Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 8

Aufgabe 1
Betrachten Sie die Menge $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ und zeigen Sie, dass $\sup(D) = \sqrt{2}$ und $\inf(D) = -\sqrt{2}$.

(2 Punkte)

Aufgabe 2
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(b) Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Hinweis. Teil (a): Die Menge $\{0, 1, \ldots, n\}$ hat genau 2^{n+1} Teilmengen (insbesondere also nur endlich viele). Teil (b): Beweis durch Widerspruch durch Betrachtung einer geeigneten Teilmenge von $\mathbb{N}$. Alternativ: Konstruktion einer expliziten Surjektion von der Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ in das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$.

(2+4 Punkte)

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent ist, wenn gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

in keinem Punkt stetig ist.

Hinweis. In jeder ε-Umgebung einer beliebigen reellen Zahl x gibt es rationale und irrationale Zahlen.

(2 Punkte)

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass Polynomfunktionen in jedem Punkt stetig sind.

(2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 16.06.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128