für alle $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{m+n}{k} = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(1+2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2
Finden und beweisen Sie geschlossene Formeln für die folgenden Summen.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} (4k-3)$.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass es zu jeder natürlichen Zahl $r \in \mathbb{N}$ rationale Zahlen $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Q}$ so gibt, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^r = \frac{1}{r+1} n^{r+1} + a_r n^r + \ldots + a_1 n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Hinweis. Zeigen Sie, dass es für fixiertes $r \in \mathbb{N}$ rationale Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ so gibt, dass die obige Formel einer vollständigen Induktion nach n standhält. Verwenden Sie dafür den Binomischen Lehrsatz.

(5 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 28.04.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128