Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 3

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2 x^2}{4}\,.$$

Hinweis. Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz.

(2 Punkte)

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ streng monoton wachsend ist, d.h. es gilt $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$.

Hinweis. Verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung.

(3 Punkte)

Aufgabe 3

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der Eigenschaft, dass es eine reelle Zahl $0 \leq c < 1$ so gibt, dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq c$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Quotientenbedingung aus Teil (a) immer erfüllt ist, wenn die Folge $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ gegen eine Zahl < 1 konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass die hinreichende Bedingung aus Teil (a) nicht notwendig dafür ist, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Geben Sie also eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen $\neq 0$ an, die die Quotientenbedingung aus Teil (a) nicht erfüllt.

(d) Geben Sie eine divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen $\neq 0$ an, die die schwächere Bedingung $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Hinweis. Teil (a): Zeigen Sie, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n| \leq c^{n-N}|a_N|$ für alle $n \geq N$.

(3+2+2+2 Punkte)

Aufgabe 4
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim a_n = a \implies \lim |a_n| = |a|\,.$$

Hinweis. Verwenden Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung.

(2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 12.05.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128