Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 2

Aufgabe 1
Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$ gilt $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

(2 Punkte)

Aufgabe 2
Sei K ein Körper. Beweisen Sie die folgenden Potenzgesetze.

(a) Für alle $x, y \in K$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(xy)^n = x^n y^n$. Falls $x, y \neq 0$, so gilt diese Identität für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Für alle $x \in K$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $x^{m+n} = x^m x^n$. Falls $x \neq 0$, so gilt diese Identität für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

Hinweis. Verwenden Sie geeignete Fallunterscheidungen und das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

(2+3 Punkte)

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass in jedem angeordneten Körper K für beliebige $x, y \in K$ gilt $(\frac{x+y}{2})^2 \geq xy$.

Hinweis. Per Definition gilt $2 = 1 + 1$. Ist hier $2 \neq 0$?

(2 Punkte)

Aufgabe 4
Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen.

(a) $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \geq 4$.

(b) $2^n < n!$ für alle $n \geq 4$.

(c)
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ \leq \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ < \ 3\,.$$
für alle $n \geq 1$.

Hinweis. Teil (c): Verwenden Sie (für die linke Ungleichung) den Binomischen Lehrsatz und (für die rechte Ungleichung) Teil (b) und die Summenformel für die geometrische Reihe.

(2+2+3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 05.05.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128